Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 775, 2007, с.11-16

УДК 519.3

Минимаксный подход к решению транспортной задачи со случайным спросом

Л. В. Бачкир, О. В. Серая
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт», Украина

Formulated and decided task of transporting logistic in which random demand is certain by the values of its expected value and dispersion. Technology of the continuous linear programming is used to decision task.

1. Общая постановка задачи. Анализ публикаций по теме

Каноническая формулировка транспортной задачи линейного программирования [1] не вполне удовлетворяет практические потребности решения таких задач, так как не учитывает случайный характер основных параметров задачи (спрос на реализуемый товар, стоимость транспортировок). Учет стохастической природы задачи приводит к необходимости модификации ее формулировки и методов решения. Анализ известных постановок транспортных задач в условиях неопределенности позволяет сделать следующие выводы. В [2] описан метод решения транспортной задачи, в которой неопределенность спроса отображается прямоугольными нечеткими числами с заданными носителями. Вычислительная процедура является итерационной двухуровневой. На верхнем уровне решается координирующая задача, определяющая вектор значений спроса на товар потребителями. Метод решения – алгоритм Нелдера-Мида. На нижнем уровне для полученных значений спроса решается обычная транспортная задача. При этом количественные значения параметров задачи (параметры носителей нечетких чисел, определяющих спрос) не обсуждается. Выбранный метод решения координирующей задачи может быть реализован лишь для задач небольшой размерности (10-15 потребителей), в то время как на практике возникают задачи гораздо более высокой размерности. В [3] транспортная задача с неопределенностью в спросе решается в предположении, что плотности распределения случайных значений спроса известны. Уязвимость этой гипотезы очевидна, поскольку реальный спрос – нестационарный процесс, параметры которого зависят от многих факторов (сезон, день недели и т.п.) и меняются во времени. По-видимому, более реалистическая позиция состоит в следующем: имеющихся статистических данных о спросе достаточно только для того, чтобы для каждого периода времени оценить основные статистические его характеристики – математическое ожидание и дисперсию. В этой ситуации ограниченной неопределенности естественным является использование минимаксного подхода. Сформулируем теперь транспортную задачу со случайным спросом с учетом особенностей этого наименее требовательного его описания. Кроме того, рассмотрим возможность решения координирующей задачи с применением более эффективного численного метода.

2. Цель статьи

Разработка методики решения транспортной задачи со случайным спросом на основе минимаксного подхода. В рамках этого подхода для описания случайного спроса при заданных значениях его статистических характеристик (математическое ожидание, дисперсия) формируется наихудшая плотность распределения спроса, навязывающая максимальную вероятность возникновения дефицита или максимальную вероятность возникновения нереализованного остатка. Собственно транспортная задача решается с учетом этой плотности распределения случайного спроса.

3. Постановка задачи

Пусть имеется m производителей однородного продукта с известным распределением объема производства - $(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_m)$, а также n потребителей этого продукта. Для каждого потребителя спрос – случайная величина, относительно которой статистически определены математическое ожидание и дисперсия. Таким образом, известны наборы $(m_1 \quad m_2 \quad \ldots \quad m_n)$, $(\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \ldots \quad \sigma_n^2)$. Кроме того, задана матрица $C = (c_{ij})$ стоимостей перевозок единицы товара от поставщиков товара к потребителям.

Введем набор $Z = (z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_n)$ подлежащих определению параметров, задающих объем поставки товара потребителям, и матрицу $X(Z) = \{x_{ij}(z)\}$, где $x_{ij}(z)$ - планируемое количество товара, которое должно быть доставлено от i-го производителя j-му потребителю, зависящее от Z.

Тогда формальная постановка задачи имеет вид: найти набор Z и матрицу $X(Z)$, минимизирующие

$$L(X(Z)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}(Z) \tag{1}$$

и удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(Z) = a_i, \; i = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(Z) = z_j, \; j = 1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{4}$$

$$z_j \geq 0, \; j = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

$$x_{ij}(Z) \geq 0\,,\ i = 1,2,...,m\,,\ j = 1,2,...,n\,. \tag{6}$$

Заметим, что при определении набора $Z = (z_j)$ должны быть учтены известные статистические характеристики (m_j), (σ_j^2), $j = 1,2,...,n$, соответствующих случайных величин (z_j).

4. Основные результаты

Для решения задачи используем следующую процедуру. Зададим совокупность допустимых (удовлетворяющих ограничениям (4), (5)) наборов

$$Z_1 = (z_{11} \quad z_{12} \quad ... \quad z_{1n}),\ Z_2 = (z_{21} \quad z_{22} \quad ... \quad z_{2n}),\ Z_s = (z_{s1} \quad z_{s2} \quad ... \quad z_{sn}).$$

Для каждого из этих наборов решим основную транспортную задачу (1)-(3), (6) и зафиксируем соответствующие значения целевой функции

$$L^T = (L(X(Z_1)), L(X(Z_2)),..., L(X(Z_s)))\,.$$

Введем матрицу H и вектор B следующим образом

$$H = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & ... & z_{1n} & z_{11}^2 & z_{12}^2 & ... & z_{1n}^2 & z_{11}z_{12} & z_{11}z_{13} & ... & z_{1,n-1}z_{1,n} \\ z_{21} & z_{22} & ... & z_{2n} & z_{21}^2 & z_{22}^2 & ... & z_{2n}^2 & z_{21}z_{22} & z_{21}z_{23} & ... & z_{2,n-1}z_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ z_{s1} & z_{s2} & ... & z_{sn} & z_{s1}^2 & z_{s2}^2 & ... & z_{sn}^2 & z_{s1}z_{s2} & z_{s1}z_{s3} & ... & z_{s,n-1}z_{s,n} \end{pmatrix},$$

$$B^T = (b_{10} \quad b_{20} \quad ... \quad b_{n0} \quad b_{11} \quad b_{22} \quad ... \quad b_{nn} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad ... \quad b_{n-1,n}).$$

Зададим теперь регрессионное соотношение, связывающее численное значение Z поставок товара потребителям с значением целевой функции $L(X(Z))$, получаемым в результате решения соответствующей основной задачи

$$L(X(Z)) = b_{10}z_1 + b_{20}z_2 + ... + b_{n0}z_n + b_{11}z_1^2 + b_{12}z_1z_2 + ... + b_{n-1,n}z_{n-1}z_n\,. \tag{7}$$

В матричной форме с использованием введенных H и B это соотношение имеет вид

$$L = HB\,. \tag{8}$$

Неизвестный вектор B найдем методом наименьших квадратов. При этом

$$B = (H^T H)^{-1} H^T L\,. \tag{9}$$

Соотношение (7) с учетом (9) может быть использовано для отыскания рационального набора Z, обеспечивающего минимизацию основного критерия задачи. Однако, очевидный недостаток такого подхода состоит в следующем. Если не ввести отграничений на допустимые значения каждого из параметров

z_j, то может оказаться, что оптимальный по стоимости план будет соответствовать ситуации, когда в некоторых пунктах реализации с высокой стоимостью доставки к ним товара будет создаваться недопустимо высокий уровень дефицита за счет избытка товара в пунктах с низкой стоимостью доставки. С целью устранения этого недостатка обоснуем диапазоны допустимых значений поставки z_j, $j = 1,2,...,n$, для каждого из потребителей с учетом известных статистических данных о спросе в каждом из них.

Пусть верхняя граница диапазона допустимых значений поставки товара для j-го потребителя равна $d_{j\max}$. Тогда вероятность возникновения дефецита определяется выражением

$$P_j^{(деф)}\left(d_{j\max}\right) = \int\limits_{d_{j\max}}^{\infty} f(\theta)d\theta, \tag{10}$$

где

$f(\theta)$ - плотность распределения спроса.

В соответствии с минимаксной идеологией поставим задачу отыскания наихудшей с точки зрения возможности возникновения дефицита плотности распределения случайного спроса с заданными значениями математического ожидания m_j и дисперсии σ_j^2. Формальная постановка задачи такова: найти плотность $f(\theta)$, максимизирующую вероятность возникновения дефицита и удовлетворяющую ограничениям

$$\int\limits_0^{\infty} f(\theta)d\theta = 1, \quad \int\limits_0^{\infty} \theta f(\theta)d\theta = m_j, \quad \int\limits_0^{\infty} \theta f(\theta)d\theta = m_j, \quad f(\theta), \qquad \theta \in [0,\infty). \tag{11}$$

Полученная задача является задачей континуального линейного программирования [4]. Решение этой задачи отыскивается в классе дельта-функций Дирака и имеет вид:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) = {} & \frac{m_j^2 - 2m_j d_{j\max} + d_{j\max}^2}{m_j^2 + \sigma_j^2 - 2m_j d_{j\max} + d_{j\max}^2}\,\delta\left(\theta - d_{j\max}\right) + \\ & + \frac{\sigma_j^2}{m_j^2 + \sigma_j^2 - 2m_j d_{j\max} + d_{j\max}^2}\,\delta\left(\theta - \frac{m_j^2 + \sigma_j^2 - m_j d_{j\max}}{m_j - d_{j\max}}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

При этом вероятность того, что спрос превысит $d_{j\max}$ равна коэффициенту при втором слагаемом в выражении (12). Зададим теперь допустимую вероятность γ_1 возникновения дефицита.

Тогда верхнюю границу диапазона значений z_j найдем из уравнения

$$\sigma_j^2 \Big/ \left(m_j^2 + \sigma_j^2 - 2m_j d_{j\max} + d_{j\max}^2\right) = \gamma_1,$$

которое после упрощения приобретает вид

$$m_j^2 - 2m_j d_{j\max} + d_{j\max}^2 - \sigma_j^2\,(1-\gamma_1)/\gamma_1 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$d_{j\max}^{(1)} = m_j + \sigma_j \sqrt{(1-\gamma_1)/\gamma_1}\,, \tag{13}$$

$$d_{j\max}^{(2)} = m_j - \sigma_j \sqrt{(1-\gamma_1)/\gamma_1}\,. \tag{14}$$

Поскольку $d_{j\max} > m_j$, то решением задачи является соотношение (13).

Совершенно аналогично отыскивается нижняя граница $d_{j\min}$ допустимых значений поставки товара. Искомое значение определяется, исходя из вероятности появления нереализованного остатка товара, которая равна

$$P_j^{(ocm)}\left(d_{j\min}\right) = \int_0^{d_{j\min}} f(\theta)\,d\theta\,. \tag{15}$$

При этом наихудшей является плотность распределения спроса, удовлетворяющая (11), для которой вероятность (15) максимальна. Решением этой задачи является плотность

$$\begin{aligned} f_2(\theta) = {} & \frac{\sigma_j^2}{m_j^2 + \sigma_j^2 - 2m_j d_{j\min} + d_{j\min}^2}\,\delta\left(\theta - d_{j\min}\right) + \\ & + \frac{m_j^2 - 2m_j d_{j\min} + d_{j\min}^2}{m_j^2 + \sigma_j^2 - 2m_j d_{j\min} + d_{j\min}^2}\,\delta\left(\theta - \frac{m_j^2 + \sigma_j^2 - m_j d_{j\min}}{m_j - d_{j\min}}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

причем вероятность возникновения остатка равна коэффициенту при первом слагаемом в выражении (16). Отсюда, задав допустимую границу, из уравнения

$$\sigma_j^2 \Big/ \left(m_j^2 + \sigma_j^2 - 2m_j d_{j\min} + d_{j\min}^2\right) = \gamma_2\,,$$

получим

$$d_{j\min}^{(1)} = m_j - \sigma_j \sqrt{(1-\gamma_2)/\gamma_2}\,, \quad d_{j\min}^{(2)} = m_j + \sigma_j \sqrt{(1-\gamma_2)/\gamma_2}\,. \tag{17}$$

Поскольку $d_{j\min} < m_j$, решение задачи определяет выражение (17).

Полученные соотношения (13) и (17) задают диапазоны допустимых значений поставок для каждого из потребителей.

Теперь может быть сформулирована задача отыскания набора $Z = \left(z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_n\right)$, минимизирующего (7) и удовлетворяющего системе ограничений

$$d_{j\min} \le z_j \le d_{j\max}\,, \ j = 1,2,\ldots,n\,. \tag{18}$$

Решение этой задачи может быть достигнуто, например, методом штрафных функций.

Сформируем штрафную функцию следующим образом:

$$\Phi_k\left(X(z)\right) = L\left(X(z)\right) + c_k \max\left\{\max_j\left(0, d_{j\min} - z_j\right), \max_j\left(0, z_j - d_{j\max}\right)\right\}, \quad (19)$$
$$k = 1,2,...$$

где

$c_1 < c_2 < ... < c_k < ...$ - последовательность штрафных коэффициентов.

Решение задачи выполняется итерационно с использованием на каждой итерации очередного значения штрафного коэффициента. С учетом специфики функции (7), входящей в (19), вычислительная процедура может быть основана на методе Ньютона. При этом в качестве начального набора на очередной итерации естественно использовать результат решения на предыдущей.

5. Выводы.

Таким образом, использование минимаксного подхода позволило обосновать допустимые границы поставок товара потребителям в условиях отсутствия закона распределения спроса на основании минимальной статистической информации о спросе. При этом исходная стохастическая транспортная задача редуцирована к двухэтапной. На первом этапе рассчитываются рациональные значения суммарных поставок каждому потребителю, а на втором – решается индуцированная первым этапом обычная транспортная задача. Дальнейшее исследования могут быть связаны с рассмотрением возможностей нечеткого описания всех параметров задачи. Возникающая при этом транспортная задача не тривиальна и требует специального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования тарнспортного типа. –М.: Наука, 1969.-412с.
2. Раскин Л.Г., Серая О.В., Харченко А.А. Задачи транспортной логистики на нечетких входных данных \\ Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ». – 2003. - №20. – С.95-98.
3. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. –М.: «Сов. Радио», 1979. -385с.
4. Раскин Л.Г., Кириченко И.В. Континуальное линейное программирование. – Х.: ВИВВ, 2005. – 176с.