

Скалярная третья краевая задача математической теории дифракции на плоском экране и ее дискретная математическая модель

В. С. Булыгин

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The problem of acoustic wave diffraction on a plane finite screen with mixed boundary conditions is reduced to two coupled integral equations, the solution of which is equivalent to Fredholm equation of the second kind and hyper-singular equation solution. Derived by numerical discrete rotor method results are given for infinitely far located source field.

1. Введение

В настоящей работе демонстрируются вычислительные возможности метода дискретных вихрей (МДВ) [1,2] на примере третьей краевой задачи математической теории дифракции на плоском экране. Указанный метод является специальным численным методом решения сингулярных интегральных уравнений удобным для решения конкретных прикладных задач. Особенно это относится к задачам аэродинамики, в недрах которых в работах С. М. Белоцерковского в 1950 – е годы эти методы и зародились [3,4].

Однако оказалось, что аналогичные методы хорошо работают и в задачах электродинамики, где их удобно интерпретировать как дискретные токи, и в задачах теории упругости, где их удобно интерпретировать как дискретные сосредоточенные силы.

В статье рассматривается задача дифракции акустических волн на плоском экране, которая сводится к внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца. К аналогичной краевой задаче сводится задача дифракции электромагнитных волн на плоском экране, рассмотренная, например, в статье [5].

Метод данной работы относится к классу «методов дискретных особенностей» для которых в настоящее время характерна тенденция к сведению эллиптических краевых задач к гиперсингулярным интегральным уравнениям (ГСИУ) с последующим построением на базе этих уравнений дискретных моделей по принципу коллокаций [6]

Впервые этот подход – сведение парных интегральных уравнений двумерной или трехмерной задачи к гиперсингулярным интегральным уравнениям был сформулирован и применен в [7].

2. Актуальность темы. Цели работы.

Цели данной работы - найти выражение для рассеянного от плоского экрана поля и для поля в дальней зоне, предложить численный метод решения задачи и сравнить полученные результаты с результатами численного эксперимента для двумерной задачи, основанного на работе [8]. Для этого задача сводится к двум парным интегральным уравнениям. Показывается их эквивалентность двум

интегральным уравнениям: Фредгольма второго рода и гиперсингулярному. Численно интегральные уравнения решаются методом дискретных вихрей, после чего даются формулы для приближенных значений рассеянного поля и поля в дальней зоне.

Для идеально жесткого экрана (на котором выполняются краевые условия второго рода задача дифракции акустической волны на плоском экране была рассмотрена в работе [9]). Но в некоторых прикладных задачах экран нельзя считать идеально жестким, и приходится рассматривать краевую задачу с условиями третьего рода.

Актуальность настоящей работы заключается в рассмотрении более широкого класса

экранов, на которых выполняются условия третьего рода, частными случаями которых являются идеально жесткие и идеально мягкие экраны.

3. Математическая постановка задачи.

Рассматривается задача дифракции акустической волны на плоском экране в стационарном звуковом поле. Зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$. Акустическое поле характеризуется потенциалом скоростей $U_1(x,t) = u_1(x)e^{-i\omega t}$. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Экран $\mathcal{E} \subset \{x \in R^3 \mid x_3 = 0\}$. На экране выполняются граничные условия третьего рода: $\frac{\partial U(x)}{\partial \nu} + \alpha U(x) = 0$, где $\alpha - const$, ν – единичная нормаль к экрану \mathcal{E} . Представим потенциал $U_1(x,t)$ в виде суммы потенциалов падающей $U_0(x,t) = u_0(x)e^{-i\omega t}$ и рассеянной $U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$ волн. Задача сводится к нахождению комплексной амплитуды $u(x)$ потенциала рассеянной волны, для которого имеем следующую внешнюю краевую задачу [10]:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad , \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad x \in R^3 \setminus \mathcal{E} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \alpha u(x) = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} - \alpha u_0(x) \quad , \quad x \in \mathcal{E} \quad (2)$$

где a - скорость звука в среде, ω - круговая частота, условие излучения Зоммерфельда:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku(x) = o(|x|^{-1}), \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (3)$$

в окрестности ребер экрана должны выполняться условия Майкснера, которые мы запишем в интегральной форме:

$$\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\text{grad } u(x)|^2) dx < \infty \quad , \quad \text{где } \Omega \subset R^3 / \mathcal{E} \quad (4)$$

4. Нахождение комплексной амплитуды и поля в дальней зоне.

Введем обозначения: $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{x} = (x_1, x_2)$

Обозначим $u^+(x) = u(x), x_3 > 0$; $u^-(x) = u(x), x_3 < 0$ - сужения функции $u(x)$ соответственно на верхнее и нижнее полупространства.

Будем искать их в виде :

$$u^\pm(\tilde{x}, x_3) = \int_{R^2} C^\pm(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x}) \mp \gamma(\lambda)x_3} d\lambda \quad (5)$$

Так выбранные функции $u^+(x)$ и $u^-(x)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1) и условию излучения (3) соответственно на нижнем и верхнем полупространствах.

Здесь $\gamma(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k^2}$, а в соответствии с условием излучения ветвь радикала выбирается таким образом, чтобы $\operatorname{Re} \gamma(\lambda) \geq 0$, а $\operatorname{Im} \gamma(\lambda) \leq 0$.

Используя (2) выпишем граничные условия для сужений $u^+(x)$ и $u^-(x)$:

$$\alpha u^+(x) + \frac{\partial u^+(x)}{\partial x_3} = f(x), \quad x \in \mathcal{E}, \quad (2')$$

$$\alpha u^-(x) - \frac{\partial u^-(x)}{\partial x_3} = g(x), \quad x \in \mathcal{E}, \quad (2'')$$

где введены обозначения:

$$f(x) = -\alpha u_0(\tilde{x}, 0) - \frac{\partial u_0(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3}, \quad g(x) = -\alpha u_0(\tilde{x}, 0) + \frac{\partial u_0(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3},$$

Вне экрана в плоскости $x_3 = 0$ выполняются условия сопряжения:

$$u^+(\tilde{x}) = u^-(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \notin \mathcal{E} \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u^+(x)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \left. \frac{\partial u^-(x)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \quad \tilde{x} \notin \mathcal{E} \quad (7)$$

Запишем условия (2') и (2''), используя представление (5):

$$\alpha \int_{R^2} C^+(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} - \int_{R^2} C^+(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f(x) \quad (8)$$

$$\alpha \int_{R^2} C^-(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda - \int_{R^2} C^-(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = g(x) \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$C_1(\lambda) = \gamma(\lambda)(C^-(\lambda) + C^+(\lambda)); \quad C_2(\lambda) = C^+(\lambda) - C^-(\lambda) \quad (10)$$

$$v(\tilde{x}) = \frac{\partial u^-(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3} - \frac{\partial u^+(\tilde{x}, 0)}{\partial x_3}; \quad w(\tilde{x}) = u^+(\tilde{x}, 0) - u^-(\tilde{x}, 0); \quad (11)$$

Из граничных условий (8) и (9) с учетом обозначений (10) и (11) получим два парных интегральных уравнения:

Первое парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} v(\tilde{x}) = \int_{R^2} C_1(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = 0, & \tilde{x} \notin \mathfrak{D} \\ a \int_{R^2} \frac{1}{\gamma(\lambda)} C_1(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda + \int_{R^2} C_1(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathfrak{D} \end{cases}$$

Второе парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} w(\tilde{x}) = \int_{R^2} C_2(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = 0, & \tilde{x} \notin \mathfrak{D} \\ - \int_{R^2} \gamma(\lambda) C_2(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda + a \int_{R^2} C_2(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda = f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathfrak{D} \end{cases}$$

Используя следующие тождества:

$$-\gamma(\lambda) = -|\lambda| + \frac{k^2}{2} \frac{1}{|\lambda|} + \frac{k^4}{2} \frac{1}{(\gamma(\lambda) + |\lambda|)^2 |\lambda|}$$

$$\frac{1}{\gamma(\lambda)} = \frac{1}{|\lambda|} + \frac{k^2}{2} \frac{1}{(\gamma(\lambda) + |\lambda|) \gamma(\lambda) |\lambda|}$$

а также то, что $-|\lambda|$ - символ псевдодифференциального оператора [6]

$$(A\tilde{u})(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\tilde{u}(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|^3} d\xi$$

а $\frac{1}{|\lambda|}$ - символ псевдодифференциального оператора [6]

$$(A\tilde{u})(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\tilde{u}(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi$$

из первого и второго парных интегральных уравнений получим два интегральных уравнения для неизвестных $w(\tilde{x})$ и $v(\tilde{x})$:

Фредгольма второго рода:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{v(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi + \frac{\alpha k^2}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{D}} K_1(\xi - \tilde{x}) v(\xi) d\xi - v(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathfrak{D} \quad (12)$$

и гиперсингулярное:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{w(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{w(\xi)}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi + \frac{k^4}{8\pi^2} \int_{\mathfrak{D}} K_2(\xi - \tilde{x}) w(\xi) d\xi + \alpha w(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathfrak{D} \quad (13)$$

Гладкие функции $K_1(\zeta)$ и $K_2(\zeta)$ находятся с помощью представлений

$$C_1(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{D}} v(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi \quad (14)$$

$$C_2(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathfrak{D}} w(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi \quad (15)$$

и интегрального представления функции Бесселя нулевого порядка [11]:

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it \sin \theta} d\theta$$

$$K_1(\zeta) = 2\pi |\zeta| \int_0^{\infty} \frac{J_0(t)}{(t + \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2}) \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2}} dt$$

$$K_2(\zeta) = 2\pi |\zeta| \int_0^{\infty} \frac{J_0(t)}{(t + \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2})^2} dt$$

Потенциал $u(x)$, $x \in R^3$ выражается через решения уравнений (12) и (13).

Используя (10) и (11) находим :

$$C^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\gamma(\lambda)} \int_{R^2} v(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi \pm \int_{R^2} w(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi \right] \quad (16)$$

Подставляя (16) в выражение (5) для $u^{\pm}(x)$, $x \in R^3$, находим :

$$u^{\pm}(\tilde{x}, x_3) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\mathfrak{S}} Q_1(\xi - \tilde{x}, x_3) v(\xi) d\xi \pm \int_{\mathfrak{S}} Q_2(\xi - \tilde{x}, x_3) w(\xi) d\xi \right] \quad (17)$$

где

$$Q_1(\zeta, x_3) = \frac{e^{ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2}}}{(|\zeta|^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Q_2(\zeta, x_3) = \frac{e^{ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2}}}{(|\zeta|^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - ik\sqrt{|\zeta|^2 + x_3^2} \right) x_3$$

Из представления (17) для $u(x)$ получим выражение для поля в дальней зоне:

$$u^{\pm}(x) \approx F^{\pm}(\theta, \varphi) \frac{e^{ik|x|}}{|x|},$$

$$F^{\pm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} (-ik) e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} \cos \theta \cdot w(\xi) d\xi$$

$$\pm \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} v(\xi) d\xi \quad (18)$$

где (θ, φ) - точка на единичной сфере в сферической системе координат:

$$\begin{cases} x_1 = r \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cdot \cos \theta \end{cases}$$

5. Дискретная математическая модель и численный эксперимент.

Действуя так, как предписывает МДВ (см. [6]) , для построения дискретной математической модели заменяем экран Э системой замкнутых вихревых

рамок $\mathcal{E} = \bigcap_{p=0}^{N-1} \sigma_p$. Точку пересечения диагоналей прямоугольника σ_p обозначим x_p^0 . Ищем $v(\tilde{x})$ и $w(\tilde{x})$ в виде кусочно-постоянных функций на экране \mathcal{E} $v_N(\tilde{x})$ и $w_N(\tilde{x})$, принимающих на ячейке σ_p значения $v(x_p^0)$ и $w(x_p^0)$ соответственно.

Далее рассмотрим дискретную математическую модель уравнений (12), (13):

$$\sum_{q=0}^{N-1} w_N(x_q^0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|} d\xi + \frac{k^4}{8\pi^2} \int_{\sigma_q} K_2(\xi - x_p^0) d\xi \right) + \alpha w(x_p^0) = f(x_p^0) - g(x_p^0), \quad p = 0..N-1 \quad (19)$$

$$\sum_{q=0}^{N-1} v_N(x_q^0) \left(\frac{\alpha}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{\alpha k^2}{4\pi^2} \int_{\sigma_q} K_1(\xi - x_p^0) d\xi \right) - v(x_p^0) = f(x_p^0) + g(x_p^0), \quad p = 0..N-1 \quad (20)$$

относительно неизвестных $v_N(x_p^0)$ и $w_N(x_p^0)$, $q = 0..N-1$.

Уравнения (19), (20) представляют собой две системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): $Aw = f_1$ и $Aw = f_2$, где $A = \{a_{p,q}\}_{p,q=0}^{N-1}$

$$B = \{b_{p,q}\}_{p,q=0}^{N-1},$$

$$a_{p,q} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|} d\xi + \frac{k^4}{8\pi^2} \int_{\sigma_q} K_2(\xi - x_p^0) d\xi \right) + \alpha \cdot \delta(p,q)$$

$$b_{p,q} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{\alpha k^2}{4\pi^2} \int_{\sigma_q} K_1(\xi - x_p^0) d\xi \right) - \delta(p,q)$$

$$\text{Здесь } \delta(p,q) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = q \\ 0, & \text{если } p \neq q \end{cases}$$

Решая полученную СЛАУ, находим приближенные значения $v(x_1, x_2) - v_N(x_q^0)$ $w(x_1, x_2) - w_N(x_q^0)$.

Используя формулы (17) и (18) запишем приближенные значения потенциала:

$$u^\pm(\tilde{x}, x_3) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} \left[v(x_p^0) \int_{\sigma_p} Q_1(\xi - \tilde{x}, x_3) d\xi \pm w(x_p^0) \int_{\sigma_p} Q_2(\xi - \tilde{x}, x_3) d\xi \right] \quad (21)$$

и диаграммы направленности :

$$\begin{aligned}
 F^{\pm}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} v(x_p^0) \int_{\sigma_p} (-ik) e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} \cos \theta d\xi \\
 &\pm \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} w(x_p^0) \int_{\sigma_p} e^{-ik(\xi_1 \sin \theta \cos \varphi, \xi_2 \sin \theta \sin \varphi)} d\xi
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Был проведен численный эксперимент. Рассматриваемая задача решалась для квадратного экрана $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1], x_3 = 0\}$ в случае падающей плоской монохроматической волны с комплексной амплитудой $u_0 = e^{ikx_3}$ при различных значениях волнового числа k и параметра α . Квадратный экран разбивался $n \times n$ рамок и решались СЛАУ (18) и (19), после чего приближенно вычислялась диаграмма направленности по формуле (22). На рисунках изображены модули вещественной части (МВЧ) диаграммы направленности $|\operatorname{Re} F^+(\theta, \varphi)|$ и $|\operatorname{Re} F^-(\theta, \varphi)|$ в плоскости $\varphi = 0$. Экран расположен вертикально.

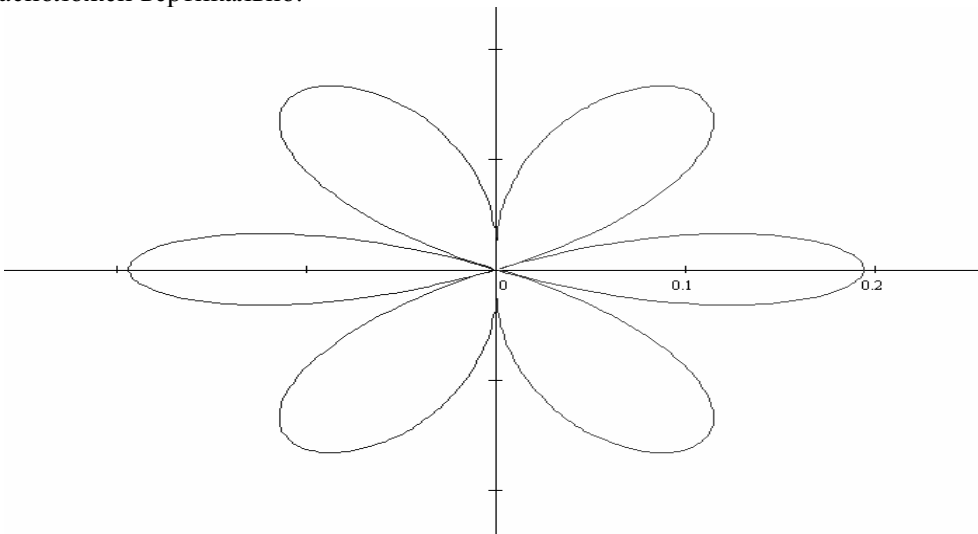


Рис.1. МВЧ диаграммы направленности для квадратного экрана $k = 3, n = 31, \alpha = 1$

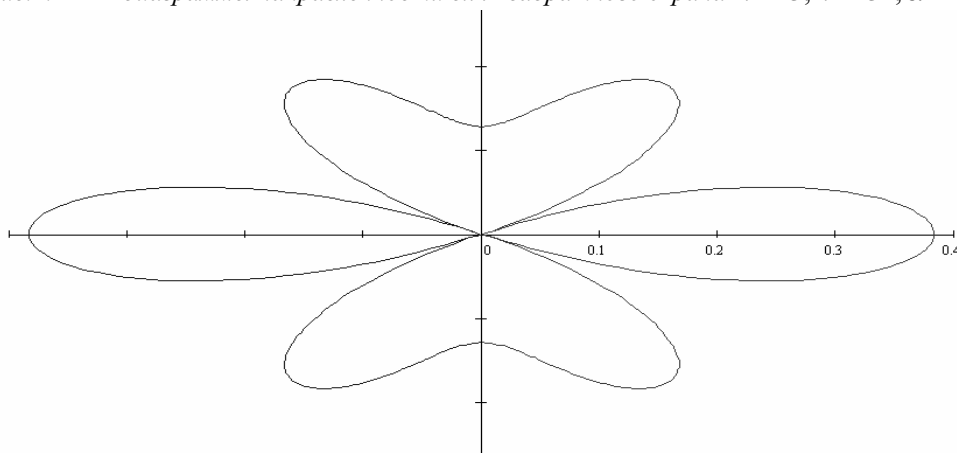


Рис.2. МВЧ диаграммы направленности для квадратного экрана $k = 5, n = 31, \alpha = 1$

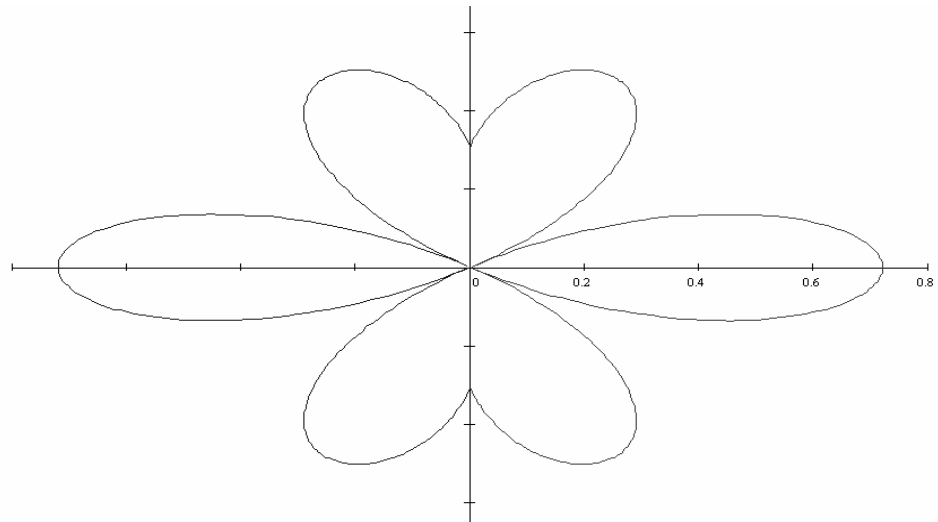


Рис 3. МВЧ диаграммы направленности для квадратного экрана $k = 3, n = 31, \alpha = 2$

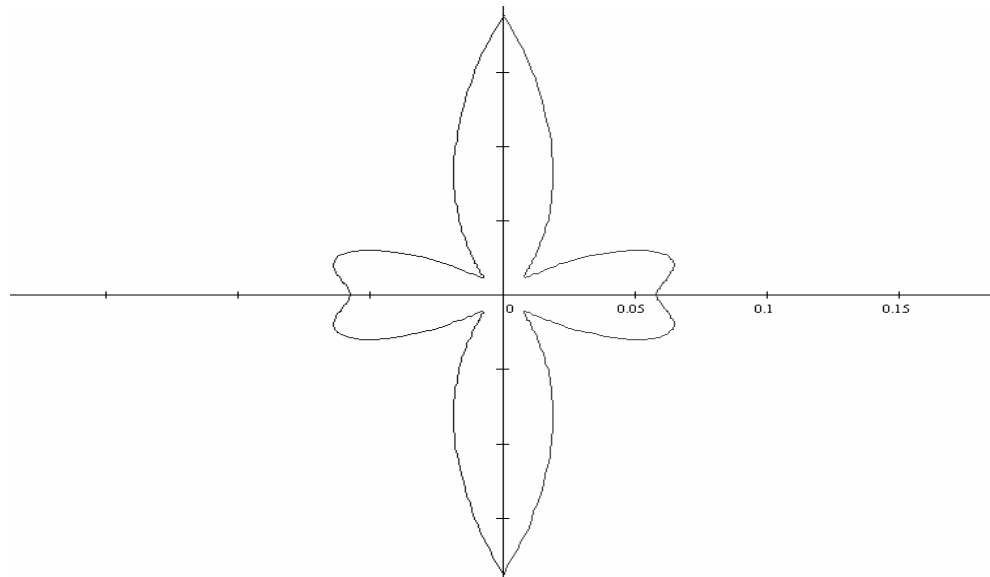


Рис 4. МВЧ диаграммы направленности для квадратного экрана $k = 5, n = 31, \alpha = 2$

Также было проведено сравнение результатов численного эксперимента для данной задачи в случае длинного идеально жесткого прямоугольного экрана (коэффициент $\alpha = 0$) с результатами, полученными для задачи дифракции на бесконечно длинной идеально жесткой ленте.

Пользуясь результатами, полученными в работе [8] был получен приближенный график модуля поля рассеянной волны для бесконечно длинного экрана $\Omega = \{x \in R^3 \mid x_3 = 0, x_2 \in [-1, 1], x_1 \in R\}$ на

отрезке $L = \{x \in R^3 \mid x_3 = 10^{-4}, x_2 \in [-1, 1], x_1 = 0\}$. При вычислении приближенных значений поля рассеянной волны бралось 80 расчетных точек. На этом же

отрезке, решая СЛАУ (19) и (20), по формуле (21) были получены приближенные значения поля рассеянной волны для прямоугольного экрана $\mathcal{E} = \{x \in R^3 \mid x_3 = 0, x_2 \in [-1, 1], x_1 \in [-7, 7]\}$, разбитого на 15 квадратов по ширине (ось x_2) и 105 по длине (ось x_1). Далее строился график модуля поля рассеянной волны на том же отрезке L .

Из физических соображений полученные значения амплитуды поля для бесконечно длинной ленты Ω и длинного прямоугольного экрана \mathcal{E} должны быть близки.

Некоторые из результатов приведены ниже:

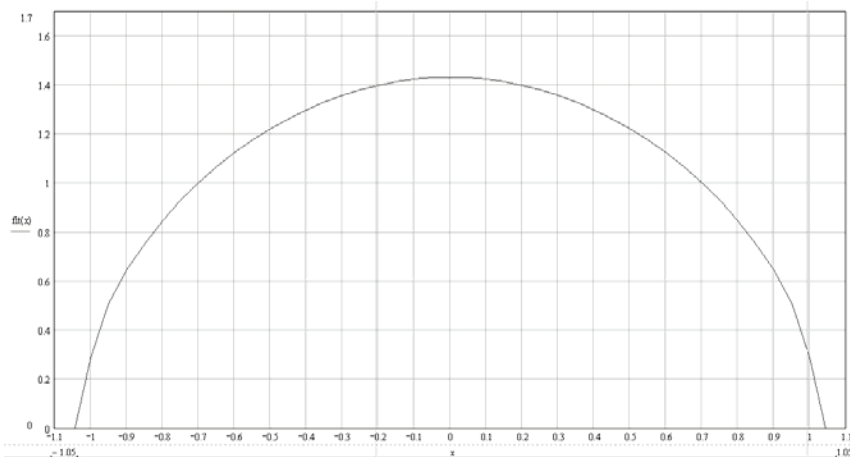


Рис 5. Модуль амплитуды рассеянной волны для трехмерной задачи.. Волновое число $k=1$.

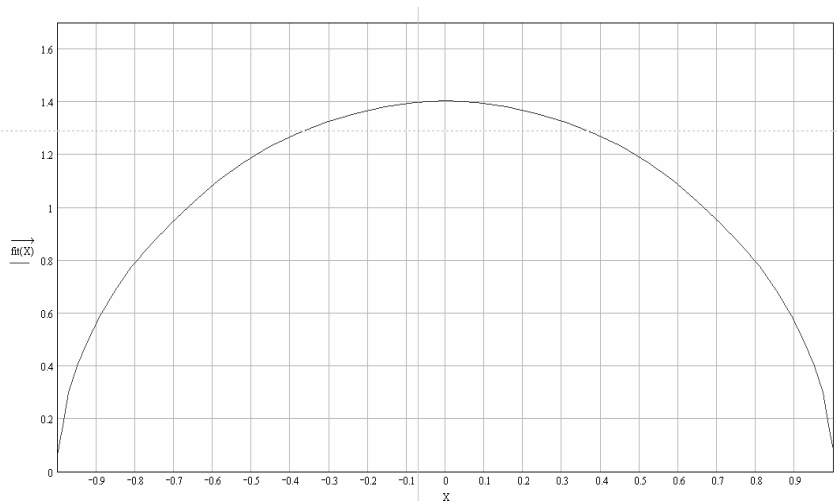


Рис 6. Модуль амплитуды рассеянной волны для двумерной задачи. Волновое число $k=1$

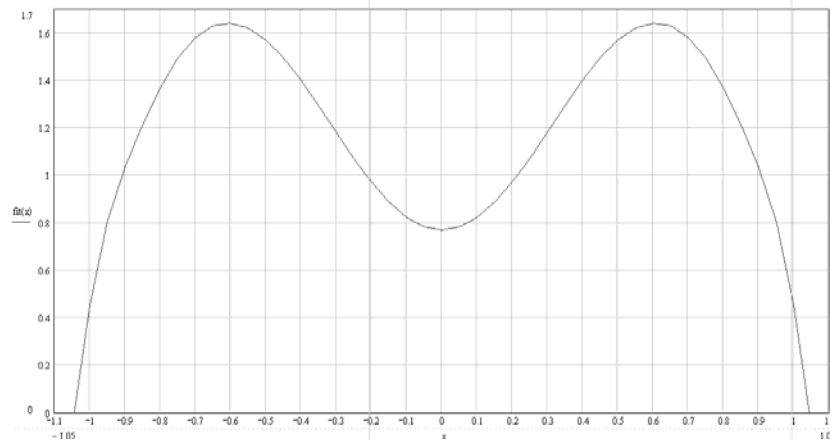


Рис 7. Модуль амплитуды рассеянной волны для трехмерной задачи.. Волновое число $k=5$.

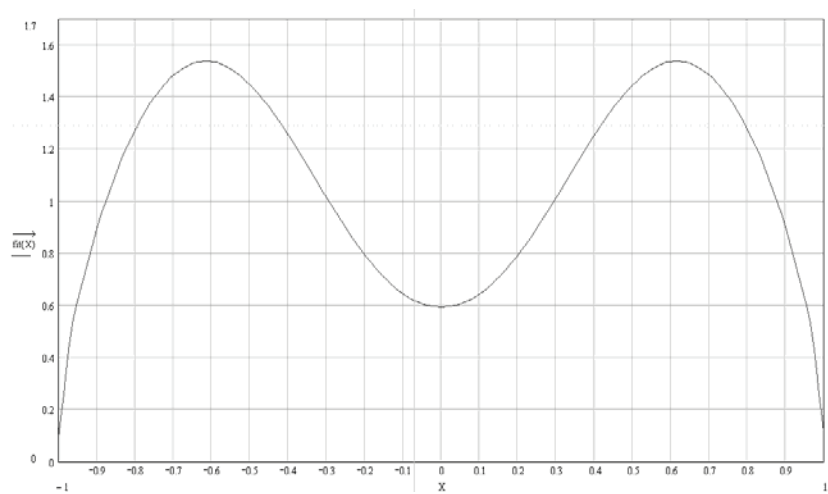


Рис 8. Модуль амплитуды рассеянной волны для двумерной задачи.. Волновое число $k=5$.

Из данных графиков видно, что решения плоской и трехмерной задач близки, но есть различия порядка 5-10%. Они объясняются тем, что прямоугольный экран не бесконечно длинный и некий вклад в значения поля дают концы длинного экрана.

6. Заключение

В данной работе были найдены два интегральных уравнения от двух неизвестных функций. Первая представляет собой разность значений амплитуды поля на верхней и нижней части экрана, вторая - разность значений нормальных производных амплитуды поля на верхней и нижней частях экрана. Было показано, что искомая комплексная амплитуда рассеянного поля выражается через эти функции. С помощью метода дискретных вихрей была построена дискретная математическая модель задачи для приближенного решения, которая была сведена к решению двух СЛАУ.

Был проведен численный эксперимент для квадратного экрана при различных значениях волнового числа. Также, для проверки достоверности результатов, было проведено сравнение с хорошо изученной двумерной задачей для идеально длинных лент. Сравнивались графики значений амплитуды поля вблизи экрана.

В дальнейшем представляет собой интерес нахождение скорости сходимости приближенного решения к точному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belotserkovsky S.M. and Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices.- CRC Press, 1993. – 452p.
2. Lifanov I.K. Integral Equations and Discrete Vortices.- VSP, The Netherlands, 1996. - 474 p.
3. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: Наука, 1965. - 244 с.
4. Белоцерковский С.М. , Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 353 с.
5. Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране. – Вісник Харківського національного університету .Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління” №733, 2006, с. 58-75
6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения . -М.:”Янус-К”, 2001, С.508.
7. Гандель Ю.В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах.- Труды XI Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики ” (МДОЗМФ-2003).-Харьков-Херсон. - 2003. С.53-58.
8. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики – М: Изд-во АН СССР. – 1986. – N 124. – С. 166-183.
9. Гахов А. В. Мищенко В. О. Вычислительный эксперимент на базе численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для прямоугольной области. - Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 84-91
10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеивания М.: Мир, 1987 -311 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.:Наука, 1977, С.735
12. Антонец А.В., Гандель Ю.В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране. – Вісник Харківського національного університету. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління” №590, 2003, с. 9-14