Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.65
№ 775, 2007, с.130-139

Об одном способе представления полиномиальных сплайнов в системах символьной математики

П. Г. Доля
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Unified formula expression of an arbitrary degree polynomial spline is proposed. Coefficients of the formula express by means of coefficients of polynomial sections representing a spline. In the equation monomials containing the absolute value function correspond to the nodes.

1. Введение

Математический сплайн – это кусочный полином степени m с непрерывными производными в точках соединения сегментов до порядка $m-r$, $(1 \le r \le m)$ [1, 2]. Имеется много подходов к определению коэффициентов полиномиальных звеньев, составляющих сплайн [3, 4]. При этом одной из основных проблем, сдерживающих применение сплайнов, является их кусочность, т.е. представление в виде различных формульных выражений на различных участках изменения аргумента. В работе [5] показано, что для непрерывных функций и кривых, заданных разными уравнениями на различных участках, существует возможность построения единых формульных выражений. В данной работе сходный результат получен для полиномиальных сплайнов.

2. Пространство интерполяционных сплайнов одной переменной

Пусть на отрезке $[a,b]$ задано множество точек $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Функция $S_{m,r}(x)$ называется сплайном степени m класса $C^q\left(0 \le q < m;\ r = m-q\right)$ с узлами на сетке Δ, если на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $\left(i = 0,1,\ldots,n-1\right)$ она является многочленом степени m и $S_{m,r}(x) \in C^q[a,b]$. Индекс r $(1 \le r \le m)$ называется дефектом сплайна и указывает на число старших производных порядка $q+1,\ldots, m$, которые имеют разрывы или не существуют. Для сплайна дефекта 1 будем опускать индекс r в обозначении и писать $S_m(x)$.

Множество сплайнов, заданных на сетке Δ, обозначаемое $S_{m,r}(\Delta)$, является линейным пространством. Его размерность равна $m+1+r\cdot(n-1)$ [1]. В пространстве $S_{m,r}(\Delta)$ можно построить базисы. Аналогом базиса из степенных функций является система $\left(x-x_0\right)^k$, $k = 0,1,\ldots,m$ вместе с дополнительными базисными функциями вида $\left(x-x_i\right)_+^q$, $q = m-r+1,\ \ldots, m$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Здесь $\left(x-a\right)_+^q$ – усеченная степенная функция вида $\left(x-a\right)_+^q = \begin{cases} \left(x-a\right)^q, & x > a \\ 0, & x \le a \end{cases}$.

Каждая из этих функций является $q-1$ раз непрерывно дифференцируемой. В этом случае сплайн может быть представлен в виде [1]:

$$S_{m,\,r}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{m}a_k\,(x-x_0)^k+\sum_{i=1}^{n-1}\;\sum_{j=m-r+1}^{m}c_{i\,j}\,(x-x_i)_+^j\ . \tag{1}$$

Но $(x-a)_+=\frac{1}{2}\left(x-a+|\ x-a\ |\right)$. Для дальнейшего рассмотрения нам удобно определить две функции [5]

$$Q(x,a)=\frac{1}{2}\left(x-a+|\ x-a\ |\right)\text{ и } Q_l\,(x,a)=\frac{1}{2}\left(x-a-|\ x-a\ |\right). \tag{2}$$

Для m-ой степени функции $Q_l\,(x,a)$ имеем

$$Q_l^{\;m}\,(x,a)=\left(\frac{1}{2}\left(x-a-|x-a|\right)\right)^m=\frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m}C_m^j\,(-1)^j\,(x-a)^{m-j}\,|\ x-a\ |^{\,j}\ .$$

Для m-ой степени функции $Q(x,a)$ имеет место аналогичное соотношение без множителя $(-1)^j$ в сумме. Разложим сумму в последнем выражении по четным и нечетным степеням индекса суммирования j. Получаем

$$Q_l^{\;m}\,(x,a)=\frac{1}{2^m}\left(\sum_{k=0}^{[m/2]}C_m^{2k}\,(-1)^{2k}\,(x-a)^{m-2k}\,|\ x-a\ |^{2k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}C_m^{2k+1}\,(-1)^{2k+1}\,(x-a)^{m-2\,k-1}\,|\ x-a\ |^{\,2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^m}\left(\left(x-a\right)^m\cdot\sum_{k=0}^{[m/2]}C_m^{2\,k}\;-\left(x-a\right)^{m-1}|\ \ x-a\ \ |\cdot\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}C_m^{2k+1}\right).$$

Здесь квадратные скобки используются для обозначения целой части числа. Для сумм, стоящих в последнем выражении, имеются формулы (см. [6], раздел 4.2.1)

$$\sum_{k=0}^{[m/2]}C_m^{2k}=2^{m-1}\qquad\text{и}\qquad\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}C_m^{2k+1}=2^{m-1}\ .$$

Поэтому последнее выражение приводится к виду

$$Q_l^m\,(x,a)=\frac{1}{2}\left((x-a)^m-(x-a)^{m-1}|\ x-a\ |\right). \tag{3}$$

Аналогичная формула имеет место для m-ой степени функции $Q(x,a)$

$$Q^m\,(x,a)=\frac{1}{2}\left((x-a)^m+(x-a)^{m-1}|\ x-a\ |\right). \tag{4}$$

<u>Замечание 1</u>. Для m – нечетного $|\ x-a\ |^m=|\ x-a\ |^{m-1}|\ x-a\ |=(x-a)^{m-1}|\ x-a\ |$ и, например, (4) может быть записано в виде $Q^m\,(x,a)=\frac{1}{2}\left((x-a)^m+|\ x-a\ |^m\right)$.

Из (4) для степенных усеченных функций следует

$$\left(x-a\right)_+^q=\left((x-a)_+\right)^q=\left(\frac{1}{2}\left(x-a+|\ x-a\ |\right)\right)^q=\frac{1}{2}\left((x-a)^q+(x-a)^{q-1}|\ x-a\ |\right) \tag{5}$$

или $\left(x-a\right)_{+}^{q}=Q^{q}(x,a)$. Тогда в (1) усеченные степенные функции $\left(x-x_i\right)_{+}^{j}$ можно заменить их представлением (5). Поэтому

$$S_{m,\,r}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{m}a_k\,(x-x_0)^k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\;\sum_{j=m-r+1}^{m}c_{i\,j}\,(x-x_i)^j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\;\sum_{j=m-r+1}^{m}c_{i\,j}\,(x-x_i)^{j-1}\left|\,x-x_i\,\right|.$$

Первые две суммы последнего выражения представляют некоторый полином $P_m(x)$ степени *m*. И для сплайна получаем, что

$$S_{m,\,r}\left(x\right)=P_m(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\;\sum_{j=m-r+1}^{m}c_{i\,j}\,(x-x_i)^{j-1}\left|\,x-x_i\,\right| \qquad (6)$$

Т.о. дополнительными базисными функциями в пространстве сплайнов $S_{m,\,r}\left(\Delta\right)$ могут быть функции $(x-x_i)^{j-1}\left|\,x-x_i\,\right|,\ j=m-r+1,\ldots,m,\ \ i=1,2,\ldots,n-1$.

В случае сплайна степени *m* дефекта 1 дополнительные базисные функции имеют вид $(x-x_i)^{m-1}\left|\,x-x_i\,\right|,\ i=1,2,\ldots,n-1$. Эти функции $m-1$ раз непрерывно дифференцируемы. Чтобы убедиться в этом, надо рассмотреть функцию $(x-a)^{m-1}\left|\,x-a\,\right|$ отдельно на участках $x<a$ и $x\geq a$, и проверить, что левая и правая производные до $m-1$ порядка в точке $x=a$ совпадают (равны 0). Т.о. для сплайна дефекта 1 можно использовать следующее представление

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k\,(x-x_0)^k+\sum_{i=1}^{n-1}c_i\,(x-x_i)^{m-1}\left|\,x-x_i\,\right|. \qquad (7)$$

Для нечетного *m* точки $x_0,x_1,\ldots,x_n$ представляют *x*-координаты узлов интерполяции. Тогда для определения коэффициентов в выражении (7) мы можем записать *n+1* условие прохождения сплайна через интерполяционные точки $\left(x_i,\ y_i\right)$, $i=0,1,\ldots,n$ и дополнить их $m-1$ краевым условием. Система *n+m* уравнений с *n+m* неизвестными $a_0,a_1,\ldots,a_m,c_1,\ldots,c_{n-1}$ будет иметь единственное решение, поскольку $a_0,\ \ldots,c_{n-1}$ являются коэффициентами разложения по базисным функциям. Аналогичная система может быть построена для сплайна четной степени *m*. Однако матрицы в получаемых системах уравнений не будут разреженными, и для решения систем потребуется значительно больше вычислительных ресурсов, чем для решения трехдиагональных систем, получаемых при традиционном подходе [3, 4]. Далее мы покажем, что для определения коэффициентов разложений (6) и (7) можно использовать коэффициенты полиномиальных звеньев сплайна.

Отметим, что существуют другие дополнительные базисные функции. В приложениях часто используются B-сплайны – финитные полиномиальные сплайны степени *m*. Но формулы (6) и (7) имеют то преимущество, что они представляют полиномиальный сплайн в виде единого аналитического выражения. Это особенно удобно в системах символьной математики. Кроме того, формулы (6) и (7) показывают, что полиномиальные сплайны $S_{m,\,r}\left(x\right)$ являются элементарными функциями, поскольку выражаются через функцию модуля $\left|\,x\,\right|=\sqrt{x^2}$, которая является элементарной функцией.

3. Представление полиномиальных сплайнов

Пусть сплайн $S_{m,r}(x)$ уже построен, т.е. на отрезках $x_k \le x \le x_{k+1}$, $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ известны уравнения $y_k(x)$ его звеньев

$$y_k(x) = \sum_{q=0}^{m} a_{k\,q}\left(x - x_k\right)^q \ . \tag{8}$$

Отметим, что здесь через x_k обозначены x - координаты точек стыковки звеньев, а не x - координаты точек интерполяции, хотя для сплайнов нечетных степеней эти множества, как правило, совпадают.

Построим функцию $Y_{k+1}(x) = y_k(x) + \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{k+1j} Q^j(x, x_{k+1})$. При $x < x_{k+1}$ имеем $Q(x, x_{k+1}) = 0$ и поэтому $Y_{k+1}(x) = y_k(x)$. Подберем коэффициенты b_{k+1j} так, чтобы при $x > x_{k+1}$ функция $Y_{k+1}(x)$ совпала с полиномом $y_{k+1}(x)$. При $x \ge x_{k+1}$ из (2) получаем, что $Q(x, x_{k+1}) = x - x_{k+1}$ и, следовательно, имеем

$$Y_{k+1}(x) = \sum_{q=0}^{m} a_{k\,q}\left(x - x_k\right)^q + \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{k+1j}\left(x - x_{k+1}\right)^j \ .$$

Но $x - x_k = x - x_{k+1} + \Delta$, где $\Delta = x_{k+1} - x_k$. Выполним эту замену в выражении $Y_{k+1}(x)$ и приравняем его полиному $y_{k+1}(x)$. Получаем

$$\sum_{q=0}^{m} a_{k\,q}\left(x - x_{k+1} + \Delta\right)^q + \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{k+1j}\left(x - x_{k+1}\right)^j = \sum_{j=0}^{m} a_{k+1\,j}\left(x - x_{k+1}\right)^j \ . \tag{9}$$

Т.к. $\left(x - x_{k+1} + \Delta\right)^q = \sum_{j=0}^{q} C_q^j \Delta^{q-j}\left(x - x_{k+1}\right)^j$, то первое слагаемое в (9) можно представить в виде

$$\sum_{q=0}^{m} a_{k\,q}\left(x - x_{k+1} + \Delta\right)^q = \sum_{q=0}^{m} a_{k\,q} \sum_{j=0}^{q} C_q^j \Delta^{q-j}\left(x - x_{k+1}\right)^j = \sum_{j=0}^{m}\left(x - x_{k+1}\right)^j \sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} C_q^j \Delta^{q-j} \ .$$

Подставляя это в соотношение (9), получаем

$$\sum_{j=0}^{m}\left(x - x_{k+1}\right)^j \sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} C_q^j \Delta^{q-j} + \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{k+1j}\left(x - x_{k+1}\right)^j = \sum_{j=0}^{m} a_{k+1\,j}\left(x - x_{k+1}\right)^j \ . \tag{10}$$

Приравняем в (10) коэффициенты при одинаковых степенях $\left(x - x_{k+1}\right)^j$. Для $j \le m - r$ получаем $\sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} C_q^j \Delta^{q-j} = a_{k+1j}$. Но для сплайна $S_{m,r}(x)$ эти равенства будут выполняться всегда.

Действительно, при определении коэффициентов $a_{k\,q}$ полиномов $y_k(x)$ принимались во внимание условия непрерывности и гладкости вида

$$y_k^{(j)}(x_{k+1}) = y_{k+1}^{(j)}(x_{k+1}), \ (k = 0,1,\ldots,n-2, \ j = 0,1,\ldots,m-r). \tag{11}$$

Поэтому между коэффициентами $a_{k\,q}$ и a_{k+1q} $\left(q = 0,1,\ldots,m\right)$ полиномов $y_k(x)$ и $y_{k+1}(x)$ существуют связи. Для их определения продифференцируем уравнение (8) k-го звена сплайна j раз

$$y_k^{(j)}(x) = \sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} \frac{q!}{(q-j)!}\left(x - x_k\right)^{q-j} \ .$$

Подставляя это выражение в условия гладкости (11), получаем

$$\sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} \frac{q!}{(q-j)!}\left(x_{k+1}-x_k\right)^{q-j} = a_{k+1\;j}\; j!\ .$$

После деления на $j!$ это равенство принимает вид

$$\sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} C_q^j \left(x_{k+1}-x_k\right)^{q-j} = a_{k+1\;j}\ ,\ (k=0,1,\ldots,n-2,\ j=0,1,\ldots,m-r) \qquad (12)$$

Т.о. для $j \le m-r$ условия совпадения коэффициентов при одинаковых степенях $\left(x-x_{k+1}\right)^j$ в равенстве (10) представляют условия гладкой (до порядка *m-r*) стыковки полиномиальных звеньев $y_k(x)$ сплайна $S_{m,r}(x)$.

Приравняем теперь в (10) коэффициенты при степенях $\left(x-x_{k+1}\right)^j$ для $j \ge m-r+1$. Это дает $\sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} C_q^j \Delta^{q-j} + b_{k+1j} = a_{k+1j}$ или

$$b_{k+1j} = a_{k+1j} - \sum_{q=j}^{m} a_{k\,q} C_q^j \left(x_{k+1}-x_k\right)^{q-j}, (j=m-r+1,\ldots,m) \qquad (13)$$

Если коэффициенты $b_{k+1\,j}$ выбирать в соответствии с формулой (13), то функция $Y_{k+1}(x)$ при $x > x_{k+1}$ совпадет с полиномом $y_{k+1}(x)$.

Аналогично предыдущему можно построить функцию $Y_{k+2}(x)$, которая при $x > x_{k+2}$ будет совпадать с полиномом $y_{k+2}(x)$, если коэффициенты $b_{k+2\,j}$ выбирать в соответствии с формулой (13). Это значит, что при $x > x_{k+2}$ будет иметь место равенство

$$y_k(x) + \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{k+1j} Q^j(x, x_{k+1}) + \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{k+2j} Q^j(x, x_{k+2}) = y_{k+2}(x)\,.$$

При этом для $x_{k+1} \le x \le x_{k+2}$ левая часть этого равенства будет совпадать с $y_{k+1}(x)$, а при $x \le x_{k+1}$ будет совпадать с $y_k(x)$. Продолжая это построение $n-k-1$ раз, мы можем построить функцию $Y_{n-1}(x)$, которая при $x > x_{n-1}$ будет совпадать с полиномом $y_{n-1}(x)$.

$$Y_{n-1}(x) = y_k(x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{i\,j} Q^j(x, x_i)\,. \qquad (14)$$

Функция $Y_{n-1}(x)$ на каждом отрезке $[x_p, x_{p+1}]\,, k \le p \le n-1$ совпадает с соответствующим полиномом $y_p(x)$, а с полиномом $y_k(x)$ она совпадает для всех $x \le x_{k+1}$. Для проверки этого достаточно вспомнить, что функции $Q(x, x_i)$ обращаются в 0 при $x < x_i$. Построим теперь функцию

$$Z_{k-1}(x) = y_k(x) + \sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-1\,j} Q_l^j(x, x_k)\,.$$

При $x \ge x_k$ имеем $Q_l(x,x_k)=0$ и, следовательно, $Z_{k-1}(x)=y_k(x)$. Подберем коэффициенты d_{k-1j} так, чтобы при $x<x_k$ функция $Z_{k-1}(x)$ совпала с полиномом $y_{k-1}(x)$. При $x \le x_k$ имеем $Q_l(x,x_k)=x-x_k$ и, следовательно,

$$Z_{k-1}(x)=y_k(x)+\sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-1j}\left(x-x_k\right)^j=\sum_{j=0}^{m} a_{kj}\left(x-x_k\right)^j+\sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-1j}\left(x-x_k\right)^j .$$

Приравняем $Z_{k-1}(x)$ полиному $y_{k-1}(x)$, в выражении которого сделаем замену $x-x_{k-1}=x-x_k+\Theta$, где $\Theta=x_k-x_{k-1}$. Получаем

$$\sum_{j=0}^{m} a_{kj}\left(x-x_k\right)^j+\sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-1j}\left(x-x_k\right)^j=\sum_{q=0}^{m} a_{k-1q}\left(x-x_k+\Theta\right)^q .$$

Но $\left(x-x_k+\Theta\right)^q=\sum_{j=0}^{q} C_q^j\Theta^{q-j}\left(x-x_k\right)^j$. Тогда правую часть в последнем соотношении можно представить в виде

$$\sum_{q=0}^{m} a_{k-1q}\left(x-x_k+\Theta\right)^q=\sum_{q=0}^{m} a_{k-1q}\sum_{j=0}^{q} C_q^j\Theta^{q-j}\left(x-x_k\right)^j=\sum_{j=0}^{m}\left(x-x_k\right)^j\sum_{q=j}^{m} a_{k-1q}C_q^j\Theta^{q-j} .$$

Подставляя это в предыдущее равенство, получаем

$$\sum_{j=0}^{m} a_{kj}\left(x-x_k\right)^j+\sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-1j}\left(x-x_k\right)^j=\sum_{j=0}^{m}\left(x-x_k\right)^j\sum_{q=j}^{m} a_{k-1q}C_q^j\Theta^{q-j} .$$

Приравняем коэффициенты при одночленах $\left(x-x_k\right)^j$. Для $j \le m-r$ получаем $a_{kj}=\sum_{q=j}^{m} a_{k-1q}C_q^j\left(x_k-x_{k-1}\right)^{q-j}$. Эти соотношения совпадают с условиями стыковки (12), и для сплайна дефекта *r* будут удовлетворены автоматически при определении коэффициентов полиномиальных звеньев $y_k(x)$. Для $j \ge m-r+1$ приравнивание коэффициентов дает $a_{kj}+d_{k-1j}=\sum_{q=j}^{m} a_{k-1q}C_q^j\left(x_k-x_{k-1}\right)^{q-j}$. Откуда получаем выражение для коэффициентов d_{k-1j}:

$$d_{k-1j}=\sum_{q=j}^{m} a_{k-1q}C_q^j\left(x_k-x_{k-1}\right)^{q-j}-a_{kj},\ (j=m-r+1,\ldots,m). \qquad (16)$$

Т.о., если коэффициенты d_{k-1j} выбирать в соответствии с формулой (16), то функция $Z_{k-1}(x)$ при $x<x_k$ будет совпадать с полиномом $y_{k-1}(x)$.

Аналогично предыдущему мы можем построить функцию $Z_{k-2}(x)$, которая при $x<x_{k-1}$ будет совпадать с полиномом $y_{k-2}(x)$, если коэффициенты d_{k-2j} выбирать в соответствии с формулой (16). Т.о. будет иметь место равенство

$$y_k(x)+\sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-1j}Q_l^j(x,x_k)+\sum_{j=m-r+1}^{m} d_{k-2j}Q_l^j(x,x_{k-1})=y_{k-2}(x)$$

При $x_{k-1} \le x \le x_k$ левая часть последнего выражения совпадает с $y_{k-1}(x)$, а при $x \le x_{k-1}$ совпадает с $y_{k-2}(x)$. Продолжая это построение *k* раз, построим функцию $Z_0(x)$, которая при $x<x_1$ будет совпадать с полиномом $y_0(x)$

$$Z_0(x) = y_k(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} d_{ij} Q_l^j(x, x_{i+1}). \tag{17}$$

При $x_i < x_k < x$, $i < k$ все функции $Q_l(x, x_i)$ равны 0. Поэтому функция $Z_0(x)$ на каждом отрезке $[x_p, x_{p+1}]$, $0 \le p \le k-1$ будет совпадать с соответствующим полиномом $y_p(x)$, а с полиномом $y_k(x)$ она совпадает для всех $x > x_k$.

Заменим в (17) $y_k(x)$ на $Y_{n-1}(x)$ и построим функцию

$$Y(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} d_{ij} Q_l^j(x, x_{i+1}) + y_k(x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} b_{ij} Q^j(x, x_i). \tag{18}$$

Покажем, что для $x < x_{k+1}$ функция $Y(x)$ совпадает с $Z_0(x)$, для $x > x_k$ совпадает с $Y_{n-1}(x)$, и на каждом отрезке $x \in [x_p, x_{p+1}]$ совпадает с $y_p(x)$. Действительно, на отрезке $x \in [x_p, x_{p+1}], (0 \le p \le k)$ вторая сумма в (18) равна 0, т.к. для этих значений аргумента x все $Q(x, x_i) = 0$. Поэтому Y(x) совпадет с функцией $Z_0(x)$, которая совпадает с $y_p(x)$ при $0 \le p \le k$. На отрезке $x \in [x_p, x_{p+1}]$, $k \le p \le n-1$ первая сумма в (18) равна 0, поскольку в этом случае все $Q_l(x, x_{i+1}) = 0$. Поэтому функция Y(x) совпадет с $Y_{n-1}(x)$, которая для этих x совпадает с $y_p(x)$, $p \ge k$. В результате функция Y(x) на всех отрезках $x \in [x_p, x_{p+1}]$, $0 \le p \le n-1$ будет совпадать с полиномиальными звеньями $y_p(x)$. Это значит, что выражение $Y(x)$ представляет уравнение сплайна $S_{m,r}(x)$.

Заменим в (18) коэффициенты d_{ij} и b_{ij} их выражениями из (13) и (16). Тогда получим следующее представление для полиномиального сплайна $S_{m,r}(x)$:

$$S_{m,r}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} \left(\sum_{q=j}^{m} a_{iq} C_q^j (x_{i+1} - x_i)^{q-j} - a_{i+1j} \right) Q_l^j(x, x_{i+1}) + y_k(x) +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} \left(a_{ij} - \sum_{q=j}^{m} a_{i-1q} C_q^j (x_i - x_{i-1})^{q-j} \right) Q^j(x, x_i). \tag{19}$$

Для записи этой формулы нам потребовалось полностью уравнение $y_k(x)$ только одного k-го полиномиального звена сплайна и коэффициенты a_{ij} при старших степенях $(x - x_i)^j$, $j = m-r+1, \ldots, m$ остальных его звеньев.

В формуле (19) можно использовать уравнение $y_k(x)$ любого звена сплайна. В дальнейшем нам будет удобно выбирать *k=0*. В этом случае имеем

$$S_{m,r}(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=m-r+1}^{m} \left(a_{ij} - \sum_{q=j}^{m} a_{i-1q} C_q^j (x_i - x_{i-1})^{q-j} \right) Q^j(x, x_i). \tag{20}$$

Рассмотрим случай сплайна $S_m(x)$ степени m дефекта 1. Формула (13) дает $b_{i\,m} = a_{im} - a_{i-1m}$. Формула (16) дает $d_{i\,m} = a_{i\,m} - a_{i+1m}$. Для сплайна $S_m(x)$ из (18) получаем представление в виде

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(a_{i\,m} - a_{i+1\,m}\right) Q_l^m(x, x_{i+1}) + y_k(x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} \left(a_{i\,m} - a_{i-1\,m}\right) Q^m(x, x_i). \qquad (21)$$

Для представления сплайна m - ой степени необходимы коэффициенты при всех степенях многочлена, представляющего его k - е звено, и коэффициенты $a_{i\,m}$ при старших степенях $(x - x_i)^m$ многочленов остальных звеньев. При этом не имеет значения в окрестности какой точки (x_i или, например, 0) дано разложение (8), поскольку значение старшего коэффициента $a_{i\,m}$ от этой точки не зависит.

В случае $k = 0$ представление сплайна $S_m(x)$ имеет вид

$$S_m(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{im} - a_{i-1m}\right) Q^m(x, x_i), \qquad (22)$$

где $y_0(x)$ является уравнением начального звена сплайна на отрезке $[x_0, x_1]$.

4. Использование дополнительных базисных функций $(x - x_i)^{m-1} | x - x_i |$

Заменим в (20) функции $Q^j(x, x_i)$ их представлениями (4). Тогда получим

$$S_{m,r}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{0\,j}\left(x - x_0\right)^j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=m-r+1}^{m}\left(a_{ij} - \sum_{q=j}^{m} a_{i-1q} C_q^j \left(x_i - x_{i-1}\right)^{q-j}\right)\left(x - x_i\right)^j +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=m-r+1}^{m}\left(a_{ij} - \sum_{q=j}^{m} a_{i-1q} C_q^j \left(x_i - x_{i-1}\right)^{q-j}\right)\left(x - x_i\right)^{j-1}\left|x - x_i\right| \qquad (23)$$

Первые две суммы в этом выражении можно представить в виде некоторого полинома $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \left(x - x_0\right)^j$. Следовательно, мы имеем

$$S_{m,\,r}(x) = P_m(x) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=m-r+1}^{m} g_{i\,j}(x - x_i)^{j-1} | x - x_i |, \qquad (24)$$

где $g_{i\,j} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - \sum_{q=j}^{m} a_{i-1q} C_q^j \left(x_i - x_{i-1}\right)^{q-j}\right)$.

Определим коэффициенты полинома $P_m(x)$. Имеем $x - x_i = x - x_0 + \Delta_i$, где $\Delta_i = x_0 - x_i$. Тогда $\left(x - x_i\right)^p = \left(x - x_0 + \Delta_i\right)^p = \sum_{j=0}^{p} C_p^j \Delta_i^{p-j} \left(x - x_0\right)^j$. Поэтому 2-ю сумму в выражении (23) мы можем представить в виде

$$\sum_{p=m-r+1}^{m}\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_{ip} - \sum_{q=p}^{m} a_{i-1q} C_q^p \left(x_i - x_{i-1}\right)^{q-p}\right)\sum_{j=0}^{p} C_p^j \Delta_i^{p-j}\left(x - x_0\right)^j =$$

$$= \sum_{p=m-r+1}^{m}\sum_{j=0}^{p}\left(x - x_0\right)^j C_p^j \sum_{i=1}^{n-1}\left(a_{ip} - \sum_{q=p}^{m} a_{i-1q} C_q^p \left(x_i - x_{i-1}\right)^{q-p}\right)\Delta_i^{p-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-r} (x - x_0)^j \sum_{p=m-r+1}^{m} C_p^j \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ip} - \sum_{q=p}^{m} a_{i-1q} C_q^p (x_i - x_{i-1})^{q-p} \right) \Delta_i^{p-j} +$$

$$+ \sum_{j=m-r+1}^{m} (x - x_0)^j \sum_{p=j}^{m} C_p^j \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ip} - \sum_{q=p}^{m} a_{i-1q} C_q^p (x_i - x_{i-1})^{q-p} \right) \Delta_i^{p-j} .$$

Тогда для полинома $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j (x - x_0)^j$ получаем, что его коэффициенты при $j \le m - r$ вычисляются по формулам

$$\alpha_j = a_{0j} + \frac{1}{2} \sum_{p=m-r+1}^{m} C_p^j \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ip} - \sum_{q=p}^{m} a_{i-1q} C_q^p (x_i - x_{i-1})^{q-p} \right) (x_0 - x_i)^{p-j} , \quad (25_1)$$

а для $m - r + 1 \le j \le m$ – по формулам

$$\alpha_j = a_{0j} + \frac{1}{2} \sum_{p=j}^{m} C_p^j \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ip} - \sum_{q=p}^{m} a_{i-1q} C_q^p (x_i - x_{i-1})^{q-p} \right) (x_0 - x_i)^{p-j} . \quad (25_2)$$

Т.о. представление полиномиального сплайна $S_{m,r}(x)$ степени m дефекта r имеет вид (24), где коэффициенты α_j полинома $P_m(x)$ определяются в соответствии с формулами (25).

Для сплайна с дефектом *r=1* коэффициенты полинома $P_m(x)$ будут равны

$$\alpha_j = a_{0j} + \frac{1}{2} C_m^j \sum_{i=1}^{n-1} (a_{im} - a_{i-1m})(x_0 - x_i)^{m-j} , 0 \le j \le m-1 ,$$

$$\alpha_m = a_{0m} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{im} - a_{i-1m}).$$

Как легко видеть, в этом случае вторая формула имеет тот же вид, что и первая при $j = m$. Поскольку для этого случая $g_{im} = \frac{1}{2}(a_{im} - a_{i-1\,m})$, то мы получаем

$$S_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \left(a_{0j} + \frac{1}{2} C_m^j \sum_{i=1}^{n-1} (a_{im} - a_{i-1m})(x_0 - x_i)^{m-j} \right) (x - x_0)^j +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{im} - a_{i-1m})(x - x_i)^{m-1} | x - x_i | . \quad (26)$$

При *m=3*, *r=1* мы имеем кубический сплайн. Для этого случая, с учетом замечания 1, формула (26) принимает вид

$$S_3(x) = P_3(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i3} - a_{i-13}) | x - x_i |^3 ,$$

где $P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} \left(a_{0j} + \frac{1}{2} C_3^j \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i3} - a_{i-13})(x_0 - x_i)^{3-j} \right) (x - x_0)^j$.

Здесь a_{0j} являются коэффициентами полинома, представляющего начальное (нулевое) звено сплайна $y_0(x)$, а a_{i3}, $i = 1,2,\ldots,n-1$ являются коэффициентами при одночленах $(x - x_i)^3$ остальных звеньев.

Т.о. для построения аналитического представления полиномиального сплайна мы должны определить коэффициенты в уравнениях (8) его звеньев $y_k(x)$ стандартным способом [3, 4]. Как правило, в этом случае мы приходим к решению трехдиагональной системы уравнений. Затем найденные коэффициенты необходимо подставить в выражения (24) – (26).

Везде выше мы рассматривали сплайн-функции одной переменной. Но основное назначение сплайнов в геометрическом моделировании состоит в представлении кривых и поверхностей. Использование формул данной работы для моделирования кривых не требует никаких новых рассмотрений. Выбирая в узлах сплайна-кривой монотонно возрастающие значения параметра $t = t_0, t_1, \ldots, t_n$, для каждой координатной функции *x(t), y(t), z(t)* мы можем получить представление (24). В результате мы придем к аналитическому представлению радиус-вектора кривой.

5. Заключение.

Представление полиномиальных сплайнов в форме (24) в значительной мере устраняет проблему их кусочности. Решив задачу сплайн-интерполяции традиционным способом и используя формулы (24) – (26), можно построить единое формульное представление сплайна. При этом полностью используется уравнение только одного звена сплайна, а также коэффициенты при старших степенях остальных составляющих его звеньев.

Ряд примеров построения единых уравнений кубических сплайнов, использующих формулы настоящей работы, приведен в пакете расширения *PscFunctions* системы символьной математики MAPLE. С пакетом можно ознакомиться на вебсайте www.maplesoft.com/products/thirdparty/PSCFunctions.

Полученные в работе формулы могут найти свое применение во многих областях прикладной математики и геометрического моделирования. В системах символьной математики аналитическое представление полиномиальных сплайнов значительно упрощает работу с ними.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С.,Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 224с
2. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Учеб.посбие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1986. 120с.
3. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001.
4. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.
5. Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых.// Вестник Харьк. нац. ун-та., – 2005. – № 661. Сер. ”Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.4. – С.97–103.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981