

## Взаимодействие системы осесимметричных вихревых колец в круглой трубе постоянного поперечного сечения

А. А. Гуржий

*Институт гидромеханики НАНУ, Украина*

The problem on an interaction of a system of vortex rings with the small, but nonzero circular cross section, in an endless pipe with circular cross section is considered in approaching of ideal incompressible fluid. A system of imaginary discrete vortex rings are introduced to satisfy boundary conditions. Vortices are placed on some fixed distance from the boundary. Researches show that a displacement of imaginary vortices from the boundary results in a substantial improvement of a velocity field in regions adjoining to the boundary. The internal surface of a circular pipe substantially slows the axial motion of a system of vortex rings are shown.

### 1. Введение

В последнее время метод дискретных особенностей [1,2] получил широкое распространение при решении различных задач динамики жидкости и газа. Очевидная привлекательность и простота численной реализации метода открывают перед исследователями новые возможности для решения и анализа полученных результатов различных прикладных задач со сложной геометрией течения.

Одним из приложений метода дискретных особенностей является введение в рассматриваемое течение системы мнимых дискретных вихрей и системы контрольных точек на поверхности твердых тел, ограничивающих течения [3]. Интенсивности вихрей для случая идеальной несжимаемой жидкости определяются из граничного условия для скорости или для функции тока

$$U_n|_S = 0 \quad \text{или} \quad \Psi|_S = const, \quad (1)$$

где  $U_n$  - нормальная к поверхности компонента скорости.

Выбор соответствующего набора системы контрольных точек позволяет свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно интенсивностей системы мнимых вихрей и, тем самым, выполнить необходимые граничные условия на всей ограничивающей течение твердой поверхности.

Среди широкого круга задач, имеющих большое практическое значение, следует выделить задачу о перемешивании жидкостей. Явление перемешивания жидкостей относится к числу сложных физических явлений. Можно выделить два наиболее важных механизма перемешивания: диффузионный механизм, вызванный молекулярным движением, и конвекционный, вызванный движением сплошной среды. В некоторых случаях, анализ масштабов задачи показывает, что диффузионным механизмом можно пренебречь. Тогда задача о перемешивании сводится к анализу траекторий лагранжевых частиц в эйлеровом поле скорости. В современной литературе [4,5] эта задача получила название задачи об адвекции. Исследования [6,7] показывают, что основной причиной

деформации выделенных областей пассивной жидкости являются отличные от нуля градиенты компонент поля скорости.

Применительно к задачам о перемешивании жидкостей применение метода дискретных особенностей оказывается ограниченным. Вероятно, это вызвано наличием сингулярностей в поле скорости, в непосредственной близости к границам. Эти области как раз и являются источником интенсивного перемешивания жидкостей.

Настоящие исследования посвящены адаптации известного метода дискретных особенностей [1,2] применительно к задачам о перемешивании жидкостей осесимметричными вихревыми кольцами в бесконечной круговой трубе, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Целью настоящих исследований является решение гидродинамической задачи с распределением поля скорости, которое не имело бы сингулярностей на поверхности границ и одновременно удовлетворяло бы указанным ранее граничным условиям наилучшим образом. Выявление основных закономерностей взаимодействия вихревых колец существенным образом упрощает дальнейший анализ задачи о перемешивании жидкостей.

## 2. Уравнения движения вихревых колец в безграничной среде

Пусть в идеальной безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности, имеется система  $N$  тонких коаксиальных вихревых колец, движущихся вдоль общей оси симметрии  $Oz$  цилиндрической системы координат  $(r, \phi, z)$ . Течение жидкости внутри колец вихревое ( $rot \mathbf{V} = \omega$ ), а вне их – потенциальное ( $rot \mathbf{V} = 0$ ). Каждое вихревое кольцо с интенсивностью  $\Gamma_i = const$  определяется осевым положением  $Z_i$ , радиусом  $R_i$  и радиусом кругового поперечного сечения  $a_i \ll R_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Процесс движения тонких коаксиальных вихревых колец описывается моделью Дайсона [8] и сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{R}_i = \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \quad \dot{Z}_i = \frac{\Gamma_i}{4\pi R_i} \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i}, \quad a_i^2 R_i = const, \quad (2)$$

где

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{4\pi} \sqrt{R_i R_j} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k} \mathbf{E}(k) \right],$$

$$k^2 = \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}$$

с начальными условиями  $R_i(0) = R_i^0$ ,  $Z_i(0) = Z_i^0$ ,  $a_i(0) = n_i^0 R_i^0$  при  $n_i^0 \ll 1$ . Здесь  $\mathbf{K}(k)$  и  $\mathbf{E}(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно. Штрих под знаком суммы означает  $i \neq j$ .

Система уравнений (2) обладает двумя независимыми инвариантами

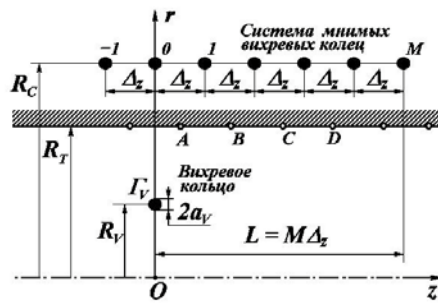


Рис.1. Положение системы мнимых вихревых колец.

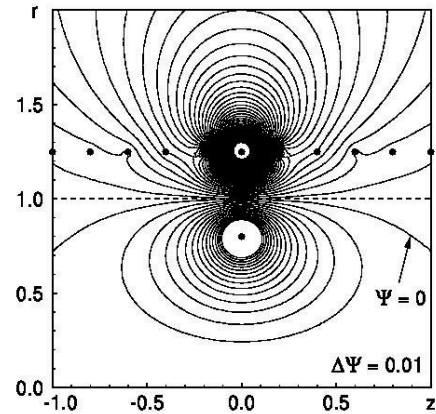


Рис.2. Распределение функции тока при выполнении граничного условия для скорости.

$$P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2 = const, \quad E = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 R_i \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + U = const, \quad (3)$$

выражающими закон сохранения импульса вдоль оси движения колец и закон сохранения энергии колец. Во втором выражении слагаемое под знаком суммы определяет энергию изолированных колец, а функция U – энергию их взаимодействия.

### 3. Уравнения движения вихревых колец в круглой трубе

Рассмотрим сначала задачу о движении одиночного осесимметричного вихревого кольца радиуса  $R_V$ , интенсивности  $\Gamma_V$  с малым круговым поперечным сечением  $a_V$  ( $a_V \ll R_V$ ) внутри бесконечного цилиндра (трубы) с постоянным радиусом  $R_T$ . Пусть геометрический центр вихревого кольца совпадает с началом цилиндрической системы координат  $(r, z)$ , как показано на рис.1.

Для выполнения граничного условия для скорости (на твердой поверхности  $U_R = 0$ ) введем систему  $2M+1$  мнимых вихревых нитей с одинаковыми радиусами  $R_C$  и переменными интенсивностями  $\Gamma_m$ . Пусть мнимые вихревые нити удалены друг от друга на одинаковое расстояние  $\Delta_z$  в осевом направлении с обеих сторон плоскости действительного кольца. Для определения значений интенсивностей  $\Gamma_m$  мнимых вихрей выберем систему контрольных точек на внутренней поверхности цилиндра с  $Z_m = (m + 1/2)\Delta_z$ , которые обозначены буквами А, В и т.д. на рис.1.

В контрольных точках накладываем условие равенства нулю значения радиальной компоненты скорости, наведенной как со стороны действительного вихревого кольца, так и со стороны системы мнимых вихревых нитей,

формирующих мнимый вихревой слой. В результате получаем линейную алгебраическую систему уравнений

$$[\mathbf{A}_{jm}^{(U)}] \Gamma_m = \mathbf{B}_j^{(U)}, \quad (4)$$

где

$$[\mathbf{A}_{jm}^{(U)}] = \frac{Z_m - Z_l}{R_{\max}^{(ml)}} \left[ \mathbf{K}(k_{ml}) - \mathbf{E}(k_{ml}) - \frac{2R_C R_T}{(R_{\min}^{(ml)})^2} \mathbf{E}(k_{ml}) \right],$$

$$\mathbf{B}_j^{(U)} = \Gamma_V \frac{Z_V - Z_m}{R_{\max}^{(m)}} \left[ \mathbf{K}(k_m) - \mathbf{E}(k_m) - \frac{2R_V R_T}{(R_{\min}^{(m)})^2} \mathbf{E}(k_m) \right], \quad (5)$$

$$Z_m = Z_V + \Delta_z m, \quad Z_l = Z_V + \Delta_z (m + 1/2), \quad m = -M, \dots, M,$$

$$[R_{\max}^{(ml)}]^2 = (R_0 + R_T)^2 + (Z_m - Z_l)^2, \quad [R_{\min}^{(ml)}]^2 = (R_0 - R_T)^2 + (Z_m - Z_l)^2,$$

$$[R_{\max}^{(m)}]^2 = (R_V + R_T)^2 + (Z_V - Z_m)^2, \quad [R_{\min}^{(m)}]^2 = (R_V - R_T)^2 + (Z_V - Z_m)^2,$$

$$k_{ml}^2 = (4R_0 R_T) / [R_{\max}^{(ml)}]^2, \quad k_m^2 = (4R_V R_T) / [R_{\max}^{(m)}]^2.$$

После определения значений  $\Gamma_m$  находим распределение поля функции тока

$$\Psi(r, z) = \Psi_V(r, z) + \Psi_m(r, z), \quad (6)$$

где

$$\Psi_V(r, z) = \frac{\Gamma_V \sqrt{R_V r}}{2\pi} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k} \mathbf{E}(k) \right],$$

$$\Psi_m(r, z) = \sum_{m=-M}^M \frac{\Gamma_m \sqrt{R_C r}}{2\pi} \left[ \left( \frac{2}{k_m^*} - k_m^* \right) \mathbf{K}(k_m^*) - \frac{2}{k_m^*} \mathbf{E}(k_m^*) \right],$$

$$k^2 = 4R_V r / [(R_V + r)^2 + (Z_V - z)^2], \quad (k_m^*)^2 = 4R_C r / [(R_C + r)^2 + (Z_m - z)^2].$$

В качестве примера рассмотрим одиночное вихревое кольцо ( $R_V = 0.8$ ,  $Z_V = 0.0$  и  $\Gamma_V = 1.0$ ) в круглой трубе радиуса  $R_T = 1.0$  для  $M = 6$ ,  $R_C = 1.2$  и  $\Delta_z = 0.2$ . Решение системы уравнений дает  $\Gamma_M = -1.230$ ,  $\Gamma_{M+1} = \Gamma_{M-1} = 0.227$ ,  $\Gamma_{M+2} = \Gamma_{M-2} = -0.009$  и т.д. Распределение функции тока в области, прилегающей к вихревому кольцу, показано на рис.2. Видно, что граничные условия по функции тока выполняются неточно: функция тока на твердой поверхности не достигает нулевого значения. Для сравнения заметим, что  $\Psi_V(R_T, 0) = 0.229$ .

Для получения количественной оценки, характеризующей степень невыполнения граничного условия, введем функцию  $E_\Psi(z) = \Psi(R_T, z) - \Psi_S$ . В нашем случае значение функции тока на поверхности  $\Psi_S = 0$ , поэтому  $E_\Psi(z) = \Psi(R_T, z)$ . На рис.3 показана зависимость  $E_\Psi(z)$ . Видно, что наибольшее “невыполнение” граничного условия имеет место как раз в области, прилегающей к вихрю.

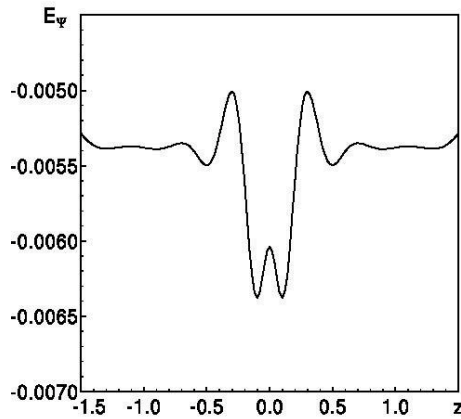


Рис.3. Зависимость ошибки выполнения граничного условия для скорости на поверхности трубы.

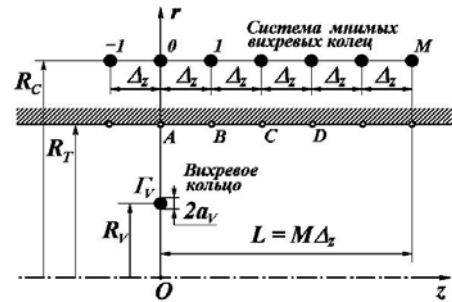


Рис.4. Альтернативное положение системы мнимых вихревых колец.

Рассмотрим аналогичную задачу, но теперь выполним на внутренней поверхности трубы граничные условия для функции тока (1). Введем систему  $2M + 1$  мнимых вихревых нитей с одинаковыми радиусами  $R_C$  и переменными интенсивностями  $\Gamma_m$ . Пусть, как и ранее, мнимые вихревые нити удалены друг от друга на одинаковое расстояние  $\Delta_z$  в осевом направлении с обеих сторон плоскости действительного кольца. По аналогии выберем систему контрольных точек на внутренней поверхности цилиндра с  $Z_m = m\Delta_z$ , которые обозначены буквами А, В и т.д. на рис.4.

В контрольных точках накладываем условие равенства нулю значения функции тока, наведенной как со стороны действительного вихревого кольца, так и со стороны системы мнимых вихревых нитей. В конечном итоге получаем линейную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных  $\Gamma_m$

$$[\mathbf{A}_{jm}^{(\Psi)}] \Gamma_m = \mathbf{B}_j^{(\Psi)}, \tag{7}$$

где 
$$[\mathbf{A}_{jm}^{(\Psi)}] = \sqrt{R_m R_T} \left[ \left( \frac{2}{k_{ml}} - k_{ml} \right) \mathbf{K}(k_{ml}) - \frac{2}{k_{ml}} \mathbf{E}(k_{ml}) \right],$$

$$\mathbf{B}_j^{(\Psi)} = \Gamma_V \sqrt{R_V R_T} \left[ \left( \frac{2}{k_m} - k_m \right) \mathbf{K}(k_m) - \frac{2}{k_m} \mathbf{E}(k_m) \right],$$

$$Z_m = Z_V + \Delta_z m, \quad Z_l = Z_V + \Delta_z m, \quad m = -M, \dots, M.$$

Остальные обозначения совпадают с (5).

Для проведения сравнительного анализа рассмотрим одиночное вихревое кольцо в трубе радиуса с параметрами, указанными ранее. Решение системы уравнений дает  $\Gamma_M = -1.218$ ,  $\Gamma_{M+1} = \Gamma_{M-1} = 0.225$ ,  $\Gamma_{M+2} = \Gamma_{M-2} = -0.010$  и т.д. Распределение функции тока в области, прилегающей к вихревому кольцу,

показано на рис.5. Видно, что граничные условия по функции тока выполняются значительно лучше. На рис.6 показана зависимость  $E_\Psi(z)$  для рассматриваемого случая. Видно, что наибольшее “невыполнение” граничного условия для функции тока тоже имеет место в области, прилегающей к вихрю. Однако граничные условия (при равных других параметрах задачи) выполнены на порядок лучше по сравнению со случаем выполнения граничного условия для скорости.

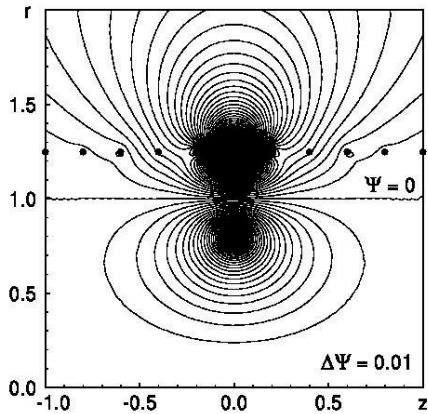


Рис.5. Распределение функции тока при выполнении граничного условия для функции тока.

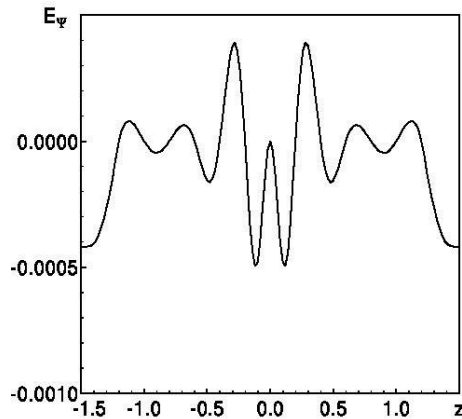


Рис.6. Зависимость ошибки выполнения граничного условия для функции тока на поверхности трубы.

В рассматриваемой задаче осталось невыясненным влияние параметров мнимого вихревого слоя на точность выполнения граничных условий. Понятно, что увеличение числа мнимых вихрей  $M$  приводит к увеличению числа контрольных точек на внутренней поверхности трубы и, следовательно, к уменьшению ошибки выполнения граничного условия. Исследования показывают, что чрезмерное увеличение, равно как и чрезмерное уменьшение расстояния  $\Delta_z$  между мнимыми вихрями приводит к увеличению ошибки при выполнении граничного условия. На рис.7 показана зависимость максимальной ошибки  $\{E_\Psi(z)\}_{\max}$  от расстояния между вихрями. Видно, что для фиксированного значения  $M$  существует оптимальное значение  $\Delta_z$ , при котором достигается минимальная ошибка.

Аналогичная зависимость точности выполнения граничных условий проявляется при удалении вихревого слоя от поверхности цилиндра, показанная на рис.8. Исследования показывают, что наилучшее выполнение граничного условия имеет место при  $R_c R_v = R_T^2$ . Заметим, что это условие в точности совпадает для выражения, связывающего радиусы действительного и мнимого вихревых колец при движении осесимметричного вихревого кольца внутри сферы [4].

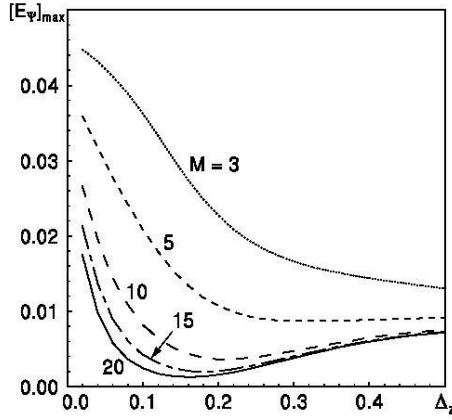


Рис.7. Зависимость максимальной ошибки при выполнении граничного условия для функции тока от параметров системы мнимых вихрей.

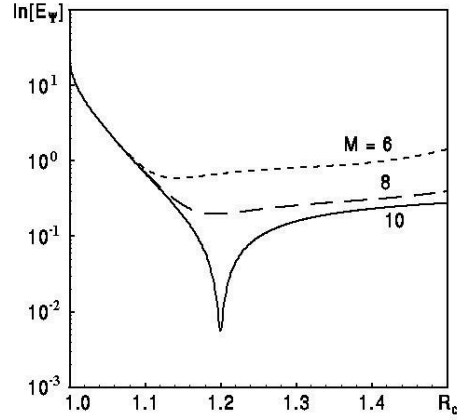


Рис.8. Зависимость точности выполнения граничного условия от удаления мнимых вихрей от поверхности трубы.

Исследования показывают, что для различного осевого положения системы мнимых вихревых нитей и их радиусов решение задачи с использованием граничного условия для функции тока дает последовательность интенсивностей  $\Gamma_m$ , суперпозиция полей которых дает хорошее выполнение граничного условия для функции тока. При этом максимальная локальная ошибка не превышает (1–2)% по отношению к максимальному значению функции тока, наведенному действительным вихревым кольцом. Следовательно, в случае движения двух и более действительных вихревых колец в трубе можно использовать общий вихревой слой мнимых вихревых нитей.

Таким образом, процесс движения системы осесимметричных вихревых колец в трубе с круговым поперечным сечением описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (2) с функцией

$$R_i = \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U_m}{\partial Z_i}, \quad Z_i = \frac{\Gamma_i}{4\pi R_i} \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial U_m}{\partial Z_i}, \quad a_i^2 R_i = const, \quad (8)$$

$$\text{где } U_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{4\pi} \sqrt{R_i R_j} \left[ \left( \frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) \mathbf{K}(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} \mathbf{E}(k_{ij}) \right] + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{m=-m}^M \frac{\Gamma_i \Gamma_m}{4\pi} \sqrt{R_i R_m} \left[ \left( \frac{2}{k_{im}} - k_{im} \right) \mathbf{K}(k_{im}) - \frac{2}{k_{im}} \mathbf{E}(k_{im}) \right].$$

с начальными условиями  $R_i(0) = R_i^0$ ,  $Z_i(0) = Z_i^0$ ,  $a_i(0) = n_i^0 R_i^0$ . Функция  $U_m$  содержит две группы сумм, первая из которых отвечает за вклад системы действительных вихревых колец в рассматриваемой системе, а вторая группа описывает вклад системы мнимых вихревых нитей, интенсивность которых определяется после решения системы уравнений (7).

Система уравнений (8), по аналогии со случаем движения системы вихревых колец в безграничной жидкости, обладает двумя независимыми инвариантами. Первый инвариант, выражающий закон сохранения импульса вдоль оси движения, следует непосредственно из структуры уравнений движения (8). Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial U_m}{\partial Z_i} = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i \dot{R}_i = 0 \quad (9)$$

Следовательно

$$P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2 = const. \quad (10)$$

Совпадение выражений для инвариантов, выражающих закон сохранения импульса вдоль оси движения для безграничного пространства (3а) и для круглой трубы (10) вполне очевидно, поскольку бесконечная прямолинейная круглая труба с идеальной жидкостью не оказывает влияния на импульс жидкости.

Второй инвариант, выражающий закон сохранения кинетической энергии движения жидкости, можно получить следующим образом. Умножая первое уравнение (8) на  $\Gamma_i R_i \dot{Z}_i$ , а второе уравнение – на  $\Gamma_i R_i \dot{R}_i$ , определяем суммирование по индексу, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 \dot{R}_i \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U_m}{\partial R_i} \dot{R}_i + \frac{\partial U_m}{\partial Z_i} \dot{Z}_i \right) = 0, \quad (11)$$

Интегрирование приведенного выражения с учетом условия  $a_i^2 R_i = const$  дает

$$E = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 R_i \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + U_m = const. \quad (12)$$

Как и ранее, слагаемое под знаком суммы выражает кинетическую энергию вихревых колец, а функция  $U_m$  определяет кинетическую энергию движения жидкости, вызванное системой действительных и мнимых вихревых колец.

#### 4. Движение одиночного вихревого кольца в трубе

Рассмотрим одиночное вихревое кольцо радиуса  $R_V$  интенсивности  $\Gamma_V$  с поперечным сечением  $a = nR_V$  в круглой трубе радиуса  $R_T$ . В этом случае уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{R}_V &= 0, \\ \dot{Z}_V &= \frac{\Gamma_V}{4\pi R_V} \left( \ln \frac{8R_V}{a_V} - \frac{1}{4} \right) + \\ &+ \sum_{m=-M}^M \frac{\Gamma_m}{2\pi [R_{\max}^{(m)}]} \left[ \mathbf{K}(k_m) - \mathbf{E}(k_m) - \frac{R_C (R_C - R_V)}{[R_{\min}^{(m)}]^2} \mathbf{E}(k_m) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

с обозначениями, принятыми ранее.



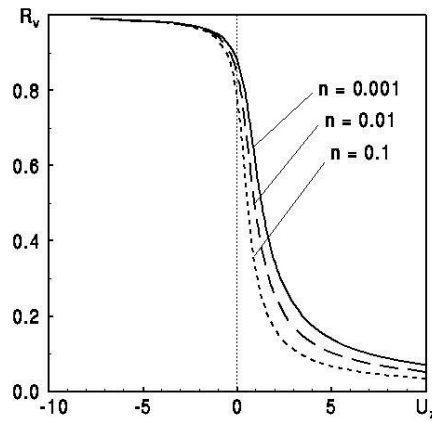


Рис.9. Осевая скорость вихревого кольца.

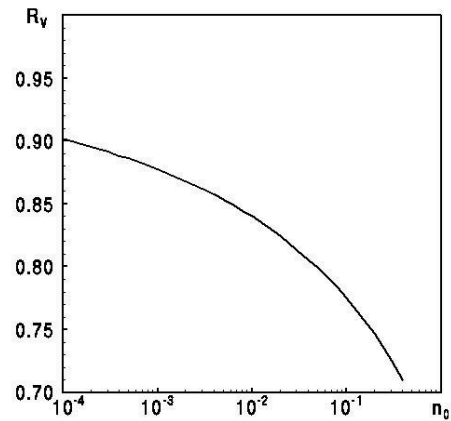


Рис.10. Зависимость радиуса кольца при стационарном состоянии от толщины поперечного сечения кольца.

Анализ уравнений для осевой составляющей показывает, что самоиндуцированная скорость и скорость, наведенная системой вихревых нитей, имеют разные знаки. Для вихревого кольца малого радиуса по сравнению с радиусом трубы осевая скорость практически не отличается от скорости изолированного вихревого кольца в безграничном пространстве. По мере увеличения радиуса кольца наведенная компонента скорости возрастает. На рис.9 показана зависимость осевой скорости вихревого кольца интенсивности  $\Gamma_v = 1.0$  в трубе с  $R_T = 1.0$  для различных относительных толщин  $n$  кольца. Видно, что для вихревых колец с радиусами, соизмеримыми с радиусом трубы, скорость движения вихревого кольца меняет свой знак, и кольца движутся в противоположную сторону по отношению к направлению самоиндуцированной скорости.

Заметим, что критическое значение радиуса вихревого кольца, при котором оно покоится в круглой трубе, зависит от толщины ядра вихревого кольца. С увеличением относительной толщины кольца значение критического радиуса возрастает. Эта зависимость показана на рис.10.

На рис.11,а показано распределение функции тока вихревого кольца радиуса  $R_v = 0.8$  и интенсивности  $\Gamma_v = 1.0$  в системе координат, движущейся с вихревым кольцом. Видно, что вихревое кольцо вовлекает в собственное движение часть близлежащей жидкости, образуя так называемое “вихревое облако”. Как только радиус вихревого кольца становится больше критического значения, “вихревое облако” резко меняет свою форму. На рис.11,б показан случай для  $R_v = 0.9$ . При переходе радиуса через критическое значение вихревое облако кольца резко меняет свою форму. Это значит, что при изменении радиусов колец, движущихся в круглой трубе, следует ожидать интенсивных режимов перемешивания пассивной жидкости.

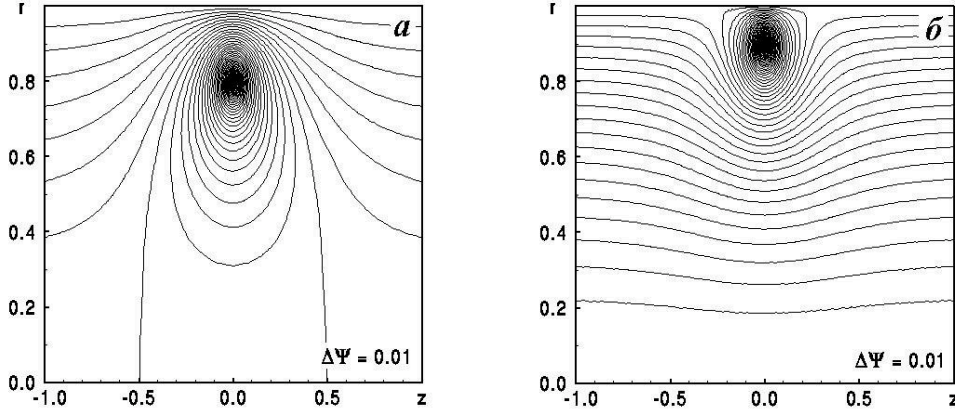


Рис.11. Распределение функции тока одиночного кольца,

### 5. Движение двух вихревых колец в круглой трубе

Пусть два осесимметричных вихревых кольца интенсивности  $\Gamma_i$ , радиуса  $R_i$  и радиуса  $a_i$  ( $i=1,2$ ) поперечного сечения колец расположены внутри круглой трубы с радиусом  $R_T$ , заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, спокойной на бесконечности. Пусть кольца имеют осевое положение  $Z_i$ . В этом случае уравнения движения первого кольца приобретают следующий вид

$$\dot{R}_1 = \frac{\Gamma_2(Z_1 - Z_2)}{2\pi R_1 R_{\max}^{[12]}} \left[ \mathbf{K}(k_{12}) - \mathbf{E}(k_{12}) - \frac{2R_1 R_2}{[R_{\min}^{[12]}]^2} \mathbf{E}(k_{12}) \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 = & \frac{\Gamma_1}{4\pi R_1} \left( \ln \frac{8R_1}{a_1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\Gamma_2}{2\pi [R_{\max}^{(12)}]} \left[ \mathbf{K}(k_{12}) - \mathbf{E}(k_{12}) - \frac{R_2(R_2 - R_1)}{[R_{\min}^{(12)}]^2} \mathbf{E}(k_{12}) \right] + \\ & + \sum_{m=-M}^M \frac{\Gamma_m}{2\pi [R_{\max}^{(m)}]} \left[ \mathbf{K}(k_m) - \mathbf{E}(k_m) - \frac{R_C(R_C - R_V)}{[R_{\min}^{(m)}]^2} \mathbf{E}(k_m) \right] \end{aligned}$$

с обозначениями, принятыми ранее. Уравнения движения второго кольца имеют аналогичную структуру.

Система уравнений (14) обладает двумя инвариантами (10) и (12), которые можно записать в виде

$$P = P_1 + P_2 = const, \quad E = E_1 + E_2 + E_{12} + E_{21} + E_{1m} + E_{2m} = const, \quad (15)$$

$$P_i = \Gamma_i R_i^2, \quad E_i = \Gamma_i^2 R_i \left( \ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right),$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \sqrt{R_1 R_2} \left[ \left( \frac{2}{k_{12}} - k_{12} \right) \mathbf{K}(k_{12}) - \frac{2}{k_{12}} \mathbf{E}(k_{12}) \right],$$

$$E_{im} = \sum_{m=-m}^M \frac{\Gamma_i \Gamma_m}{4\pi} \sqrt{R_i R_m} \left[ \left( \frac{2}{k_{im}} - k_{im} \right) \mathbf{K}(k_{im}) - \frac{2}{k_{im}} \mathbf{E}(k_{im}) \right],$$

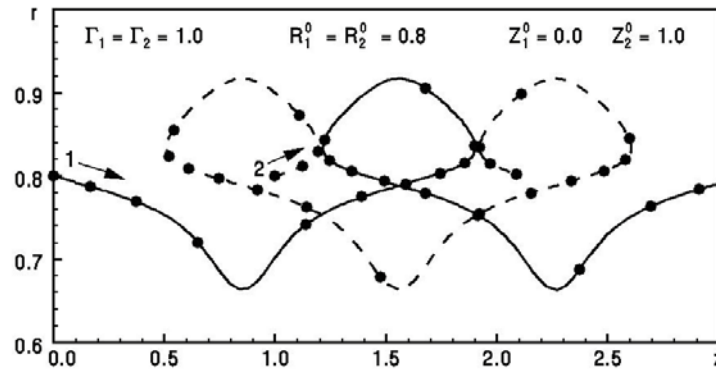


Рис.12. Траектории движения двух одинаковых вихревых колец в круглой трубе.

где  $P_1$  и  $P_2$  - импульсы первого и второго вихревых колец, соответственно. Здесь  $E_1$  и  $E_2$  - кинетические энергии действительных вихревых колец,  $E_{12}$  и  $E_{21}$  - взаимная энергия, наведенная со стороны одного действительного кольца на другое, а  $E_{1m}$  и  $E_{2m}$  - энергия взаимодействия действительных и мнимых вихревых колец.

Рис.12 иллюстрирует пример взаимодействия двух одинаковых ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0$ ,  $R_1 = R_2 = 0.8$ ,  $n_1 = n_2 = 0.01$ ) вихревых колец, расположенных в начальный момент в точках с  $Z_1 = 0.0$ ,  $Z_2 = 1.0$ . Сплошной линией на рисунке обозначена траектория первого вихревого кольца, а пунктирной – второго вихря. Кружочками показаны положения колец через равные интервалы времени  $\Delta t = 0.5$ , стрелками указаны направления их движения. Видно, что вихревые кольца участвуют в периодическом движении, попеременно проскакивают одно сквозь другое. Интересно заметить, что периодическое взаимодействие (так называемая “чехарда” колец) характерна для колец в безграничном пространстве [8]. Отличие заключается в том, что при наличии твердой границы имеется интервал времени, в течении которого кольца движутся в обратном направлении.

На рис.13 и 14 показаны изменения во времени компонент импульса (15,а) и энергии (15,б) в процессе взаимодействия колец. Видно, что энергия действительных колец и энергия их взаимодействия достигает максимума в момент проскакивания одного кольца сквозь другое.

### 6. Выводы

Решена задача о взаимодействии системы осесимметричных вихревых колец в круглой трубе, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. В исследованиях использован метод дискретных особенностей, адаптированный к осесимметричному случаю взаимодействия вихрей, с дополнительным требованием гладкости в представлении поля скорости течения в областях, прилегающих к границам. Это требование является необходимым при проведении дальнейшего анализа процесса перемешивания пассивной примеси вихревыми структурами в трубах.

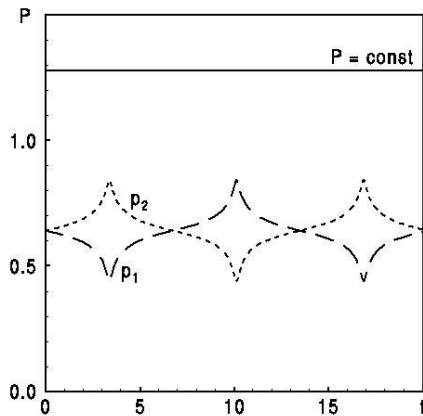


Рис.13. Изменение составляющих инварианта импульса во времени.

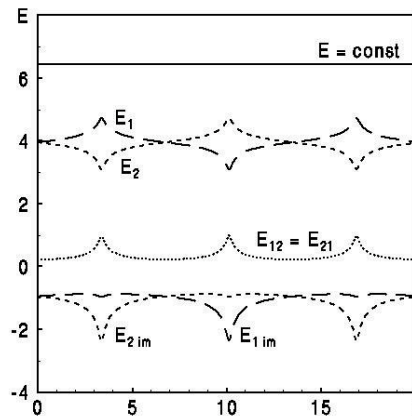


Рис.14. Изменение составляющих инварианта энергии во времени.

Для достижения гладкости представления поля течения в работе предложено введение системы мнимых вихревых нитей равного радиуса, которые удалены от твердой поверхности на фиксированное расстояние. Исследования показывают, что существует такое значение их радиуса, при котором достигается выполнение граничных условий наилучшим образом.

Показано, что два одинаковых вихревых кольца в трубе участвуют в периодическом взаимодействии. Однако, в отличие от случая движения в безграничном пространстве, кольца под влиянием границы перемещаются в осевом направлении с меньшей скоростью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М.:Наука, 1985. - 254с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. - М.:Янус, 1995. - 520с.
3. Горелов Д.Н. К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // Приклад. механика и техн. физика. – 1990. – N1. – с.167-170.
4. Aref H. Chaotic advection of fluid particles // Trans. Roy. Soc. London. – 1990. - V.333. - p.273-288.
5. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech. - 1984. - V.143. - p.1-23.
6. Гуржий А.А., Пеерхосаини Х. Локальные карты растяжений: приложение для задачи об адвекции пассивной примеси в произвольном поле скорости // Прикладная гидромеханика. – 2000. – N.74. – с.28-43.
7. Meleshko V.V., van Heijst G.J.F., Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // Chaos, Soliton & Fractals. – 1994. - V.4. - p.977-1010.
8. Dyson F.W. The potential of an anchor vortex ring // Phil. Trans. R. Soc. London. – 1893. – V.184. – p.43-95.