

Математическое моделирование рассеяния акустических волн на жестком экране в слоисто-неоднородном полупространстве

А. В. Гахов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The boundary problem of acoustic diffraction on the plain tough screen in a 2 media interface with infinity tough plane side has been considered. The hypersingular integral equation has been constructed using parametric integral conception method. Earlier problems with similar formulation were solved by various authors in two dimensions formulation (half-plane), and in three dimensions – in whole space.

1. Обзор проблемы и математическая постановка задачи

Рассматривается задача рассеяния плоской акустической волны на плоском экране (Рис1, 2), находящемся в слоистом полупространстве на границе раздела слоев (помеченных цифрами 2,3) с различными физическими характеристиками при наличии акустически жесткой стенки (помечена цифрой 1).

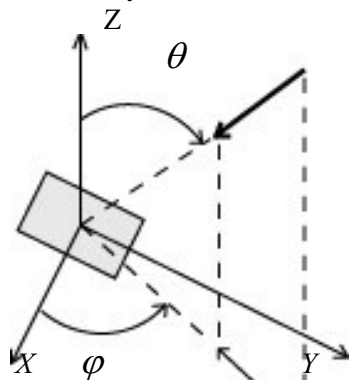


Рис. 1.1 Схема падения плоской волны на жесткий экран Σ

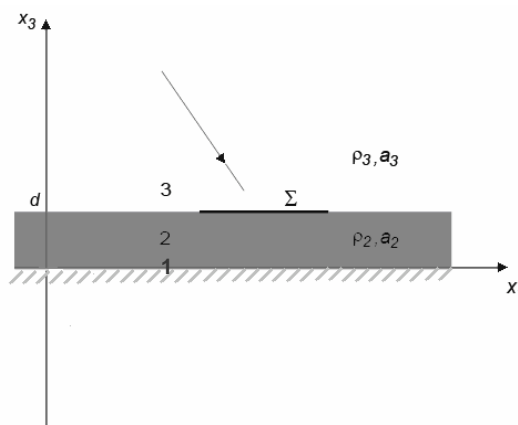


Рис. 2 Физические среды

Данная работа находится в русле подхода к 3-мерной дифракции на плоско-параллельных структурах, который развит в [1-3]. В общих 3-мерных дифракционных задачах используются подходы, основанные на свойствах потенциалов [4-6]. Однако, метод [1] построения псевдодифференциальных (гиперсингулярных) уравнений для плоско-параллельных задач реализуется (для этих задач) проще [3,7]. Данный подход к данным задачам применялся в 2-мерном случае [8]. Наша постановка сложнее, чем в [7,8], но и для нее указанный метод позволил довести решение задачи до ее полной алгоритмизации.

Наша цель – дать вычислительную схему решения рассматриваемой задачи.

В области 3 $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 > d\}$ плотность принимается постоянной и равной ρ_3 , а в области 2 $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid d > x_3 > 0\}$ - постоянной и равной ρ_2 . Волна, падающая из бесконечности и рассеянное поле считаются имеющими постоянную частоту ω , так что волновые числа в слое 3 и 2 равны:

$$k_3 = \frac{\omega}{a_3} \quad (x_3 > d)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{a_2} \quad (d > x_3 > 0)$$

где a_3, a_2 - скорости распространения волн в области 3 и области 2, соответственно.

Поле давлений в средах, отражающее процесс распространения акустических волн, имеет вид:

$$p(x) = v(x) \cdot e^{-i\omega t}$$

В дальнейшем нас будут интересовать только амплитуды волн $v(x)$.

На границе раздела областей 3 и 2, в плоскости

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = d\}$$

рассматривается бесконечно тонкий экран Σ , жестко отражающий звуковую волну в смысле:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \quad (x \in \Sigma)$$

где \vec{n} - вектор нормали к плоскости экрана Σ .

Плоский бесконечно тонкий экран Σ геометрически представляет собой область (не обязательно односвязную) в плоскости X_1OX_2 , граница которой в принималась составленной из отрезков, параллельных осям OX_1 и OX_2 .

Падающее поле в нашей модели рассматривается в форме волны, пришедшей от бесконечно далекого источника, с учетом частичного отражения и преломления на границе слоев, которое имело бы место быть при отсутствии там рассеивателя Σ [9]:

$$\begin{cases} p_1 = 0, & x_3 \leq 0 \\ p_2 = \frac{e^{-i(k_3)_z \cdot d} + Ve^{i(k_3)_z \cdot d}}{e^{-i(k_2)_z \cdot d} + e^{i(k_2)_z \cdot d}} \left(e^{-i(k_2)_z \cdot x_3} + e^{i(k_2)_z \cdot x_3} \right) \cdot e^{i(k_2)_x \cdot x_1}, & 0 < x_3 \leq d \\ p_3 = \left(e^{-i(k_3)_z \cdot x_3} + Ve^{i(k_3)_z \cdot x_3} \right) \cdot e^{i(k_3)_x \cdot x_1}, & x_3 \geq d \end{cases} \quad (1)$$

где V - коэффициент отражения, $(k_j)_x = k_j \cdot \sin \theta, (k_j)_z = k_j \cdot \cos \theta$

Считаем, без сужения общности, что падающая плоская волна p_0 распространяется в плоскости x_1x_3 .

Полное, то есть фактически наблюдаемое в процессе рассеяния (в присутствии рассеивающего экрана Σ) поле, ищем в виде:

$$v = p + w, \quad (2)$$

где w - рассеянное поле, которое следует определить из следующих условий.

1. Выполнение уравнений Гельмгольца в каждом из слоев:

$$\Delta w + k_3^2 w = 0 \quad (x_3 > d) \quad \Delta w + k_2^2 w = 0 \quad (d > x_3 > 0) \quad (3)$$

2. Краевые условия для w определяются необходимым поведением поля v (условие акустически жесткого рассеяния на экране Σ):

$$\forall \tilde{x} = (x_1, x_2) \in R^2$$

$$\left. \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d+0} = - \left. \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=d+0} \quad (4)$$

$$\left. \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d+0} = \left. \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d-0} \quad (5)$$

$$w|_{x_3=d+0} = w|_{x_3=d-0} \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=0+0} = 0 \quad (7)$$

3. Условие на бесконечности для выделения уходящей сферической волны:

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ik_{\perp} w(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\text{равномерно по } x/|x|) \quad (8)$$

4. Условие конечности энергии поля в окрестности $U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)$ края экрана $\partial\Sigma$

$$\int_{U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (9)$$

где край предполагаем состоящим из замкнутых кусочно-аналитических кривых

Поле w , следуя методу интегральных параметрических представлений псевдодифференциальных операторов [1,3], может быть представлено как

$$w(x) = \begin{cases} F^{-1} \left[c_+(\lambda) e^{-(x_3-d)\gamma_+} \right], & x_3 > d \\ F^{-1} \left[c_-^1(\lambda) e^{-x_3\gamma_-} + c_-^2(\lambda) e^{x_3\gamma_-} \right], & 0 < x_3 < d \end{cases} \quad (10)$$

и выражено через функцию

$$u = F^{-1} \left[c_+(\lambda) \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{\gamma_+}{\gamma_-} \frac{e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right) \right] (x_1, x_2), \quad (11)$$

сосредоточенную на экране ($\text{supp } u \subseteq \Sigma$), которая является решением гиперсингулярного интегрального уравнения [10]:

$$u * F^{-1} \left[\frac{-\gamma_+}{\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_3 \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)} \right] = f(x_1, x_2) \quad (12)$$

где $f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\rho_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{x_3=d+0}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, $\gamma_+(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k_3^2}$,

$\gamma_-(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k_2^2}$, $F^{-1}[g](\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} g(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda$, $g = g(\lambda)$, $\tilde{x} = (x_1, x_2)$

2. Стандартизация формы псевдодифференциального уравнения

Рассмотрим ядро сверточного уравнения (12):

$$K = F^{-1} \left[\frac{-\gamma_+}{\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_3 \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)} \right]. \quad (13)$$

Его структуру можно прояснить, выделив растущую и медленно убывающую части (подобно [1,3,7]):

$$\begin{aligned} F[K](\lambda) &= \left[-\gamma_+ \cdot \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_3 \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)^{-1} \right] = \\ &= \left[-\gamma_+ \cdot \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \left(1 + \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}} \right) \right)^{-1} \right] = \\ &= \left[-\gamma_+ \cdot \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}} \right)^{-1} \right] = \\ &= \left[-\frac{\gamma_+}{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}} \right] = \frac{-\gamma_+}{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}} \times \left[\frac{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}}{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}} \right] = \\ &= \frac{-\gamma_+}{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}} \cdot \left[1 - \frac{\frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}}{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{-\gamma_+}{1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}} + \frac{\gamma_+ \cdot \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}}{\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}\right) \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}\right)} = \quad (14)$$

следуя работе [7]

$$= \frac{-\rho_3}{\rho_2 + \rho_3} |\lambda| + \rho_3 \frac{k_3^2 \rho_3 + k_2^2 \rho_2}{2(\rho_2 + \rho_3)^2} \frac{1}{|\lambda|} + R(|\lambda|) + \frac{\gamma_+ \cdot \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}}{\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}\right) \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}\right)} \quad (15)$$

где $R(|\lambda|) = O(|\lambda|^{-3})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Проведем исследование поведения на бесконечности (которая является наиболее интересным случаем слоев с сильно отличающимися характеристиками) для последнего слагаемого из (15).

При $|\lambda| \rightarrow \infty$ отношение $\frac{\gamma_+}{\gamma_-} \rightarrow 1$ тогда

$$\frac{\gamma_+ \cdot \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}}{\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}\right) \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}\right)} \sim \frac{\gamma_+}{e^{2d\gamma_-}} \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0 \quad (16)$$

Такой порядок стремления к 0 позволяет объединить данное слагаемое вместе с $R(|\lambda|)$ в функцию

$$H(|\lambda|) = R(|\lambda|) + \frac{\gamma_+ \cdot \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}}{\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-} \frac{2e^{-2d\gamma_-}}{1 - e^{-2d\gamma_-}}\right) \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+}{\rho_3 \gamma_-}\right)} \quad (17)$$

и, соответственно, представление (14) имеет вид

$$F[K](\lambda) = \frac{-\rho_3}{\rho_2 + \rho_3} |\lambda| + \rho_3 \frac{k_3^2 \rho_3 + k_2^2 \rho_2}{2(\rho_2 + \rho_3)^2} \frac{1}{|\lambda|} + H(|\lambda|) \quad (18)$$

Исходя из (18), получаем, что полученное псевдодифференциальное уравнение (12) является гиперсингулярным интегральным уравнением и принадлежит к классу ядер, рассмотренных в [1,3,7]

Тогда из (18) следует, имея в виду интегральную формулу Зоммерфельда, что

$$K(\tilde{x}) = -\frac{1}{\rho_+ + \rho_-} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \cdot \left(|\tilde{x}|^{-1} \exp(ik_+|\tilde{x}|) \right) - \frac{k_+^2 \rho_+ + k_-^2 \rho_-}{2(\rho_+ + \rho_-)^2} \cdot \left(|\tilde{x}|^{-1} \exp(ik_+|\tilde{x}|) \right) + M(|\tilde{x}|), \quad (19)$$

где $M(\tilde{x}) = F^{-1}[H](\tilde{x}) \in C^{2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$, $(\forall \varepsilon > 0)$

Полученные явные выражения для H (17) и M (19) т.к. при громоздкости они мало информативны и предназначаются исключительно для вычислений.

Если u из уравнения (12) найдено, то значения $w(x)$ определяются (10) как

$$w(x) = u * \tilde{K}(x_3), \quad \tilde{K}(x_3) = \begin{cases} F^{-1} \left[\left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_3 \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)^{-1} e^{-(x_3-d)\gamma_+} \right] (\tilde{x}), & x_3 > d \\ F^{-1} \left[-\frac{\rho_2 \gamma_+ (e^{-x_3\gamma_-} + e^{-x_3\gamma_-})}{\rho_3 \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \left(1 + \frac{\rho_2 \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_3 \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)^{-1} \right], & 0 < x_3 < d \end{cases} \quad (20)$$

3. Построение вычислительной схемы методом дискретных рамок.

Ищем приближение к u (11), зависящее от параметров u_μ и разбиения экрана на ячейки Σ_μ :

$$u = \sum_{\mu=1..N} u_\mu \cdot I_\mu(\tilde{x}), \quad I_\mu(\tilde{x}) = 1, \text{ если } \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_\mu, \text{ иначе } 0; \Sigma_\mu \cap \Sigma_\eta = \emptyset, \mu \neq \eta \quad (21)$$

где Σ_μ - квадратные ячейки сети покрытия. Тогда, используя представление обобщенного ядра по формуле (19), получим:

$$u * K = \sum_{\mu} u_\mu \left(-\frac{1}{\rho_+ + \rho_-} \iint_{\Sigma_\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{1}{|y-\tilde{x}|} dy - \frac{k_+^2 \rho_+ + k_-^2 \rho_-}{2(\rho_+ + \rho_-)^2} \iint_{\Sigma_\mu} \frac{1}{|y-\tilde{x}|} dy + \iint_{\Sigma_\mu} M(|y-\tilde{x}|) dy \right) = \sum_{\mu} u_\mu \left(\tau_1 \cdot \int_{\partial \Sigma_\mu} -\frac{\partial}{\partial y_2} \frac{1}{|y-\tilde{x}|} dy_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{|y-\tilde{x}|} dy_2 + \tau_2 \cdot \iint_{\Sigma_\mu} \frac{1}{|y-\tilde{x}|} dy + \iint_{\Sigma_\mu} M(|y-\tilde{x}|) dy \right) \quad (22)$$

Подстановка в уравнение (12) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно u_μ .

Заключение

Рассмотрена модельная постановка задачи дифракции акустических волн на абсолютно жестком экране, которая, помимо акустики, актуальна также с точки зрения испытания подхода, который обобщается на задачи дифракции электромагнитных волн. Полученная вычислительная схема, вычислительная сложность которой оказывается аналогична схеме [7]. Результаты предназначены для осуществления актуальных вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003. – Харьков-Херсон, 2003. – С.53-58
2. Антоненко А.В., Гандель Ю.В. Численный анализ гиперсингулярного интегрального уравнения задач дифракции на плоском экране // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Випуск 1. - № 590, 2003. - С. 9-14.
3. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель / Гандель Ю.В., Мищенко В.О. // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2006. – № 733. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 6. – С. 58-75
4. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // ДАН СССР, 1984,- т.286, вып. 1., С. 96-100.
5. Anfinogenov A.Yu., Lifanov I.I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction problems. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 1992. – Vol. 7, N 5, P. 387-404.
6. Анфиногенов А.Ю. Численное решение задачи расчёта экологической обстановки в городе по фактору шума методом дискретных особенностей // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 1. - № 590, 2003. - С. 15-18.
7. Гахов А. В., Мищенко В. О. Трёхмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник ХНТУ.-2006.-№2(25)С.135-140
8. Антоненко А.В. Математическая модель на базе МДО многоэлементной полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 5. - № 703, 2005. - С. 25-35.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
10. Гахов А. В. Математическая модель рассеяния акустических волн экраном, расположенном на слое конечной толщины // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ-2007»– Харьков-Херсон, 2007. – С.100-104