Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.642
№ 775, 2007, с.81-91

О сплайновом методе решения одного класса интегральных уравнений третьего рода

Н. С. Габбасов, С. А. Соловьева
Филиал Казанского государственного университета в г. Набережные Челны, Россия

We suggest and justify a special direct method adjusted for the approximate solution of integral equation of the third kind. We show that the construction method is optimal with respect to the order of all projection methods for these equations.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР)

$$(Ax)(t) \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t), \tag{1.1}$$

где $(Ux)(t) \equiv x(t)t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}$, $(Kx)(t) \equiv \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, $t \in I \equiv [0,1]$,

$p_1, p_2 \in R^+$, $t_j \in (0,1)$, $m_j \in N$ $(j=\overline{1,q})$; K и y - известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами «гладкости» точечного характера, а x - искомая функция. УТР находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях. К такого рода уравнениям приводят многие современные прикладные задачи, в частности, ряд задач теорий упругости, рассеяния частиц, переноса нейтронов (см., напр., [1,2] и библиографию к [1]). При этом естественными классами решений УТР, как правило, являются специальные пространства обобщенных функций. Изучаемые уравнения точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому разработка теоретически обоснованных эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций является актуальным и активно развивающимся направлением математического анализа и вычислительной математики.

2. Анализ публикаций по теме исследования

Ряд результатов в этом направлении получен в работах [3-7], причем в [3] предложены и обоснованы специальные прямые методы решения УТР (1.1) в пространстве $D\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$ обобщенных функций, [4] посвящена построению полной теории разрешимости изучаемых уравнений в некотором пространстве $V\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$ обобщенных функций, а в [5-7] построены специальные прямые методы решения уравнения (1.1) в классе $V\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$, основанные на использовании как полиномов, так и сплайнов первого порядка.

3. Нерешенная проблема и постановка задачи

Указанные методы «плохо» реагируют на структурные свойства исходных данных в смысле улучшения скорости сходимости приближенных решений. Такого недостатка лишен метод, предложенный в данной работе. Именно, на базе рассуждений и результатов работ [3, 8, 9] построен и обоснован в смысле [10, гл.1] специальный прямой метод, основанный на использовании сплайнов второго порядка.

4. Об основных пространствах

Пусть $C \equiv C(I)$ - пространство непрерывных на I функций с обычной max – нормой и $m \in N$. Следуя [11], обозначим через $C_{t_0}^{\{m\}} \equiv C\{m;\, t_0\}$ класс функций $g \in C$, имеющих в точке $t_0 \in (0,1)$ тейлоровскую производную $g^{\{m\}}(t_0)$ порядка *m*.

Пусть $t_1, t_2, ..., t_q$ - произвольно фиксированные попарно различные точки интервала (0,1). Каждой точке t_j поставим в соответствие некоторое число $m_j \in N \quad (j = \overline{1,q})$. Далее введем в рассмотрение векторное пространство

$$C\{\overline{m};\overline{\tau}\} \equiv C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}(I) \equiv \bigcap_{j=1}^{q} C\{m_j; t_j\},$$

где $\overline{m} \equiv (m_1, m_2, ..., m_q)$, $\overline{\tau} \equiv (t_1, t_2, ..., t_q)$ - конечномерные наборы соответствующих величин.

Пусть $p_1 \in R^+$. Обозначим через $C\{p_1;\, 0\}$ пространство функций $g \in C$, имеющих правые тейлоровские производные $g^{\{i\}}(0) \quad (i = \overline{1,[p_1]})$ в точке $t = 0$, причем в случае $p_1 \neq [p_1]$ ($[\cdot]$ - целая часть) существует конечный предел

$$\lim_{t \to 0+} \{ [g(t) - \sum_{i=0}^{[p_1]} g^{\{i\}}(0)\, t^i / i!\,]\, t^{-p_1} \}.$$

Класс $C\{p_2;1\} \quad (p_2 \in R^+)$ вводится аналогично.

Теперь образуем основное векторное пространство

$$Y \equiv C^{\{p_1, p_2; \overline{m}\}}(I) \equiv C\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\} \equiv C\{\overline{m}, \overline{\tau}\} \bigcap C\{p_1;\, 0\} \bigcap C\{p_2;\, 1\}$$

(будем считать, что $C\{0,0;\overline{0},\overline{\tau}\} \equiv C$).

Зададим в нем норму

$$\| y \|_Y \equiv \| Ty \|_C + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} \left| y^{\{i\}}(t_j) \right|, \tag{4.1}$$

где T - «характеристический» оператор класса Y:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} y^{\{i\}}(t_j)\ R_{ji}(t) \right] / \ u(t) \equiv \Phi(t), \tag{4.2}$$

$u(t) \equiv t^{p_1} (1-t)^{p_2} \prod_{j=1}^{q} (t-t_j)^{m_j}$, $\Phi \in C(I)$, $\Phi(t_j) \equiv \lim_{t \to t_j} \Phi(t)$ $(j = \overline{1, q+2})$; $t_j \in (0,1)$ $(j = \overline{1, q})$, $t_{q+1} \equiv 0$, $t_{q+2} \equiv 1$, R_{ji} – фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ по узлам $\{t_j\}_1^{q+2}$. Здесь $m = \sum_{j=1}^{q+2} m_j$, $m_{q+1} \equiv \lambda_1 + 1$, $m_{q+2} \equiv \lambda_2 + 1$, $\lambda_k \equiv \lambda(p_k)$ $(k = \overline{1,2})$, $\lambda(p) \equiv [p] - (1 + sign([p] - p))$.

Имеет место следующая [3]

Лемма 4.1. *i) Функция* $g(t)$ *принадлежит классу* Y *тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$g(t) = u(t)\Phi(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} a_{ji} R_{ji}(t),$$

где $\Phi(t) = (Ty)(t) \in C$, $a_{ji} = y^{\{i\}}(t_j) \in R$ $(i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$.

ii) Пространство Y *по норме (4.1) полно и вложено в* C.

Рассмотрим теперь на основном пространстве Y семейство $X \equiv V\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$ обобщенных функций вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} c_{ji} F.P. t^{\mu_1} (1-t)^{\mu_2} (t - t_j)^{-i-1}, \tag{4.3}$$

где $t \in I$, $z \in C$, $\mu_k \equiv \lambda_k - p_k + 1$ $(k = \overline{1,2})$, $c_{ji} \in R$ – произвольные постоянные, а $F.P. f(t)(t - t_j)^{-i-1}$ – обобщенные функции, определенные на Y по следующему правилу:

$$(F.P.\ f(t)(t-t_j)^{-i-1}, y) \equiv F.P. \int_0^1 y(t) f(t) (t - t_j)^{-i-1} dt$$

$$(y \in Y, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2});$$

при этом знак «*F.P.*» указывает на конечную часть интеграла по Адамару (см., напр., [12]) (в дальнейшем знак «*F.P.*» для краткости будем опускать). Ясно, что векторное пространство X относительно нормы

$$\| x \|_X \equiv \| z \|_C + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} | c_{ji} | \tag{4.4}$$

является банаховым.

Пусть $d_l(Q, X)$ обозначает l-ый поперечник по Колмогорову множества Q в пространстве X.

В дальнейшем при оптимизации проекционных методов решения УТР (1.1) существенную роль будет играть [7]

Лемма 4.2. *Для произвольного множества* $Q \subset X$ *при любом* n $(n \in N)$ *справедливо соотношение*

$$d_{n+m}(Q, X) = d_n(TU(Q), C).$$

Следствие. *Справедлива слабая эквивалентность*

$$d_N(XH_\omega^r, X) \succ\prec N^{-r}\omega(N^{-1}) \quad (N > m + r, \; r = 0, 1, 2, ...),$$

где $XH_\omega^r \equiv \{x \in X \mid TUx \in H_\omega^r\}$, $H_\omega^r \equiv \{f \in C^{(r)}(I) \mid \omega(f^{(r)}; \Delta) \le \omega(\Delta)\}$, $\omega \equiv \omega(\Delta)$ - *некоторый заданный модуль непрерывности*.

5. О «сплайновых» операторах

Зададим на I произвольную сетку узлов $\Delta_n \equiv \Delta_{n-2}$:

$$0 \equiv s_0 < s_1 < ... < s_{n-2} \equiv 1 \quad (n \ge 4),$$

удовлетворяющую условиям

$$\nu_n \equiv \| \Delta_n \| \equiv \max_{0 \le k \le n-3} l_k \to 0 \;\; (n \to \infty), \;\; l_k \equiv s_{k+1} - s_k,$$
$$\nu_n / \min_{0 \le k \le n-3} l_k \le b \quad (k = \overline{0, n-3}) \;\; b = const > 0$$

и на этой сетке рассмотрим систему $\{\beta_{2,k}\}_{-1}^{n-2}$ β - сплайнов второго порядка (см., напр., [13], с. 19,20) на сетке Δ_n с носителем (s_{i-1}, s_{i+2}) ($s_{-2} < s_{-1} < s_0$, $s_{n-2} < s_{n-1} < s_n$). Обозначим через

$$S_n^2 \equiv \{z_n(t) \mid z_n(t) = \sum_{k=-1}^{n-2} c_k \beta_k, \; c_k \in R\},$$

где $z_n(t)$ удовлетворяет одному из следующих граничных условий:

(χ_1) $z_n(0) = z_n(1), \quad z_n'(0) = z_n'(1)$ (периодические условия);

(χ_2) $z_n''(t - 0) = z_n''(t + 0), \quad t = s_1, s_{n-3}$.

Пусть $B_n^T \equiv B_{n+m}^T : Y \to Y_n \equiv S_{n+m}^{T,2} \equiv U(S_n^2) \oplus H_{m-1}$ - линейный оператор, заданный по закону

$$(B_n^T y)(t) \equiv (UB_n Ty)(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} y^{\{i\}}(t_j) \, R_{ji}(t), \tag{5.1}$$

где $B_n : C \to S_n^2$ - оператор, который всякой непрерывной функции $f \in C$ ставит в соответствие сплайн $(B_n f) \in S_n^2$ такой, что выполняются соотношения

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} (B_n f - f)(t)dt = 0 \quad (k = \overline{0, n-3}).$$

Справедлива следующая [3]

Лемма 5.1. Имеют место соотношения:

(i) $\| y - B_n^T y \|_Y \le d\omega(Ty; \Delta_n) \quad (y \in Y)$,

где $\omega(f; \Delta)$ - модуль непрерывности функции f в точке Δ $(0 < \Delta \le 1)$, d - некоторая постоянная ;

(ii) $(B_n^T)^2 = B_n^T$.

6. Обобщенный метод подобластей на базе параболических сплайнов (ОМППС)

Пусть дано УТР (1.1), в котором исходные данные удовлетворяют условиям

$$K \in C^{\{p_1, p_2; \overline{m}\}}(I^2);\ \varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j, s),$$
$$\psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, t_j),\ y \in Y \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2}), \tag{6.1}$$

а $x \in X$ - искомая обобщенная функция. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A : X \to Y$ установлены в работе [4], там же указан метод отыскания точного решения УТР (1.1) в пространстве X.

Решение уравнения (1.1) аппроксимируем элементом

$$x_n(t) \equiv z_n(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} c_{ji}\ t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t - t_j)^{-i-1}, \quad z_n(t) \equiv \sum_{k=-1}^{n-2} c_k\, \beta_{2,k}(t), \tag{6.2}$$

Неизвестные параметры c_{ji} $(i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$, $c_k \equiv c_k^{(n)}$ $(k = \overline{-1, n-2})$ находим согласно ОМППС из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\left.\begin{aligned} &\int_{s_{k-1}}^{s_k} (TAx_n - Ty)(t)\, dt = 0 \qquad (k = \overline{1, n-2}); \\ &(A x_n - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2}) \end{aligned}\right\}. \tag{6.3}$$

Здесь алгебраическая система относительно $c_k \equiv c_k^{(n)}$ $(k = \overline{-1, n-2})$, c_{ji} $(i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$ становится квадратной за счет одного из граничных условий (χ_1), (χ_2).

Обоснование алгоритма (6.1) - (6.3) дается в следующем утверждении

Теорема 6.1. *Пусть уравнение (1.1) имеет единственное решение в X при любой правой части* $y \in Y$, *функции* $\theta(t,s) \equiv (T_t K)(t,s)$, $h(t,s) \equiv (T_t T_s K)(t,s)$ *(по t),* $g_{ji}(t) \equiv (T\psi_{ji})(t)$ $(i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$, $Ty \in C^{(r)}$ $(r = \overline{1,2})$.

Тогда при достаточно больших $n \in N$ *приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные на основе условий (6.2)-(6.3), существуют, единственны и сходятся по норме пространства X к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (1.1) со скоростью*

$$\| x^* - x_n^* \| = O\left\{ n^{-r} \left[\omega_t(\theta; n^{-1}) + \omega_t(h; n^{-1}) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} \omega(g_{ji}; n^{-1}) + \omega(Ty; n^{-1}) \right] \right\}, \quad (6.4)$$

где $\omega(f;\Delta)$ *- модуль непрерывности функции* $f \in C$ *в точке* Δ $(0 < \Delta \le 1)$, *а* $\omega_t(\xi;\Delta)$ *- частный модуль непрерывности функции* $\xi(t,s)$ *по аргументу t.*

Доказательство. Представим УТР (1.1) в виде операторного уравнения

$$Ax \equiv Ux + Kx = y \quad (x \in X,\ y \in Y). \quad (6.5)$$

Тогда система (6.2)-(6.3) равносильна операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv U x_n + B_n^T K x_n = B_n^T y \quad (x_n \in X_n,\ B_n^T y \in Y_n), \quad (6.6)$$

где $X_n \equiv S_{n+m}^{F.P.,2} \equiv S_n^2 \oplus span\left\{ t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t - t_j)^{-i-1} \right\}_{0}^{m_j}{}_{1}^{q+2}$,

Действительно, пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_k^*\}, \{c_{ji}^*\})$ - решение уравнения (6.6), т.е.

$$B_n^T (A x_n^* - y) \equiv 0.$$

Отсюда в силу (5.1) следует равенство

$$(U B_n T)(A x_n^* - y)(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} (A x_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) R_{ji}(t) \equiv 0. \quad (6.7)$$

На основании леммы 4.1 ясно, что тождество (6.7) эквивалентно системе

$$(B_n T)(A x_n^* - y) \equiv 0; \quad (A x_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$$

или же

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k}(TAx_n - Ty)(s_k) = 0 \quad (k = \overline{1, n-2}); \quad (A x_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}\,,\ j = \overline{1, q+2}).$$

Таким образом, решение уравнения (6.6) сводится к решению системы (6.2) – (6.3). Для получения обратного утверждения необходимо провести те же рассуждения, но в обратном порядке.

Далее, покажем близость операторов A и A_n на X_n. В силу (6.5), (6.6), леммы 4.1, (5.1), (4.1), оценки [14] (с.233)

$$\| f - B_n f \|_C = O(n^{-r}\,\omega(f^{(r)}; n^{-1}) \quad (f \in C^{(r)},\ r = \overline{1,2}) \tag{6.8}$$

и (4.4) для любого элемента $x_n \in X_n$ имеем

$$\| Ax_n - A_n x_n \|_Y = \left\| Kx_n - B_n^T Kx_n \right\|_Y = \| TKx_n - B_n TKx_n \|_C =$$

$$= \max_{t \in I} \left| \int_0^1 (\theta - B_n^t \theta)(t,s) z_n(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} c_{ji} \left[\int_0^1 (s - t_j)^{m_j - i - 1} r_j(s)(h - B_n^t h)(t,s)\, ds + \sum_{k=1}^{q+2} \sum_{l=0}^{m_k - 1} \eta_{ji}^{kl} (g_{kl} - B_n g_{kl})(t) \right] \right| \le$$

$$\le \| z_n \|_C\, n^{-r} \omega_t(\theta; n^{-1}) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} \left| c_{ji} \right| n^{-r} \left[\omega_t(h; n^{-1}) + \eta \sum_{k=1}^{q+2} \sum_{l=0}^{m_k - 1} \omega(g_{kl}; n^{-1}) \right] \le$$

$$\le c \| x_n \|_X\, n^{-r} \left[\omega_t(\theta; n^{-1}) + \omega_t(h; n^{-1}) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} \omega(g_{ji}; n^{-1}) \right],$$

где $r_j(s) \equiv \prod_{j \ne k = 1}^{q+2} (s - t_k)^{m_k}$; η_{ji}^{kl}, η, c - некоторые постоянные. Отсюда следует, что

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \| A - A_n \|_{X_n \to Y} \le c\, n^{-r} \left[\omega_t(\theta; n^{-1}) + \omega_t(h; n^{-1}) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} \omega(g_{ji}; n^{-1}) \right]. \tag{6.9}$$

Так как $\theta(t,s)$, $h(t,s)$ (по t) и $g_{ji}(t)$ $(i=\overline{0,m_j-1},\quad j=\overline{1,q+2})$ принадлежат классу $C^{(r)}$ $(r=\overline{1,2})$, то в силу теоремы Джексона (см., напр., [11], с. 82) $\varepsilon^{(n)}=o(1)\quad(n\to\infty)$. Поэтому по теореме 7 [10, с.19] при всех n таких, что $q_n\equiv\|A^{-1}\|\,\varepsilon^{(n)}<1$, операторы $A_n:X_n\to Y_n$ непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\|\le\|A^{-1}\|(1-q_n)^{-1}\quad(A_n^{-1}:Y_n\to X_n).$$

Для правых частей уравнений (6.5) и (6.6), в силу леммы 5.1, имеем

$$\nu^{(n)}\equiv\|y-B_n^Ty\|_Y\le d\omega(Ty,\Delta). \tag{6.10}$$

Теперь благодаря неравенствам (6.9), (6.10) и упомянутой выше теореме Джексона из теоремы 7 [10, с.19] следуют утверждения доказываемой теоремы с оценкой (6.4).

Замечание. Поскольку $C\{0,0;\bar{0},\bar{\tau}\}\equiv C$ и $V\{0,0;\bar{0},\bar{\tau}\}\equiv C$, то при $p_1=p_2=$ $=m_j=0\quad(j=\overline{1,q})$ из УТР (1.1) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве *C,* а ОМППС превращается в обычный метод подобластей на базе параболических сплайнов, причем $(Ty)(t)\equiv y(t)$, $\theta(t,s)\equiv K(t,s),\ h(t,s)\equiv K(t,s)$. Поэтому оценка (6.4) хорошо согласуется с соответствующей оценкой [16].

Теорема 6.2. *В условиях теоремы 6.1 справедливы следующие факты:*

(i) ОМППС устойчив относительно малых возмущений системы (6.2)-(6.3);

(ii) если УТР (1.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленной является также СЛАУ(6.2)-(6.3).

Доказательство следует из теорем 11, 13 [10] с учетом непрерывной обратимости аппроксимирующих операторов A_n и ограниченности обратных операторов.

Для приложений полезной может оказаться следующая

Теорема 6.3. *Пусть УТР (1.1) имеет решение вида (4.3) при данной правой части* $y\in Y$ *и соответствующий аппроксимирующий оператор* A_n *непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения* $x_n^*\in X_n$ *для правой части* $y_n\equiv B_n^Ty\in Y_n$ *представима в виде*

$$\|x^*-x_n^*\|_X=O\{n^{-r}\omega((TUx^*)^{(r)};n^{-1})\}, \tag{6.11}$$

где $r=\overline{0,2}$.

Доказательство. В силу теоремы 6 [10] и структуры приближенного уравнения (6.6), имеем

$$\| x^* - x_n^* \|_X = O\left(\| B_n^T \|_{Y \to Y_n} \| x^* - x_n \| \right),$$

где $x_n \in X_n$ - пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) \equiv (B_n TUx^*)(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} c_{ji}^* t^{\mu_1} (1-t)^{\mu_2} (t - t_j)^{-i-1} .$$

Тогда оценка (6.10) следует из (4.3), (4.4) и (6.8).

7. Оптимизация проекционных методов решения УТР

Пусть X и Y - банаховы пространства, а X_n и Y_n - их произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < \infty$ $(n \in N)$, причем $N \to \infty$ $(n \to \infty)$. Пусть $\Im_n \equiv \Im_n^{(1)} \equiv \{\Gamma_n\}$ - множество линейных операторов $\Gamma_n : Y \to Y_n$. Рассмотрим классы однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y \quad (x \in X,\, y \in Y) \tag{7.1}$$

и

$$\Gamma_n A x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n,\, \Gamma_n \in \Im_n,\, n \in N) \tag{7.2}$$

соответственно. Далее, пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ - решения уравнений (7.1) и (7.2) соответственно, а $\Phi \equiv \{f\}$ - класс коэффициентов уравнения (7.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя [10, с. 40], величину

$$V_N(\Phi) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\Gamma_n \in \Im_n} V(\Phi; \Gamma_n; X_n, Y_n),$$

где

$$V(\Phi; \Gamma_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in \Phi} V(f; \Gamma_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \| x^* - x_n^* \|_X ,$$

назовем оптимальной оценкой погрешности всевозможных проекционных методов $(\Gamma_n \in \Im_n)$ решения уравнения (7.1) на классе Φ.

Пусть существуют $X_n^0 \subset X$, $Y_n^0 \subset Y$ размерности $N(n) < \infty$ и операторы $\Gamma_n^0 : Y \to Y_n^0$ $(\Gamma_n^0 \in \Im_n)$, при которых

$$V_N(\Phi) \succ\prec V(\Phi; \Gamma_n^0; X_n^0, Y_n^0) \quad (N \to \infty).$$

Тогда метод (7.1) - (7.2) при $X_n = X_n^0$, $Y_n = Y_n^0$, $\Gamma_n = \Gamma_n^0$ называется оптимальным по порядку на классе Φ среди всех проекционных методов Γ_n $(\Gamma_n \in \Im_n)$ решения уравнения (7.2) (см. [10, с. 40]).

Рассмотрим оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in \Phi$) УТР (1) при $K(t,s)$ (по t), $\varphi_{ji}(s)$, $\psi_{ji}(t)$ $(i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, q+2}$), $y(t) \in YH_\omega^r \equiv \{ g \in Y \mid Tg \in H_\omega^r \}$. Тогда в силу теоремы 3 [4] имеем

$$X^* \equiv \{x^* \in X \mid Ax^* = y;\ K\,(no\,t), \varphi_{ji},\ \psi_{ji},\ y \in YH_\omega^r\} = XH_{\omega^*}^r,$$

$\omega^* = c^*\omega$ $(1 \le c^* = const)$. Пусть, далее, $X_n^0 \equiv S_{n+m}^{F.P.,1}$, $Y_n^0 \equiv S_{n+m}^{T,1}$, а $\Im_n = \Im_n^{(1)}$ - семейство всех линейных операторов $\Gamma_n : Y \to Y_n^0$.

Справедлива следующая

Теорема 7.1. Пусть $\Phi = YH_\omega^r$, $\Im_n = \Im_n^{(1)}$. Тогда

$$V_N(\Phi) \succ\prec N^{-r}\omega(N^{-1}) \quad (N = n + m) \tag{7.3}$$

и этот оптимальный порядок реализует ОМППС, причем $r = \overline{0,2}$.

Доказательство. Используя неравенство [10, с.163] $V_N(\Phi) \ge d_N(X^*, X)$ и следствие из леммы 4.2, находим

$$V_N(\Phi) \ge d_N(XH_{\omega^*}^r, X) \succ\prec N^{-r}\omega(N^{-1}). \tag{7.4}$$

С другой стороны, на основе определения $V_N(\Phi)$ и теоремы 6.1, получаем

$$V_N(\Phi) \le \sup_{x^* \in XH_{\omega^*}^r} \left\| x^* - x_n^* \right\|_X = O\{N^{-r}\omega(N^{-1})\} \qquad (x_n^* = A_n^{-1}B_n^T y), \tag{7.5}$$

Теперь из (7.4) и (7.5) следует утверждение теоремы с оценкой (7.3).

Следствие. Если $\Phi = YH_\alpha^r(M)$ $(0 < \alpha \le 1,\ r = 0,1,...)$, то верна оценка

$$V_N(\Phi) \succ\prec M\,N^{-r-\alpha} \quad (N = n + m),$$

при этом ОМППС оптимален по порядку на классе Φ среди всех проекционных методов решения УТР (1.1) ($r + \alpha \le 3$).

7. Выводы и перспективы дальнейших исследований

Изложенные выше результаты показывают, что в рамках предложенного сплайн - метода установлены эффективные оценки погрешности приближенного решения, учитывающие структурные свойства исходных данных. Более того, построенный метод оптимален по порядку точности на классе Φ, порожденном классом H_ω^r, среди всех проекционных методов решения УТР вида (1.1).

В дальнейшем предполагается приспособить предложенную схему к решению и других интегральных уравнений в особых случаях, в частности, интегродифференциальных уравнений третьего рода в классе обобщенных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bart G.R., Warnock R.L. Linear integral equations of the third-kind // SIAM. J. Math. Anal. - 1973. - V. 4, № 4. - P. 609-622.
2. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. - М.: Мир, 1972. - 384 с.
3. Габбасов Н.С. К теории линейных интегральных уравнений третьего рода / Дифференц. уравнения. - 1996.- Т. 32. - № 9. - С. 1192-1201.
4. Габбасов Н.С., Соловьева С. А. К теории разрешимости интегральных уравнений третьего рода // Тр. Всерос. научн. конф. «Мат. моделирование и краевые задачи». - Самара, 2005. - Ч.3. - С. 68-72.
5. Габбасов Н.С., Соловьева С.А. Обобщенный метод моментов для одного класса интегральных уравнений третьего рода // Дифференциальные уравнения. - 2006. - Т. 42. - № 10. - С. 1416-1423.
6. Соловьева С.А. Обобщенный метод подобластей для одного класса интегральных уравнений третьего рода // Тр. Всерос. научн. конф. «Мат. моделирование и краевые задачи». - Самара, 2006. - Ч.3. - С. 209-212.
7. Габбасов Н.С., Соловьева С.А. О сплайн - методе решения интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. - 2007. - № 3 - С. 3-11.
8. Габбасов Н.С. Методы решения одного класса интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. - 1996. - № 5. - С. 19-28.
9. Габбасов Н.С. Оптимальный метод решения интегральных уравнений третьего рода // Докл. РАН. - 1998. - Т. 362. - № 1. - С. 12-15.
10. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. - 232 с.
11. Прессдорф З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Мат. исследования. - Кишинев, 1972. - Т. 7. - № 1. - С. 116-132.
12. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
13. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.
14. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. Л., 1977.
15. Габбасов Н.С Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. - 176 с.
16. Агачев Ю.Р. Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений: Дис… кандидата физ.-мат. наук. - Казань, 1987. - 144 с.