Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 775, 2007, с.99-104

УДК 532.546

Применение дискретных особенностей в задаче определения фильтрационных параметров

Г. В. Голубев

Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева, Россия

The engineering specifications analysis is taken as a basis, when filtration–capacitive parameters (FCP) identification methods are developed. Such engineering specifications is kept for the each exploited oil fields. The input data set is specified with that analysis and is used to formulate the corresponding mathematical problem. Different definitions of the FCP identification problem are determined with the opportunity of the different input data sets using.

Данная статья, как и работа [1], посвящена изучению фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах. Но если в [1] упор сделан на решении задачи определения поля давлений, то здесь на задаче определения фильтрационных параметров. В некотором смысле их можно охарактеризовать как прямую и обратную задачи. В исходных предпосылках работ много общего, хотя имеются и отличия. В качестве математической модели среды принимается модель Баренблатта-Желтова. Движение жидкости по трещинам описывается законом Форх=геймера

$$\nabla p = -\mu \frac{\bar{v}_1}{k_1} - \beta\mu \frac{v_1 \overline{v_1}}{k_1}. \quad (1)$$

или в форме, разрешенной по отношению к скорости фильтрации

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \quad (2)$$

где $B_1 = \left(\sqrt{1 + 4\beta|\nabla p|k_1 / \mu} - 1\right) / 2\beta|\nabla p|.$

Здесь использованы обозначения: $\bar{v}_1$ - скорость фильтрации, p – функция давления, k_1 – проницаемость трещин, μ - коэффициент динамической вязкости жидкости, β - некоторая постоянная.

Для движения жидкости в пористых блоках породы можно предложить различные законы фильтрации. В данном сообщении остановим свой выбор на параметрическом законе, при котором скорость фильтрации $\bar{v}_2$ в пористых блоках определяется в виде

$$\bar{v}_2 = -\frac{k_2}{\mu} \frac{|\nabla p| - \lambda_1\beta_1\mu_0}{\lambda_2\beta_1 + \sqrt{\lambda_3\beta_1^2 + |\nabla p|^2}} \nabla p, \ \beta_1 = \alpha \Big/ \sqrt{k_2}, \quad (3)$$

где k_2 – коэффициент проницаемости пористых блоков; λ_1, λ_2, λ_3, μ_0 - параметры, при некоторых значениях которых получается из (3) в качестве частных случаев ряд известных законов фильтрации; α - постоянная.

Из (2) и (3) для суммарного потока получаем

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = -B_2 \nabla p, \qquad (4)$$

где $$B_2 = \frac{\sqrt{1 + 4\beta|\nabla p| k_1 / \mu} - 1}{2\beta|\nabla p|} + \frac{k_2}{\mu} \frac{|\nabla p|\sqrt{k_2} - \lambda_1 \mu_0 \alpha}{\lambda_2 \alpha + \sqrt{\lambda_3 \alpha^2 + |\nabla p|^2 k_2}}.$$

Будем считать коэффициенты проницаемости и трещин и блоков переменными величинами, функциями координат: $k_1 = k_1(x,y)$, $k_2 = k_2(x,y)$.

Проекции скорости фильтрации суммарного потока на оси координат имеют вид

$$v_x = -B_2 \frac{\partial p}{\partial x}, v_y = -B_2 \frac{\partial p}{\partial y},$$

где функция B_2 записана выше.

Выведем основное уравнение фильтрации для трещиновато-пористого пласта. К закону (4) добавляем соотношение, которое получается из уравнения неразрывности суммарного потока и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления. Оно имеет следующий вид в случае фильтрации несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h v_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h v_y\right) + f(x, y, t) = 0, \qquad (5)$$

где h – толщина пласта (в дальнейшем положим h = 1), f – функция плотности отбора (или закачки), t – время.

Подставляя v_x, v_y в соотношение (5), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(B_2 a\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_2 b\right) + f = 0. \qquad (6)$$

Это и есть основное уравнение фильтрации для изучаемого случая, записанное пока в сокращенной форме. Его можно рассматривать или как уравнение для определения функции давления или как уравнение для определения фильтрационного параметра. В уравнении их два: $к_1$ и $к_2$. Поскольку в рамках предлагаемого подхода две неизвестные функции из одного дифференциального уравнения определить не удается, то одну из них следует отнести к числу задаваемых. Разберем алгоритм решения задачи, когда $к_2$ известно, а $к_1$ определяется. Ну, скажем, по результатам обработки кернов или гидродинамических исследований на скважинах для $к_2$ принимается некоторая гипотеза, не противоречащая априорной информации. Рассмотрим задачу определения фильтрационного параметра $к_1(x,y)$ для случая, когда область фильтрации D представляет собой прямоугольник $(0 \le x \le L_1, 0 \le y \le L_2)$, а данные Коши поставлены на двух его сторонах, т.е. заданы в виде

$$k_1(0, y) = \varphi_1(y), \; k_1(x, 0) = \varphi_2(x).$$

Аналогичным образом разбираются и более сложные области фильтрации D. Все величины, входящие в уравнение (6), кроме $k_1(x, y)$, считаются известными. Для задания функции p используется карта изобар месторождения и дискретные логарифмические особенности. Для решения задачи используется известный метод интегральных соотношений. Область D разобьем на M полос прямыми $y=y_j$, (j= 0,1,…M), а уравнение (6) проинтегрируем по y поперек каждой полосы

$$\frac{d}{dx}\int_{y_s}^{y_{s=1}} B_2 a dy + (B_2 b)_{s=1} - (B_2 b)_s = \rho_s(x), (s = 0,1,....M-1) \quad (7)$$

где обозначено $(B_2 a)_s = (B_2 a)_{y=y_s}$.

Равенства (7) представляют собой систему из M интегральных соотношений. Количество этих соотношений определяет желаемую степень приближения к точному решению задачи. Для функции B_2a применим какую-либо интерполяционную формулу, конкретный выбор которой остается в нашем распоряжении Значения функции для любого y будет выражаться при этом через ее значения на линиях $y=y_0,\ldots,y=y_M$:

$$B_2 a = \sum_{j=0}^{M} (B_2 a)_j \beta_j(y) + R_M , \quad (8)$$

где вид интерполяционных функций $\beta_j(y)$ определяется способом интерполяции (или базисными функциями). Величины $(B_2 a)_0,\ldots,(B_2 a)_M$ в (8) зависят только от x, а остаточным членом формулы R_M в дальнейшем пренебрежем.

С учетом (8) интеграл в выражении (7) запишется

$$\int_{y_s}^{y_{s=1}} B_2 a dy = \sum_{j=0}^{M} (B_2 a)_j \alpha_{sj}. \quad (9)$$

Здесь α_{sj} - постоянные коэффициенты, зависящие от вида применяемой интерполяционной формулы. Подставляя (9) в интегральные соотношения (7), получим аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\sum_{j=0}^{M} \alpha_{sj} \frac{d}{dx}(B_2 a)_j + (B_2 b)_{s+1} - (B_2 b)_s = \rho_s(x), (s = 0,1,..., M-1) \quad (10)$$

Учтем, что $B_2a = Ba + B_1a$, а B_1 не содержит неизвестную функцию k_1. Подсчитывая производную $d\,Ba / dx$ и подставляя ее в (10), получим

$$\sum_{j=0}^{M} \alpha_{sj} \left(\frac{a}{\mu\sqrt{1+4\beta|\nabla p|k_1/\mu}}\right)_j \frac{dk_{1j}}{dx} + \sum_{j=0}^{M} \alpha_{sj} \Big[\frac{ak_1|\nabla p|_x}{\mu|\nabla p|\sqrt{1+4\beta|\nabla p|k_1/\mu}} + \frac{dB_1 a}{dx} +$$

$$+ \left(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|k_1/\mu} - 1\right)\frac{d}{dx}\frac{a}{2\beta|\nabla p|}\Big]_j + (B_2 b)_{s+1} - (B_2 b)_s = \rho_s(x), (s = 0,1,..., M-1)$$

(11)

В системе (11) неизвестными функциями являются $k_{11}(x)$, $k_{12}(x),\ldots,k_{1M}(x)$, число которых равно числу уравнений. К ней добавляются данные Коши

$k_{1s}(0) = \varphi_1(y_s)$, $(s=1,2,\ldots,M)$, $k_{10}(x) = \varphi_2(x)$.

Заметим, что в уравнения (11) производные от неизвестных функций $k_{1j}(x)$ входят линейно. Следовательно, соответствующую систему дифференциальных уравнений первого порядка можно привести к нормальной форме Коши, разрешая ее относительно производных

$$\frac{dk_{1s}}{dx} = \sum_{j=1}^{M} \gamma_{sj}(x, k_{1j}), (s = 1,2,..., M), k_{1s}(0) = \varphi_1(y_s), (s = 1,2,..., M),$$

где γ_{sj} - известные функции. Эту систему при применении МИС-а необходимо интегрировать численно. Кроме использованной выше продольной, можно применять также поперечные системы МИС-а. В этом случае область D разбивается на полосы прямыми $x=x_i$, (i=0,1,…,N), а интегрирование уравнения (6) производится по переменной x. В результате получаем аппроксимирующую систему дифференциальных уравнений относительно функций $k_1^1(y), k_1^2(y), ..., k_1^N(y)$, к которой добавляются данные Коши: $k_1^s(0) = \varphi_2(x_s), (s = 1,2,..., N), k_1^0(y) = \varphi_1(y)$. Эту возможность следует учитывать, поскольку по направлению интегрирования аппроксимирующей системы (т.е. вдоль оси x для системы (11)) метод дает лучшее приближение, чем по направлению аппроксимации искомой функции. Следовательно, если заранее известно, что по одному направлению фильтрационный параметр меняется сильнее, чем по другому, то имеет смысл по первому производить интегрирование, а по второму аппроксимацию. Достоинством МИС-а является следующее. При его использовании интегрирование уравнения в частных производных (или системы их) сводится к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для которой имеются хорошо разработанные численные методы и стандартные программы на ПЭВМ. Заметим также, что с помощью метода интегральных соотношений задача определения фильтрационного параметра может быть решена не только для прямоугольника, но и при довольно произвольной форме области. Разбиение ее на полосы в этом случае допустимо производить как прямыми, так и некоторыми кривыми линиями, конфигурацию которых целесообразно выбирать в соответствии с формой границы области. Например, в криволинейном четырехугольнике, ограниченном линиями x=0, y=0, $x=L_1$, $y=\varphi(x)$, в качестве границ полос обычно принимают линии $y=y_m(x)=m\varphi(x)/M$, (m=1,2,…,M-1). Поэтому, МИС называют иногда методом кривых в отличие от более простого метода прямых. Полосы могут покрывать области значительного изменения функций, например, области резкого сгущения изобар, более густо. Будем считать, что при разбиении области на криволинейные полосы каждая разграничительная линия пересекается с прямой x=const только один раз. Интегрируя уравнение (6) поперек произвольной криволинейной полосы с границами $y=y_s(x)$, $y=y_{s+1}(x)$, получим систему интегральных соотношений

$$\frac{d}{dx}\int_{y_s(x)}^{y_{s+1}(x)} B_2 a dy - (B_2 a)_{s+1} \frac{dy_{s+1}(x)}{dx} + (B_2 a)_s \frac{dy_s(x)}{dx} + (B_2 b)_{s+1} - (B_2 b)_s = \int_{y_s(x)}^{y_{s+1}(x)} f dy,$$

$$(s=0,1,\ldots,M-1) \qquad (12)$$

Дальнейшая процедура перехода к системе обыкновенных дифференциальных уравнений остается принципиально такой же, как и ранее. При использовании интерполяционных формул можно применять наряду со сквозной интерполяцией типа (8) также и кусочную. В этом случае фильтрационный параметр представляется через его значения лишь на части линий, являющихся границами полос. Такой прием позволяет упростить аппроксимирующую систему. Относительно простые и достаточно точные двухслойные схемы МИС-а можно составить применением линейной интерполяции по значениям B_2a на границах криволинейной полосы, интегрированием поперек которой получено соотношение. Приведем вид аппроксимирующей системы, полученной из интегральных соотношений (12) в случае, когда границами раздела полос являются прямые

$$y_s = s\, d\, x / M + s\, e / M, \quad (d, e = \mathrm{const}), \qquad (s=0,1,\dots,M-1) \qquad (13)$$

Применим линейную интерполяцию

$$B_2 a = B_2(x,y_{s+1})\, a(x,y_{s+1})\, (y - y_s(x)) / l_s(x) + B_2(x,y_s)\, a(x,y_s)\, (y_{s+1}(x) - y)/l_s(x), \quad (14)$$

После проведения соответствующих выкладок получим следующие уравнения аппроксимирующей системы

$$\chi_{s+1}(x)\frac{dk_{1,s+1}(x)}{dx} + \chi_s(x)\frac{dk_{1s}(x)}{dx} + \left(\frac{ak_1|\nabla p|_x}{\mu A|\nabla p|}\right)_{s+1}\frac{l_s(x)}{2} + (A_{s+1}-1)\frac{l_s(x)}{2}\left(\frac{d}{dx}\frac{a}{2\beta|\nabla p|}\right)_{s+1} +$$

$$+\frac{l_s(x)}{2}\left(\frac{dB_1 a}{dx}\right)_{s+1} + \left(\frac{ak_1|\nabla p|_x}{\mu A|\nabla p|}\right)_s\frac{l_s(x)}{2} + (A_s-1)\frac{l_s(x)}{2}\left(\frac{d}{dx}\frac{a}{2\beta|\nabla p|}\right)_s + \frac{l_s(x)}{2}\left(\frac{dB_1 a}{dx}\right)_s +$$

$$+B_{2,s+1}(x)a_{s+1}(x)d/2M + B_{2s}(x)a_s(x)d/2M - (B_2 a)_{s+1}(s+1)d/M + (B_2 a)_s sd/M +$$

$$+(B_2 b)_{s+1} - (B_2 b)_s = \rho_s(x), (s = 0,1,\dots, M-1), \qquad (15)$$

где обозначено

$$\chi_s(x) = a_s(x) l_s(x)/2\mu A_s(x), A = \sqrt{1 + 4\beta|\nabla p| k_1/\mu}, l_s(x) = dx/M + e/M,$$

а в коэффициенты, например, χ (x ,y_s) подставлено уравнение линии y_s=sdx/M+se/M.

Разберем также случай, когда прямоугольная область разбивается на полосы одинаковой ширины прямыми $y=y_j$, система интегральных соотношений имеет вид (7), а для функции B_2a применяется сплайн-аппроксимация по y , т.е. когда она ищется в виде линейной комбинации произведений одномерных линейных сплайнов на соответствующие значения функции

$$B_2 a = \sum_{j=0}^{M} (B_2 a)_j\, \omega_{yj}(y), \qquad (16)$$

где $\omega_{yj}=(y-y_{j-1}) / 1$, если $y\in[y_{j-1},y_j]$, $\omega_{yj}=(y_{j+1}-y) / 1$, если $y \in [y_j,y_{j+1}]$,
$\omega_{yj}=0$, если $y\notin[y_{j-1}, y_{j+1}]$.

Тогда аппроксимирующая система примет следующий вид

$$\chi_{s+1}(x)\frac{dk_{1,s+1}}{dx} + \chi_s(x)\frac{dk_{1,s}}{dx} + \left(\frac{ak_1|\nabla p|_x}{\mu A|\nabla p|}\right)_{s+1} + \left(\frac{ak_1|\nabla p|_x}{\mu A|\nabla p|}\right)_s + (A_{s+1}-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{a}{2\beta|\nabla p|}\right)_{s+1} +$$

$$+(A_s-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{a}{2\beta|\nabla p|}\right)_s + \left(\frac{dB_1 a}{dx}\right)_{s+1} + \left(\frac{dB_1 a}{dx}\right)_s + 2(B_2 b)_{s+1}/l - 2(B_2 b)_s/l = 2\rho_s(x)/l,$$

$$(s=0,1,\dots,M-1) \qquad (17)$$

где $\chi_s(x) = a_s(x) / \mu A_s(x)$.

По предложенным алгоритмам проводились расчеты примеров в случаях существования точного аналитического решения задачи. Рассматривалась плоско-радиальная фильтрация к центральной скважине в круговом пласте.

Брались линейные и экспоненциальные распределения проницаемостей в трещинах и блоках. Изучались следующие варианты для $k_1(r)$ и $k_2(r)$:

1. $k_1(r) = a_1(r+b_1)$, $k_2(r) = a_2(r+b_2)$,
2. $k_1(r) = a_1(r+b_1)$, $k_2(r) = a_2 e^{b_2 r}$.
3. $k_1(r) = a_1 e^{b_1 r}$, $k_2(r) = a_2(r+b_2)$,
4. $k_1(r) = a_1 e^{b_1 r}$, $k_2(r) = a_2 e^{b_2 r}$.

где a_1, b_1, a_2, b_2 – постоянные величины. Находились соответствующие распределения давления. Например, в случае 1 давление p имеет вид

$$p = p_k - \frac{\mu}{2\beta a_2}\ln\frac{r+b_2}{r_k+b_2}\left(\frac{a_1}{a_2}+1-\frac{Q\beta}{\pi h b_2}\right) - \frac{\mu a_1}{2\beta a_2^2}\frac{(b_1-b_2)(r-r_k)}{(r_k+b_2)(r+b_2)} +$$

:

$$+\frac{\mu Q}{2\pi h a_2 b_2}\ln\frac{r}{r_k}+\frac{\mu}{2\beta}D(r),$$

где через D(r) обозначен интеграл достаточно сложного вида. Эти точные решения и использовались в дальнейшем. В проведенных расчетах погрешность приближенного решения оказалась в пределах практических требований точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев Г. В. Решение некоторых задач фильтрации с использованием дискретных логарифмических особенностей. Труды XIII Межд. Симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон, 2007.-с.121-125
2. Шаймуратов Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980, 224 с.
3. Голубев Г.В. // Труды матем. центра им. Лобачевского, т. 7, Казань, «ДАС», 2000, с. 94 – 103.