

Скоростной удар по тонкостенным конструкциям

А. В. Бизюк, В. В. Бизюк, А. В. Колодяжный

Харьковский национальный экономический университет, Украина

Харьковская национальная академия городского хозяйства, Украина

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины

A local forming of the thin-walled elements of constructions in time, when a shock wave was not reflected from the fixing border is considered. A task for an element with elastic-plastic area of contact that spreads with a speed of sound in a metal is decided by the numeral method of eventual differences. The decision of task gives the real values of bending in the local area of contact and whole analysis of the tensely-deformed state of shell.

Исследование скоростного удара твердым телом по оболочечной конструкции или пластине традиционно проводится на основе уравнения удара С.П.Тимошенко [1, 2]:

$$v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} P(t_1) dt_1 = \varpi + \alpha \quad (1)$$

где в левой части стоит смещение ударника (центр тяжести или центр зоны контакта); v_0 , M , $P(t)$ – скорость соударения, масса ударника и усилие контактного взаимодействия; справа – смещение преграды в центре зоны контакта (решение краевой задачи для преграды) и упругое сжатие

$$\alpha = K P^{2/3}; K = \left[\frac{2R_T^{1/2} E}{3(1-\nu^2)} \right]^{2/3} \quad (2)$$

R_T – радиус ударника в виде жесткого шара.

В таком виде с нулевыми начальными условиями закрепления задача исследовалась аналитически для простых и сложных объектов в монографиях [2, 3, 4, 5] и обширной периодике.

Представляет интерес процесс локального формообразования оболочки или пластины при скоростном ударе, когда зона деформирования и проникание ударника происходит за время, когда ударная волна ещё не добежала до закрепления преграды, или отраженная волна деформирования не дает вклада в

деформирование зоны контакта при $t < 2 \frac{r_0}{c_0}$

где c_0 , r_0 – скорость волны растяжения-сжатия и ближайшее расстояние до границы, соответственно.

В этом случае в правой части уравнения (1) будет находиться решение краевой задачи для бесконечного объекта с расширяющейся упругопластической зоной ударного взаимодействия. Эта расширяющаяся со скоростью звука граница является защемлением: впереди неё – неподвижная

ненагруженная зона, а за ней – зона активного деформирования контактными усилиями.

Как было нами показано при исследовании локального импульсного деформирования цилиндрической оболочки [6] изгибные деформации – упругие и пластические – локализуются в зоне действия нагрузки, а деформации растяжения-сжатия распространяются в виде волн деформации на большие расстояния. Но, как показал Н.А.Кильчевский [3], они уносят примерно 10..15% энергии скоростного деформирования.

Рассмотрим ударное упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки на основе уравнения Донелла-Власова

$$\frac{Eh}{a^2} \left[\Delta^2 (\Delta + \gamma^2) (\Delta + \gamma^2) \varpi + \frac{\partial^4 \varpi}{\partial \chi^4} + \frac{\partial^2 \Delta^2 \varpi}{\partial t^2} \right] = \Delta^2 \left[P - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\lambda \Omega M_\xi) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\lambda \Omega M_\eta) \right] \quad (3)$$

где

$$M_\xi = -D \left[\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \eta^2} \right]; \quad M_\eta = -D \left[\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \xi^2} \right] - \text{пластические моменты};$$

$$\xi = \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/4}}{\sqrt{ha}} x; \quad \eta = \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/4}}{\sqrt{ha}} y; \quad \varpi = w/a; \quad \tau = \frac{(E/\rho)^{1/2}}{a} t - \text{безразмерные}$$

координаты;

E, ρ - модуль упругости и плотность материала оболочки;

a, h - радиус и толщина оболочки.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h}{a}; \quad \lambda = \frac{h \sigma_\varphi}{2 \sigma_i}; \quad \Omega = (2\eta - 1)^2 (\eta + 1)$$

После применения преобразования Лапласа по времени и двойного преобразования Фурье по координатам и их обращения по методу перевала (по координатам) и по теореме Эфроса (по Лапласу) для нагрузки, внезапно приложенной по круговой площадке, решение (1) получаем в виде

$$w_0(r, \theta, \tau) = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} J_0 \left[\cos^2(\varphi - \bar{\varphi}) \sqrt{\tau^2 - z^2} \right] \cdot J[z, (r - \bar{r}) \cos(\varphi - \bar{\varphi} - \theta)] \bar{r} \, d\bar{r} \, d\tau \, d\varphi \, dz \, d\theta \quad (4)$$

где

$$J = \int_0^{\infty} \cos \gamma z J_1[z, r \cos(\varphi - \theta)] - \sin \gamma z J_2[z, r \cos(\varphi - \theta)] \quad (5)$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \delta(z) + \frac{u}{2z} \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} \left[\cos \frac{u^2}{4z} C \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} \right) + \sin \frac{u^2}{4z} S \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} \right) \right]$$

$$J_2 = \frac{1}{2z} - \frac{u}{2z} \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} \left[\sin \frac{u^2}{4z} C \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} \right) - \cos \frac{u^2}{4z} S \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} \right) \right]$$

$C(x)$, $S(x)$ – косинус- и синус-интегралы Френеля.

Компоненты внутренних силовых параметров определяются как:

$$N_1 = -\frac{Eh}{a} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}; \quad N_2 = -\frac{Eh}{a} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} \quad (6)$$

$$M_1 = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Delta^2 F; \quad M_2 = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Delta^2 F; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$F(r, \theta, \tau) = \frac{1}{4\pi} \frac{Pa^2}{Eh} \int_0^{2\pi} \int_0^\tau \int_0^\tau J_0(\cos^2 \sqrt{\tau^2 - z^2}) \Phi dz d\tau d\varphi$$

$$\Phi = zu\pi \left[S \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} \right) \pm C \left(\frac{u}{2\sqrt{z}} \right) + \sqrt{\pi z} \sin \left(\frac{u}{4z} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Напряжения вычисляются как

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_1}{h^2} + \frac{N_1}{h}; \quad \sigma_2 = \pm \frac{M_2}{h^2} + \frac{N_2}{h}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (7)$$

Динамическая деформационная теория пластичности включается при достижении условия

$$\sigma_i > \sigma_T^D = \sigma_T^{cm} \left[1 - \omega(\varepsilon_i) \right] \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^{1/n} \right] \quad (8)$$

Для билинейного упрочнения

$$\omega(\varepsilon_i) = 1 - \frac{1}{E} \frac{cN\sigma_i}{a\varepsilon_i} \quad (9)$$

Для анализа больших пластических деформаций, учитывающих геометрическую нелинейность, будем использовать волновую теорию с учетом перерезывающих сил и инерции вращения [].

Уравнения цилиндрической оболочки С.М.Тимошенко примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{s\varphi}}{\partial \varphi} &= \rho h \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial N_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{N_\varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial s} \left[N_s \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{N_{s\varphi}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[N_{s\varphi} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{N_\varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] + P(s, \varphi, t) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial \varphi} - Q_s &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \beta_s}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{s\varphi}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - Q_\varphi = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \beta_\varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций при применении деформационной теории прочности берется в форме обобщенного закона Гука:

$$\sigma_s = \frac{E^*}{(1-\nu_*^2)} (\varepsilon_s + \nu_* \varepsilon_\varphi) \quad (11)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E^*}{(1-\nu_*^2)} (\varepsilon_\varphi + \nu_* \varepsilon_s); \quad \sigma_\xi = 0$$

$$\tau_{s\varphi} = G_1^* \gamma_{s\varphi}; \quad \tau_{s\xi} = G_1^* \gamma_{s\xi}; \quad \tau_{\varphi\xi} = G_1^* \gamma_{\varphi\xi};$$

$$\text{где } E^* = \frac{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1+m \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}; \quad \nu_* = \frac{0.5-m \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1+m \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}; \quad G_1^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}; \quad m = \frac{1-2\nu}{3E}$$

$$\sigma_i = [\sigma_s^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_s \sigma_\varphi + 3\tau_{s\xi}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\varepsilon_s - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\xi)^2 + (\varepsilon_\xi - \varepsilon_s)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{s\xi}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\dot{\varepsilon}_s - \dot{\varepsilon}_\varphi)^2 + (\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_\xi)^2 + (\dot{\varepsilon}_\xi - \dot{\varepsilon}_s)^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{s\xi}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Нелинейные геометрические соотношения берем в виде:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \xi \frac{\partial \beta_s}{\partial s}; \quad \gamma_{s\xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \beta_s \right) f(\xi) \quad (13)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2; \quad \gamma_{s\varphi} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \beta_\varphi \right) f(\xi)$$

$$\gamma_{s\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \xi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \beta_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial s} \right);$$

$$f(\xi) = 6 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{\xi}{n} \right)^2 \right)$$

Внутренние усилия выражаются через компоненты тензора напряжений

$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\varphi \\ N_{s\varphi} \\ N_{s\xi} \\ N_{\varphi\xi} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\varphi \\ \gamma_{s\varphi} \\ \gamma_{s\xi} \\ \gamma_{\varphi\xi} \end{Bmatrix} d\xi; \quad \vec{M} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\varphi \\ M_{s\varphi} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{s\varphi} \end{Bmatrix} \xi d\xi \quad (14)$$

Будем считать, что контактное давление приложено по кругу радиуса r_0 .

Подставляя в (10) зависимости (11) – (14), получаем систему интегриродифференциальных уравнений относительно вектора смещений $\vec{v} = \{u_s, u_\varphi, w, \beta_s, \beta_\varphi\}$, с нулевыми начальными условиями при $t=t_1$, когда вектор смещений будет соответствовать заданной большой пластической деформации, например, $\varepsilon_i \approx 0.15$.

Граничные условия $\vec{v} = 0$ при $|r| = r_0 + c_o t$

При $r_0 + c_o t = \pi r$

$$u_s = \beta_s = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial s} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} = 0$$

Это означает, что при применении метода конечных разностей или метода конечных элементов [6] мы будем рассматривать деформирование четверти цилиндрической оболочки.

Используя явную трехслойную разностную схему, проводим рекуррентный счет по формуле

$$\vec{v}_{mn}^{(i+1)} = \vec{v}_{mn}^i + \tau \vec{v}_{mn}^{i-1/2} + \tau^2 F_{mn}^i$$

F_{mn} – правые части обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приведенная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации и условно устойчива, шаг по времени определяется из условия Гриффитса

$$\tau \leq \frac{\gamma^* \Delta S_m r \Delta \varphi_m}{c_0 (\Delta S_m + r \Delta \varphi_m)}, \text{ где } \gamma^* \approx 0.4 - 0.9$$

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую оболочку с параметрами $R = 0,50$ м; $h = 0,01$ м; $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $\sigma_{Тст} = 4,8 \cdot 10^8$ Па; $\lambda = 0,991$; $D = 520$ с-1; $n = 3,8$. Анализу подвергнута зона оболочки $L = 0..2,0$ м; $\varphi = 0..π$. Количество ячеек $26 \times 26 \times 7$. Суммарный импульс ударной нагрузки $J = mV_k = 90,00$ Н·с = 3 кг·3 м/с.

На рис. 1 приведен расчет распределения смещений w в различные ($t^* = 100$; 200; 300; 500 мкс) моменты времени по координате ξ . Видно, что большие перемещения распространяются со скоростью волны изгиба.

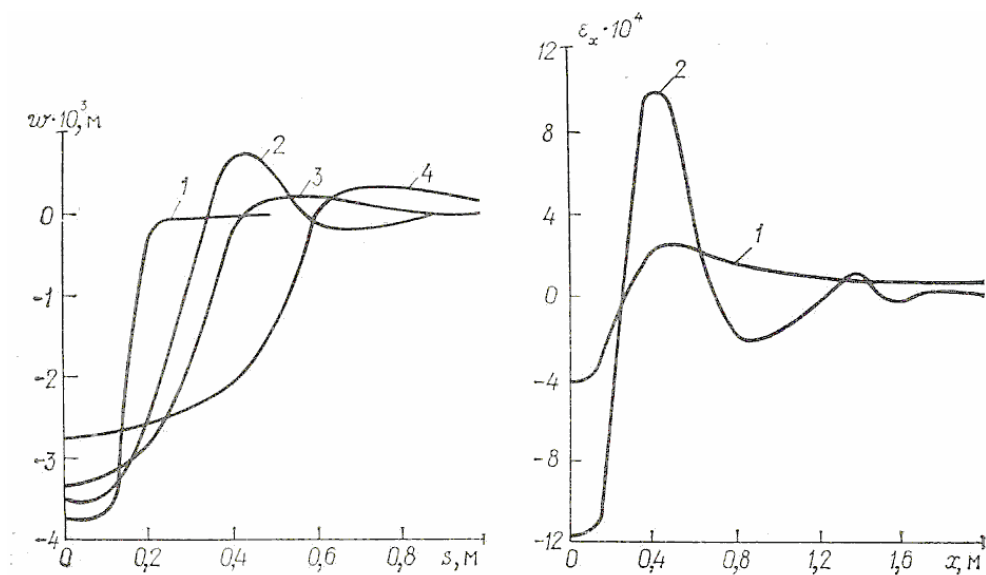


Рис. 1. Распределение смещений в оболочке

На рис. 2 показано распределение интенсивностей деформаций по координатам ξ и φ в момент времени $t = 100$ мкс.

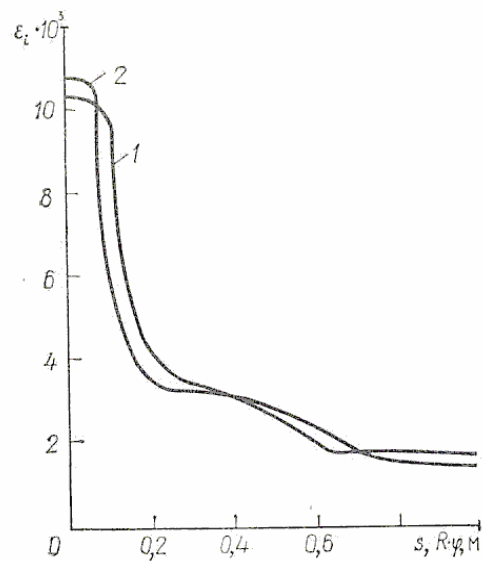


Рис. 2. Распределение интенсивностей деформаций

На рис. 3 приведено разделение деформаций ε_s на изгибные деформации и деформации растяжения-сжатия, распространяющиеся со скоростями $V_{изг} = 2,6 \cdot 10^3$ м/с и $V_0 = 5,2 \cdot 10^3$ м/с. Изгибные деформации локализуются около зоны контакта, а деформации растяжения-сжатия распространяются на достаточно большие расстояния.

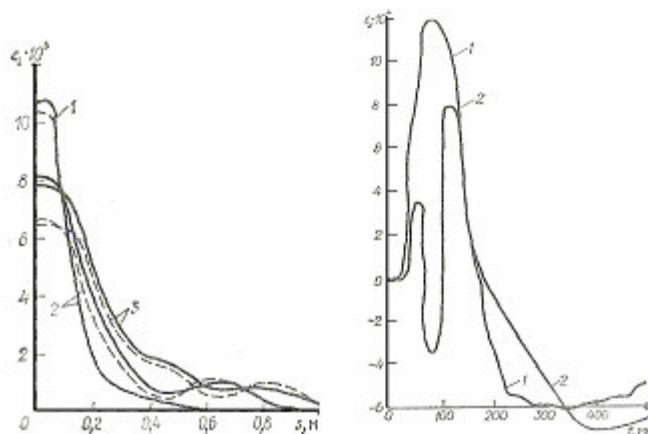


Рис. 3. Движение волны деформации

Выводы.

При скоростном ударе зона локального деформирования в окрестности ударного контакта может сформироваться раньше, чем к ней подойдут волны, отраженные от границ закрепления ударяемого объекта. Этим обосновывается введение в уравнение удара С.П.Тимошенко [1], дополнительного члена – прогиба, являющегося решением временной краевой задачи с подвижными границами жесткого закрепления, действующего в переходный период.

Таким образом, анализ процесса локального формообразования тонкостенной оболочки или пластины при скоростном ударе позволяет составить математическую модель, основанную на уточнении известных уравнений удара типа С.П.Тимошенко и позволяющую использовать разработанные авторами методы исследования больших упруго-пластических деформаций под действием импульсной нагрузки. Это дает реальную картину локального формообразования вплоть до разрушения тонкостенной оболочки или пластины, что и определяет практическую ценность рассмотренной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. — Л.-М.: Машиностроение, 1975. — 439 с.
2. В.Гольдсмит. Удар — М.: Гостройиздат, 1965. — 447 с.
3. Е.Г.Голоскоков, А.П.Филиппов. Нестационарные колебания деформируемых систем. — К.: Наук. думка, 1977. — 339 с.
4. М.П.Галин. Поперечные колебания балок и плит за пределом упругости под действием импульсных и ударных нагрузок. — М.: изд. АН СССР, 1959. — 38 с.
5. Н.Л.Кильчевский. Динамическое контурное сжатие твердых тел. — К.: Наук. думка, 1976. — 319 с.
6. Ю.С.Воробьев, А.В.Колодяжный, В.Н.Севрюков, Е.Г.Янютин. Скоростное деформирование элементов конструкций. — К.: Наук. думка, 1989. — 189 с.