Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.64
№ 775, 2007, с.36-49

Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений

И. В. Бойков, А. И. Бойкова
Пензенский государственный университет, Россия

Offered spline-collocation method for solution of singular integral equations which consist of integrals with hypersingular, singular and logariphmical integrals. Considered hypersingular integral equations of the first and second kind. Given estemates of rapidly of convergence and the error.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Теория сингулярных интегральных уравнений зародилась в начале прошлого века в трудах Д.Гильберта и А. Пуанкаре. Численные методы решения сингулярных интегральных уравнений начали развиваться в тридцатые годы прошлого столетия. Несмотря на почти столетнюю историю этого направления, творческая активность как в развитии теории сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, так и в развитии численных методов их решения продолжает возрастать.

По-видимому, это связано с тем, что методы краевой задачи Римана и сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений продолжают находить все новые и зачастую неожиданные применения. В частности, краевая задача Римана является одним из основных аппаратов в теории солитонов [1].

До недавнего времени исследование сингулярных интегральных уравнений проводилось в трех направлениях: гиперсингулярные интегральные уравнения, собственно сингулярные интегральные уравнения, слабосингулярные интегральные уравнения (в частности, интегральные уравнения с логарифмическими особенностями).

Различные методы приближенного решения слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений изложены в монографиях [2] - [9], в которых также имеется обширная библиография.

В последнее время было показано, что ряд прикладных задач моделируется составными особыми интегральными уравнениями, в состав которых входят гиперсингулярные интегралы, сингулярные интегралы и интегралы с логарифмическими особенностями.

В частности, задачи вычисления входного сопротивления тонкой проволочной антенны [10], [11], задача вычисления электромагнитного поля в коаксиальном кабеле для TM волны [12], [13] были сведены к составному особому интегральному уравнению

$$a\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}+b\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+c\int_{-1}^{1} x(\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau+\int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t), \tag{1.1}$$

где $a,b,c-$ константы, одновременно не равные нулю, $h(t,\tau)\in H_{\alpha\alpha}$, $f(t)\in H_{\alpha}$.

В периодическом случае, т.е. для уравнения

$$\frac{a}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{x(\sigma)d\sigma}{\sin^2\frac{\sigma-s}{2}}+\frac{b}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma+$$

$$+\frac{c}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x(\sigma)\ln\left|\frac{\sigma-s}{2}\right|d\sigma+\int_{0}^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma=f(s) \tag{1.2}$$

в работе [11] исследованы вопросы существования и единственности решения и построен и обоснован приближенный метод. В общем случае численные методы решения уравнения (1.1) не построены.

В связи с необходимостью исследования прикладных задач представляет интерес разработка численных меиодов решения уравнения (1.1).

В данной работе предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод решения уравнения

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+c(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+d(t)\int_{-1}^{1} x(\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau+\int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t), \tag{1.3}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$, $(h,\tau)-$ непрерывные функции, гладкость которых будет определена ниже.

Наряду с уравнением (1.3) в работе рассматривается полное составное уравнение

$$a(t)x(t)+\int_{-1}^{1}\frac{h_1(t,\tau)x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+\int_{-1}^{1}\frac{h_2(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\int_{-1}^{1} h_2(t,\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau=f(t). \tag{1.4}$$

Помимо непосредственного решения прикладных задач имеется еще одно обстоятельство, обусловливающее актуальность разработки численных методов решения уравнений (1.3), (1.4).

Большинство известных методов приближенного решения слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений применимо к уравнениям на окружности или сегменте. При решении практических задач требуются методы применимые к уравнениям, определенным на произвольных кусочно-гладких контурах. Такой метод для составных особых интегральных уравнений излагается ниже. Из его обоснования следует, что он применим к гиперсинулярным интегральным уравнениям первого и второго рода. Он также применим к сингулярным и слабосингулярным интегральным уравнениям первого рода при ряде дополнительных условий.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\int_L \frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L. \tag{1.5}$$

Пусть функции $h(t,\tau)$ и $f(t)$ непрерывно дифференцируемы.

Дифференцируя это уравнение по t, приходим к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\int_L \frac{h_t'(t,\tau)x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = f'(t). \tag{1.6}$$

Каждое решение уравнения (1.5) является решением уравнения (1.6). Однако, при переходе от уравнения (1.5) к уравнению (1.6) могут возникнуть новые решения. Поэтому полученные решения уравнения (1.6) нуждаются в дополнительной проверке.

Особенно привлекателен переход к гиперсингулярным интегральным уравнениям в случае слабосингулярных интегральных уравнений первого рода, которые, как известно, являются некорректными и требуют регуляризации. При данном подходе требуется регуляризация при вычислении производной, что является (особенно при замене правой части полиномом или сплайном) технически более простой задачей.

2. Метод исследования.

В работе строится и обосновывается сплайн-коллокационный метод решения составного особого интегрального уравнения. Метод является развитием результатов работы автора [9] и опирается на известную теорему Адамара об обратимости матриц с диагональным преобладанием. [14]

3. Сплайн-коллокационный метод решения особых составных уравнений.

В этом параграфе исследуется сплайн-коллокационный метод решения уравнения

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{p}}+c(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}+d(t)\int_{-1}^{1}x(\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau+$$

$$+\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t), \tag{3.1}$$

где $p=2,3,\ldots$.

Вначале рассмотрим случай, когда функция $b(t)\neq 0$ при $t\in[-1,1]$ и $p-$ четное число.

Пусть $N-$ целое число. Введем узлы $t_k=-1+2k/N,\ k=0,1,\ldots,N,$ и $\bar t_k=t_k+1/N,\ k=0,1,\ldots,N-1$.

Покроем сегмент $[-1,1]$ более мелкими сегментами $\Delta_k=[t_k,t_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\psi_k(t), \tag{3.2}$$

где $\psi_k(t)=1$ при $t\in\Delta_k$ и $\psi_k(t)=0$ при $t\in[-1,1]\setminus\Delta_k$.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar t_k)\alpha_k+b(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}{}'\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_k)^{p}}+$$

$$+c(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{\tau-\bar t_k}+d(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\ln|\tau-\bar t_k|\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l h(\bar t_k,\bar t_l)=f(\bar t_k),\quad k=0,1,\ldots,N-1, \tag{3.3}$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k\neq l-1,l+1$.

В предположении, что $|b(t)|\geq b>0$ докажем однозначную разрешимость системы уравнений (3.3). При этом отметим, что никаких условий на гладкость функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$, $h(t,\tau)$ не налагается. Доказательство разрешимости системы уравнений (3.3) проведем, используя теорему Адамара [14] об однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений.

Оценим снизу модуль диагональных элементов матрицы системы (3.3), которую обозначим через $M=\{m_{kl}\}$, $k,l=0,1,\ldots,N-1$. Очевидно,

$$|m_{ll}|=\left|a(\bar{t}_l)+b(\bar{t}_l)\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_l)^p}+c(\bar{t}_l)\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{\tau-\bar{t}_l}+\right.$$

$$\left.+d(\bar{t}_l)\int\limits_{\Delta_l}\ln|\tau-\bar{t}_l|\,d\tau+\frac{2}{N}h(\bar{t}_l,\bar{t}_l)\right|\geq$$

$$\geq|b(\bar{t}_l)|\left|\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_l)^p}\right|-|a(\bar{t}_l)|-|c(\bar{t}_l)|\left|\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{\tau-\bar{t}_l}\right|-$$

$$-|d(\bar{t}_l)|\left|\int\limits_{\Delta_l}\ln|\tau-\bar{t}_l|\,d\tau\right|-\frac{2}{N}\left|h(\bar{t}_l,\bar{t}_l)\right|. \quad (3.4)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части неравенства (3.4) в отдельности:

$$\left|\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_l)^p}\right|\geq\frac{2N^{p-1}-2}{p-1},$$

$$\left|\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{\tau-\bar{t}_l}\right|=0,$$

$$\left|\int\limits_{\Delta_l}\ln|\tau-\bar{t}_l|\,d\tau\right|\leq\frac{2}{N}\ln N.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
|m_{ll}| \geq |b(\bar{t}_l)| \frac{2N^{p-1}-2}{p-1} - |a(\bar{t}_l)| - \\
- d(\bar{t}_l)\frac{2}{N}\ln N - \frac{2}{N} h(\bar{t}_l,\bar{t}_l).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Оценим сверху сумму модулей внеинтегральных слагаемых. Очевидно,

$$
\sum_{l=0,l\neq k}^{N-1} |c_{kl}| \leq |b(\bar{t}_k)| \sum_{l=0,l\neq k-1,k,k+1}^{N-1} \left| \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p} \right| +
$$

$$
+|c(\bar{t}_k)| \sum_{l=0,l\neq k}^{N-1} \left| \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{\tau-\bar{t}_k} \right| +
$$

$$
+|d(\bar{t}_k)| \sum_{l=0,l\neq k}^{N-1} \left| \int_{\Delta_l} \ln|\tau-\bar{t}_k|\,d\tau \right| + \frac{2}{N} h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)| \leq
$$

$$
\begin{aligned}
\leq |b(\bar{t}_k)| \frac{2N^{p-1}}{(p-1)3^{p-1}} + |c(\bar{t}_k)|\, 2\ln N + \\
+|d(\bar{t}_k)|\, 2\frac{\ln N}{N} + \frac{2}{N}|h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)|.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Из сопоставления неравенств (3.5) и (3.6) следует, что при достаточно больших N, выполнены условия теоремы Адамара и система уравнений (3.3) однозначно разрешима.

Оценим близость решения $x^*(t)$ уравнения (3.1) и $x_N^*(t)$ системы уравнений (3.3) в метрике пространства R_N с нормой $\|x\| = \max_k |x_k|$, $x = (x_1,\ldots,x_N)$.

Приравняв обе части уравнения (3.1) в точках $\bar{t}_k$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, имеем

$$
a(\bar{t}_k)x^*(\bar{t}_k) + b(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1} \int_{\Delta_l} \frac{x^*(\tau)}{(\tau-\bar{t}_k)^p} d\tau +
$$

$$+d(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta_l}\frac{x^*(\tau)}{\tau-\bar t_k}d\tau+$$

$$+c(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta_l}x^*(\tau)\ln|\tau-\bar t_k|\,d\tau+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta_l}h(\bar t_k,\tau)x^*(\tau)d\tau=f(\bar t_k),\quad k=0,1,\dots,N-1. \qquad (3.7)$$

Вычитая из (3.7) уравнения (3.3), приходим к системе уравнений

$$a(\bar t_k)(x^*(\bar t_k)-x_N(\bar t_k))+b(\bar t_k){\sum_{l=0}^{N-1}}'(x^*(\bar t_l)-x_N^*(\bar t_l))\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau)}{(\tau-\bar t_k)^p}+$$

$$+c(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}(x^*(\bar t_l)-x_N^*(\bar t_l))\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{\tau-\bar t_k}+$$

$$+d(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}(x^*(\bar t_l)-x_N^*(\bar t_l))\int\limits_{\Delta_l}\ln|\tau-\bar t_l|\,d\tau+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta_l}(h(\bar t_k,\tau)x^*(\tau)-h(\bar t_k,\bar t_l)x_N^*(\tau))d\tau=g_k(t)=$$

$$=b(\bar t_k){\sum_{l=0}^{N-1}}'\int\limits_{\Delta_l}\frac{x^*(\tau)-x^*(\bar t_l)}{(\tau-\bar t_k)^p}d\tau+$$

$$+b(\bar t_k)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{x^*(\tau)d\tau}{(\tau-\bar t_k)^p}+b(\bar t_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+2}}\frac{x^*(\tau)d\tau}{(\tau-\bar t_k)^p}+$$

$$+c(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\Delta_l}\frac{x^*(\tau)-x^*(\bar{t}_l)}{\tau-\bar{t}_k}d\tau+$$

$$+d(\bar{t}_k)\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\Delta_l}(x^*(\tau)-x^*(\bar{t}_l))\ln|\tau-\bar{t}_k|\,d\tau+$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}\int_{\Delta_l}(h(\bar{t}_k,\tau)x^*(\tau)-h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)x^*(\bar{t}_l))d\tau \qquad k=0,1,\ldots,N-1.$$

Отсюда

$$\|Z_N\|\le\left\|M^{-1}\right\|\|G_N\|,$$

где

$$Z_N=(x^*(\bar{t}_0)-x_N^*(\bar{t}_0),\ldots,x^*(\bar{t}_{N-1})-x_N^*(\bar{t}_{N-1})),$$

$$G_N=(g_0,\ldots,g_{N-1}).$$

Оценим $\|G_N\|$. Очевидно, $|g_k|\le AN^{p-2}$.

Оценим $\left\|M^{-1}\right\|$. Так как $M-$ матрица с диагональным преобладанием, то воспользовавшись теоремой Банаха об обратном операторе и оценкой (3.5) диагональных элементов матрицы M, получаем оценку $\left\|M^{-1}\right\|\le AN^{-p+1}$.

Следовательно,

$$\max_k|x^*(\bar{t}_k)-x_N^*(\bar{t}_k)|\le AN^{-1}.$$

Эта оценка неулучшаема, т.к. непрерывно дифференцируемая функция $x^*(t)$ не может быть приближена кусочно-постоянной функцией $x_N^*(t)$ с точностью большей, чем $O(N^{-1})$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть выполнены следующие условия: 1) уравнение (3.1) имеет единственное непрерывно-дифференцируемое до $p-1$ порядка решение $x^*(t)$; 2) справедливо неравенство $|b(t)|\ge b>0$ при $t\in(-1,1)$. 3) функция $h(t,\tau)$ удовлетворяет условию Липшица по второй переменной. Тогда при достаточно больших N система уравнений (3.3) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и в метрике пространства R_N справедлива оценка

$$\left\| x^* - x_N^* \right\| \asymp N^{-1}$$

Замечания.

1. Предложенный метод легко распространяется на составные уравнения вида

$$a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{\lambda_1}} + c(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{\lambda_2}} +$$

$$+ d(t)\int_{-1}^{1} x(\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 -$ вещественные числа, $\lambda_1 > 1,\ 0 \le \lambda_2 < 1$.

2. Изложенный выше метод решения составных особых уравнений применим к уравнениям на кусочно-непрерывных контурах и на контурах, состоящих из конечного числа кусочно-непрерывных кривых. При этом, очевидно, точки, в которых касательные к кривым имеют скачок, необходимо включить в число концов сегментов Δ_k, $k = 0,1,\ldots,N-1,$ образующих покрытие контуров, на которых определенно исходное уравнение.

Кроме того, возможны некоторые изменения в вычислительной схеме, которые изложим на примере уравнения

$$\int_l \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = f(t), \tag{3.8}$$

где $l -$ гладкий разомкнутый контур длиной L с начальными точками a и b. Покроем контур l дугами $d_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 0,1,\ldots,N-1,\ t_0 = a,$ $t_N = b,$ равной длины. Так как подобное покрытие на практике трудно осуществить, то потребуем, чтобы хорды соединяющие точки t_k и t_{k+1} были бы равной длины. Обозначим через t_k, $k = 0,1,\ldots,N-1,$ точки у которых или длины дуг (t_k, t_k') и (t_k', t_{k+1}) или длины хорд t_k, t_k' и t_k', t_{k+1} были бы равны.

Решение уравнения (3.8) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)=1$ при $t\in(t_k,t_{k+1})$, $\psi_k(t)=0$ при $t\in l\setminus(t_k,t_{k+1})$. Коэффициенты α_k, $k=0,1,\dots,N-1$, находятся из системы уравнений

$$\sum_{l=0}^{k-v(k)}\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_k)^p}+\alpha_k\int_{\Delta_k}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_k)^p}+$$

$$+\sum_{l=k+w(k)}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar t_k)^p}=f(\bar t_k),\quad k=0,1,\dots,N-1,$$

где $v(k)$, $w(k)$ подбираются так, чтобы критерий Адамара выполнялся.

3. Остановимся на случае, когда функция $b(t)$ в уравнении (3.1) может обращаться в нуль.

Здесь следует рассмотреть три возможности: 1) функция $b(t)=0$ при всех $t\in[-1,1]$, 2) функция $b(t)$ обращается в нуль на некотором многообразии с мерой большей нуля (например, на сегменте), 3) функция $b(t)$ обращается в нуль в конечном множестве точек.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

В первом случае получаем сингулярное интегральное уравнение, сплайн-коллокационные методы решения которого исследованы в [9].

Если при этом $a(t)\equiv 0$, то возможно сведение полученного сингулярного уравнения к гиперсингулярному.

В самом деле, если $x^*(t)-$ решение уравнения (3.1), то эта же функция будет решением гиперсингулярного уравнения, полученного дифференцированием уравнения (3.1) по переменной t. Полученное гиперсингулярное интегральное уравнение будем решать описанным выше методом. Получим в результате приближенное решение $x_N^*(t)$. При этом необходимо проверить, соответствует ли полученное решение исходному уравнению, т.к. вопрос эквивалентности исходного и продифференцированного уравнений не исследован.

Для того, чтобы убедиться, что полученное решение соответствует исходному уравнению, достаточно подставить полученное решение в систему уравнений

$$c(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\frac{d\tau}{\tau-\bar t_k}+d(\bar t_k)\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l\int_{\Delta_l}\ln|\tau-\bar t_k|\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\alpha_l h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)=f(\bar{t}_k),\quad k=0,1,\ldots,N-1.$$

Во-втором случае, когда функция $b(t)$ обращается в нуль на сегменте $[\alpha,\beta]\subset[-1,1]$, на этом сегменте с исходным уравнением проделываются операции, аналогичные описанным выше.

В третьем случае естественно взять неравномерную сетку узлов коллокации, в которую не входят точки, в которых $b(t)=0$. В случае, если этого оказывается недостаточно для выполнения критерия Адамара, можно ряд уравнений входящих в систему (3.3), у которых коэффициенты $b(\bar{t}_k)$ достаточно малы, заменить, как и во втором случае, уравнениями с более высоким порядком сингулярности. Естественно, что полученное при этом приближенное решение нуждается в дополнительной проверке.

4. Изложенный метод применим к сингулярным интегральным уравнениям первого рода

$$\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{\tau-t}dt+\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t)$$

и к уравнениям первого рода с логарифмической особенностью

$$\int_{-1}^{1}x(\tau)\ln|\tau-t|\,d\tau+\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t).$$

Для этого сингулярное интегральное уравнение следует продифференцировать один раз, а уравнение с логарифмической особенностью - два раза.

Если функции $h(t,\tau)$ и $f(t)$ не имеют соответствующих производных, то их можно предварительно аппроксимировать по переменной t полиномами или сплайнами.

4. Сплайн-коллокационный метод решения полного гиперсингулярного интегрального уравнения.

Рассмотрим составное особое уравнение (1.5). Из предыдущих рассуждений было видно, что сходимость предлагаемого сплайн-коллокационного метода, в первую очередь, зависит от гиперсингулярного интеграла. Поэтому для простоты обозначений ограничимся рассмотрением гиперсингулярного интегрального уравнения

$$a(t)x(t)+\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}=f(t).\tag{4.1}$$

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (4.2), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_k)\alpha_k + h(\bar{t}_k,\bar{t}_k)\int\limits_{\Delta_k}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p} +$$

$$+\sum_{l=0}^{N-1}{}' h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)\alpha_l\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p} = f(\bar{t}_k), \quad k=0,1,\dots,N-1, \quad (4.2)$$

где $\sum'$ означает суммирование по $l \neq k-1, k+1$.

Для доказательства разрешимости системы уравнений (4.2) воспользуемся, как и выше, теоремой Адамара.

В разделе 3 было показано, что

$$\left|\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_l)^p}\right| = \frac{2N^{p-1}}{p-1},$$

$$\sum_{l=0}^{N-1}{}' |h(\bar{t}_k,\bar{t}_l)|\left|\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\tau}{(\tau-\bar{t}_k)^p}\right| \le H^*\frac{2N^{p-1}}{(p+1)3^{p-1}}.$$

Из последних двух неравенств следует, при достаточно больших N, однозначная разрешимость системы уравнений (4.2). Оценка точности приближенного решения оценивается точно также, как в разделе 3.

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия: 1) уравнение (4.1) имеет единственное решение $x^*(t)$, имеющее производные до $p-1$ порядка;

2) справедливы неравенства $\min\limits_t |h(t,t)| \ge H_* > 0$, $\max\limits_t |h(t,t)| \le H^* < \infty$. Тогда при достаточно больших N система уравнения (4.2) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и справедлива оценка

$$\left\|x^*(t) - x_N^*(t)\right\|_C \asymp N^{-1}$$

где $x^*(t)$ – решение уравнения (4.1).

Решение численных примеров показало высокую эффективность предложенного в работе метода.

5. Выводы.

В статье предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод решения составных особых интегральных уравнений, в состав которых входят гиперсингулярные интегралы. Отличие предложенного метода от известных заключается в следующем:

1) метод применим к уравнениям с переменными коэффициентами,

2) метод применим к уравнениям на кусочно-гладких контурах. Он легко распространяются на уравнения, заданные на конечном числе контуров,

3) метод применим к полным гиперсингулярным интегральным уравнениям.

Основным недостатком метода является невысокая точность, равная $o(N^{-1})$, где $N-$ число узлов сплайна. Это обусловлено тем, что приближенное решение ищется в виде сплайна нулевого порядка. Предполагается в следующих работах построить сплайн-коллокационный метод со сплайнами более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука. 1986.-528 с.
2. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1968. - 287 с.
3. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
4. Бойков И.В. Оптимальные методы вычислений в задачах автоматического регулирования. Пенза, ППИ,1983. 96 с.
5. Michlin S.G., Prossdorf S. Singulare Integraloperatoren. - Berlin, Acad. - Verl., 1980, 514 s.
6. Prossdorf S., Silbermann B. Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations.- Berlin.: Acad. Verl. 1991. 544 p.
7. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус» 1995. 520с.
8. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К. 2001. 508 с.
9. Бойков И.В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. - Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета. 2004. 316 с.
10. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн// Дифференциальные уравнения. 2005., Т. 41, N 1, с. 121-137.
11. Лифанов И.К. К решению составных особых интегральных уравнений // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. N 8. С. 62 - 67.

12. Гандель Ю. В., Кононенко А.С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2006., Т. 42, N 9. С.1256-1262.
13. Гандель Ю. В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов// Журнал технической физики. 2004. Т. 74, вып. 7. С. 81 - 89.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1963. - 640 с.