

Некорректные обратные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении

А. В. Воропай, В. Т. Гришакин, Е. Г. Янютин

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет (ХАДИ), Украина

The solving methods of the direct and inverse problems for elastodeformed rectangular plate and finite-length beam are presented. Transverse concentrated loading is considered. A two-flying beam with elastic middle support is researched. The identification of unknown mobile force is performed. The possibility of transient vibration process controlling for elastic rectangular plate is posed. The problems are solved according to Timoshenko's refined theory. The inverse ill-posed problems solutions are executed with using of Tikhonov's regularization algorithm.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Анализ переходных динамических процессов представляет сложную задачу возникающую, например, при проектировании и технической диагностике исследуемых упругодеформируемых объектов, а также при управлении нестационарными колебательными процессами.

Несмотря на широкое распространение в современной технике элементов конструкций, подверженных влиянию импульсных нагрузок, процессы их нестационарного деформирования изучены недостаточно.

В статье приводится решение двух задач о нестационарном деформировании балки конечной длины и прямоугольной плиты, причем рассматриваются постановки прямых и обратных задач, а также задачи управления неустановившимся колебательным процессом.

2. Истоки исследования авторов

Решение задачи о движении груза по многопролетной балке, полученное методом обобщенных координат, приводится в монографии [1]. Ряд вопросов, посвященных динамике неразрезных балочных конструкций, описан в монографиях [2, 3]. Все задачи, изложенные в этих работах, относятся к классу так называемых прямых задач. В направлении, непосредственно связанном с рассматриваемыми далее задачами, можно отметить монографию [4].

Данная работа базируется на исследованиях в области решения прямых нестационарных задач механики деформируемого твердого тела, современной теории интегральных уравнений Вольтерра и теории некорректных задач математической физики [5].

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Опубликованных исследований в области механики деформируемого твердого тела касающихся динамической прочности элементов конструкций на основе решения обратных задач на сегодняшний день немного. Идея управления нестационарными колебаниями на базе решения соответствующих обратных

некорректных задач теории упругости только начинает развиваться; исследуются возможности и ограничения разрабатываемых подходов. Частичный обзор обратных задач направления, к которому принадлежит настоящая статья, помещен в монографии [4].

Целью этой работы является построение способа идентификации нагрузок, воздействующих на двухпролетную шарнирно-опертую балку с упругодеформируемой дополнительной опорой, а также исследование возможности управления неустановившимся колебательным процессом на малой области прямоугольной пластины.

4. Задача идентификации нагрузки, воздействующей на балку

Задачу о колебаниях двухпролетной балки при действии подвижной силы будем рассматривать на основе модели Тимошенко [1], а именно с использованием системы следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' FG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) &= \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \\ k' G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q_z(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где w – динамический прогиб балки, ψ – угол поворота нормали к нейтральной линии балки.

На рис. 1 изображена механическая система – шарнирно опертая балка длины l , имеющая в пределах своего пролета одну упругую опору. На балку воздействует заданная подвижная сила, закон изменения во времени которой записывается в форме $P(t)\delta(x-V_0t)$.

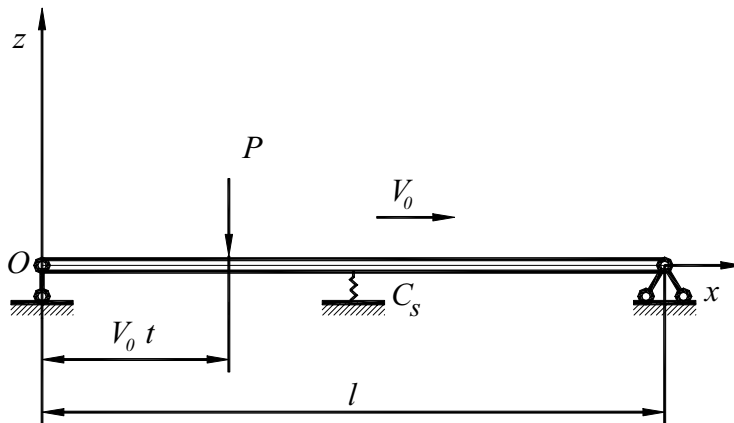


Рис. 1. Схема нагружения балки

Реакцию упругой опоры, расположенной в произвольной точке s балки, будем заменять сосредоточенной в этой точке силой $P_s(t)$, положительное направление действия которой противоположно направлению действия нагрузки. Предположим, что величина этой силы линейно зависит от прогибов точки s балки:

$$P_s(t) = C_s \cdot w_s(t), \quad (2)$$

где $w_s(t)$ – прогиб балки в точке s ; C_s – жесткость упругой опоры.

Решение дифференциального уравнения (2) находим при нулевых начальных условиях, заданных в момент входа силы P на балку с использованием теории рядов Фурье. Функции прогиба и угла поворота поперечного сечения можно записать так:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{2}{\rho Fl} \left(\int_0^t P(\tau) \cdot K_{w1}(\tau, t - \tau) d\tau - C_s \int_0^t w_s(\tau) K_{w2}(t - \tau) d\tau \right); \\ \psi(x,t) &= \frac{2}{\rho Fl} \frac{b^2 \lambda_k}{D_k} \left(\int_0^t P(\tau) K_{\psi1}(\tau, t - \tau) d\tau - C_s \int_0^t w_s(\tau) K_{\psi2}(t - \tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $K_{w1}(t)$, $K_{w2}(t)$, $K_{\psi1}(t)$, $K_{\psi2}(t)$ – соответствующие ядра в формуле (3).

Если в первом соотношении (3) положить $x=s$, то его можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра II-го рода для определения функции $w_s(t)$, т.е. прогиба балки непосредственно в точке, где находится опора. После того, как из упомянутого уравнения находится указанная величина, как функция времени, на основе соотношений (3) рассчитываются прогиб и угол поворота произвольной точки балки как функции времени.

Для определения функции $w(x,t)$ в произвольной точке балки x решаем следующее интегральное уравнение Вольтерра II-го рода относительно функции $w_s(t)$:

$$\frac{2}{\rho Fl} \left(\int_0^t P(\tau) K_{w1}(\tau, t - \tau) d\tau - C_s \int_0^t w_s(\tau) K_{w2}(\tau, t - \tau) d\tau \right) - w_s(t) = 0. \quad (4)$$

Численный эксперимент при решении прямой задачи был проведен для стальной двухпролетной балки с прямоугольным поперечным сечением и следующими характеристиками: длина балки $l=1$ м; ширина балки $b=0,15$ м; высота поперечного сечения $h=0,1$ м; жесткость промежуточной опоры $C_s=5 \cdot 10^7$ Н/м; величина действующей на балку подвижной силы $P=1$ кН; скорость движения силы $V_0=100$ м/с.

Для оценки достоверности полученных решений прямой задачи проводились численные эксперименты с применением различных способов, в том числе с помощью метода конечных разностей.

Для решения обратной задачи (отыскания зависимости внешнего динамического нагружения во времени) при условии, что известна зависимость прогиба в некоторой точке балки от времени $w_0(t)$ и скорость движения силы запишем выражение для прогиба балки в виде:

$$w_0(t) = \int_0^t P(\tau) K(t - \tau, \tau) d\tau, \quad (5)$$

где $K(t, \tau) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \beta_k \tau \cdot \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik}(t) \cdot \sin \lambda_k x_0$ – ядро интегрального уравнения.

Согласно подходу А. Н. Тихонова [5], задача сводится к решению регуляризированной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (6)$$

где \mathbf{A} – матрица, элементы которой $a_{i,j} = K(t_i - \tau_j, \tau)$; \mathbf{p} – неизвестный вектор, соответствующий силе $P(t)$, форма элементов матрицы \mathbf{C} приведена в монографии [5].

Параметр регуляризации α выбирается на основании принципа невязки.

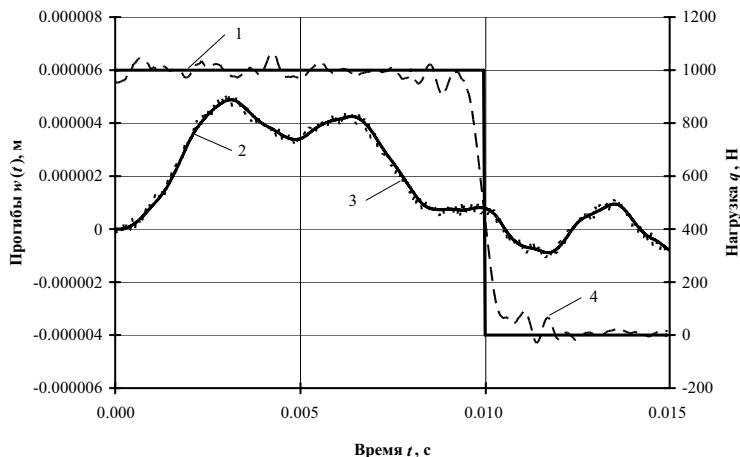


Рис. 2 Идентифицированная нагрузка и исходные данные

На рис. 2 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения. Предполагалось, что в качестве исходных данных принято изменение прогиба в точке с координатой $x=l/4$, вычисленное по формулам (3)-(4) – результат решения прямой задачи (см. кривую 2) и зашумленное со случайной погрешностью в 5% (кривая 3). Укажем, что на рис. 2 сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки по зашумленным исходным данным.

5. Задача управления нестационарными колебаниями пластины

Рассмотрим упругую изотропную прямоугольную пластину средней толщины. Габариты пластины $l \times m$, а толщина h . Схема закрепления пластины соответствует шарнирному опиранию. Предположим, что на пластину воздействует система двух независимых поперечных сосредоточенных нагрузок, приложенных в точках (x_{01}, y_{01}) и (x_{02}, y_{02}) . Требуется погасить колебания (по возможности максимально уменьшить амплитуды колебаний прогиба срединной плоскости пластины) на небольшой по сравнению с размерами пластины прямоугольной области. При этом предполагается, что на пластину воздействует система, состоящая из четырех независимых между собой сосредоточенных управляющих воздействий (сил). Точки приложения управляющих сил заданы. Закон изменения во времени возмущающих нагрузок известен. В этом случае поставленная задача управления колебаниями сводится к отысканию четырех неизвестных управляющих нагрузок, как функций времени.

На рис. 3 представлена упрощенная схема нагружения пластины. Укажем, что на этой схеме точкам с индексами $0i$ соответствуют точки приложения возмущающих нагрузок $P_i(x, y, t)$; точкам с индексами ci – точки приложения управляющих воздействий $P_i^c(x, y, t)$; точкам с индексами sj соответствуют точки, принадлежащие границам прямоугольной области, на которой осуществляется управление колебаниями, а точка (x_m, y_m) – центр этой области (площадки управления). Отметим, что конкретные координаты всех точек и области, на которой происходило управление, в приведенном варианте расчета, указаны далее.

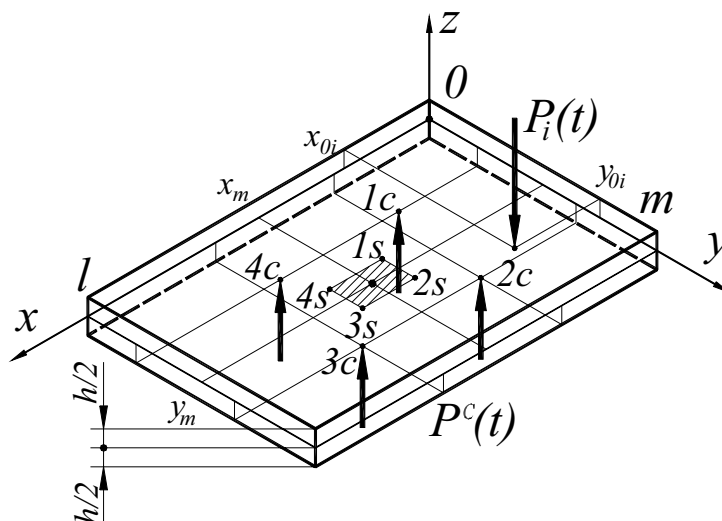


Рис.3. Схема нагружения пластины

Уравнения нестационарных колебаний прямоугольной пластины под действием системы поперечных нагрузок (управляющих и возмущающих) по аналогии с [6] можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^N P_i(x, y, t) + \sum_{i=1}^{Nc} P_i^c(x, y, t); \\ DV^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$; $\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $I = h^3/12$; $G' = k'G$. Укажем, что $\sum_{i=1}^N P_i(x, y, t)$ – система

возмущающих нагрузок; а $\sum_{i=1}^N P_i^c(x, y, t)$ – система управляющих нагрузок (для активного гашения).

Система (7) решается аналитически при помощи разложения искомых функций перемещения в двойные ряды Фурье по тригонометрическим функциям с использованием интегрального преобразования Лапласа для коэффициентов разложения, зависящих от времени. В результате для прогиба и углов поворота решение прямой задачи получается в виде суммы интегралов Дюамеля (сверток):

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_x(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где $K_i^{\Psi x}(x, y, t)$, $K_i^{\Psi y}(x, y, t)$, $K_i^W(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля.

Так как выбранным критерием управления является уменьшение амплитуд прогиба, то справедливы следующие соотношения: $w(x_{sj}, y_{sj}, t) = 0$, где (x_{sj}, y_{sj}) – четыре точки, ограничивающие область гашения колебаний.

Используя вид решения прямой задачи для прогибов и критерии управления, можно получить систему четырех интегральных уравнений Вольтерра I рода:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^W(x_{sj}, y_{sj}, t - \tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x_{sj}, y_{sj}, t - \tau) d\tau, \quad (9)$$

где $j=1 \div 4$.

Систему интегральных уравнений (9) можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{c1} \\ \mathbf{P}_{c2} \\ \mathbf{P}_{c3} \\ \mathbf{P}_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{A}0_{1i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{A}0_{2i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{A}0_{3i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{A}0_{4i} \mathbf{P}_i \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для решения данной системы уравнений (10) относительно искомых функций $P_{cj}(t)$ разработан специальный метод решения, который базируется на использовании обобщенного алгоритма Крамера для блочной матрицы \mathbf{A} и регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова при обращении матриц. Решение подобной системы двух интегральных уравнений подробно рассмотрено в [7].

Численные расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$; $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\nu=0.3$; $h=0.04 \text{ м}$; $l=1.2 \text{ м}$, $m=0.8 \text{ м}$.

Координаты точек приложения возмущающих нагрузок: $x_{01}=0.1$ м, $y_{01}=0.25$ м, $x_{02}=0.5$ м, $y_{02}=0.15$ м.

Координаты приложения системы управляющих нагрузок: $x_{c1}=0.2$ м, $y_{c1}=0.1$ м, $x_{c2}=0.2$ м, $y_{c2}=0.3$ м, $x_{c3}=0.4$ м, $y_{c3}=0.3$ м, $x_{c4}=0.4$ м, $y_{c4}=0.1$ м.

Координаты границ площадки управления: $x_{s1}=0.45$ м, $y_{s1}=0.3$ м, $x_{s2}=0.45$ м, $y_{s2}=0.32$ м, $x_{s3}=0.47$ м, $y_{s3}=0.32$ м, $x_{s4}=0.47$ м, $y_{s4}=0.3$ м.

Координаты центра площадки управления: $x_m=0.46$ м, $y_m=0.31$ м.

На рис. 4, 5 представлены результаты численных расчетов.

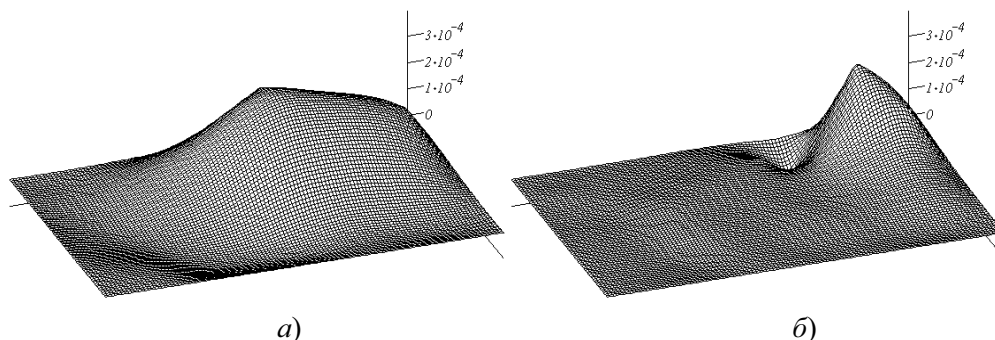


Рис.4. Эпюры прогиба

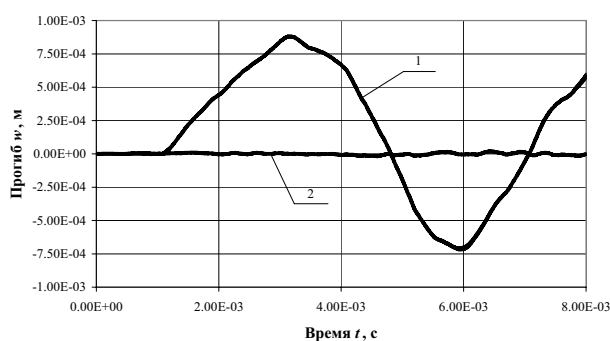


Рис.5. Изменение прогиба в центре области управления

Рис. 4 демонстрирует распределение прогибов в срединной плоскости пластины в момент времени $t=1.6 \cdot 10^{-3}$ с. Рис 4 а соответствует случаю, когда отсутствует управляющее воздействие и на пластину воздействуют только возмущающие импульсные нагрузки (во времени изменяющиеся, как «полуволна синусоиды» и «прямоугольная ступенька конечной продолжительности»), а рис. 4 б – приложена система тех же возмущающих и четырех гасящих нагрузок.

На рис. 5 показано изменение во времени прогиба точки пластины с координатами (x_m, y_m) – центра площадки, на которой осуществляется гашение колебаний. Кривая 1 рис. 5 получена при отсутствии управляющих воздействий, а кривая 2 рис. 5 соответствует приложению четырех управляющих воздействий, закон изменения во времени, которых найден в результате решения обратной задачи управления.

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Применение современной теории обратных задач позволяет получить решения ряда важных и практически ориентированных задач механики деформируемого твердого тела. Представленные в статье задачи по определению импульсных нагрузок, действующих на балки, а также по управлению нестационарными колебаниями пластины, содержат существенные элементы новизны.

Разработанные и описанные в статье численно-аналитические алгоритмы определения неизвестных внешних импульсных нагрузок, действующих на элементы конструкций в виде балок с дополнительными опорами, эффективны и устойчивы к различного рода возмущениям в исходных данных. Они могут быть составной частью системы дополнения информационной базы данных, необходимых для расчета динамической прочности соответствующих элементов конструкций.

В данной работе показана возможность управления колебаниями на небольшой по сравнению с размерами пластины области, что является принципиально новой постановкой по сравнению с алгоритмами управления колебаниями только в одной точке. Дальнейшие исследования могут быть связаны с улучшением и оптимизацией предложенной схемы гашения и в конечном итоге могут стать весомым вкладом в общей проблеме активной виброзащиты элементов конструкции и их систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П., Кохманюк С.С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. – Киев: «Наукова думка», 1967. – 134 с.
2. Кохманюк С.С., Дмитриев А.С., Шелудько Г.А., Шупиков А.Н., Титарев В.Г., Ляхов А.Н. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок. – Киев: «Наукова думка», 1989. – 304 с.
3. Кохманюк С.С., Дмитриев А.С., Шелудько Г.А. и др. Нестационарное деформирование элементов конструкций и их оптимизация. – Киев: «Наукова думка», 1984. – 187 с.
4. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1986. – 288 с.
6. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Прикл. Механика. – 2003. – 37. – №10. С. 151-155.
7. А. В. Воропай, С. И. Поваляев, А. С. Шарапата, Е. Г. Янютин. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек. Вісник ХНУ № 661., 2005, с.69-82.