Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 775, 2007, с.174-178

УДК 539.3:533.6

Математическая модель для изучения свободных колебаний составных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью

И. Ю. Кузина, Е. А. Стрельникова
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина
Институт проблем машиностроения НАН Украины, Украина

The problem of the hydro-elastic harmonic vibrations for partially filled compound shells of revolution is considered. Hypersingular integral equation is derived for the fluid pressure to the shell determination. Its numerical analysis is performed on the basis of the discrete singularities methos.

1. Общая постановка задачи

Изучена задача о гидроупругих колебаниях оболочки вращения, составленной из цилиндрической, конической и сферической частей, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Для определения давления жидкости на оболочку получено гиперсингулярное интегральное уравнение, численное решение которого осуществлено методом дискретных особенностей.

Имеется большое количество баков и цистерн, частично заполненных отходами различного рода, в том числе горючими и токсичными веществами. Если они пустые или заполнены жидкостью полностью, то при ударе напряжения в них меньше, чем в емкостях, частично заполненных. Потому проводимое исследование актуально особенно при изучении сейсмических и ударных воздействий на оболочечные конструкции указанного типа.

В работе используются основной вариационный принцип теории упругости [1], теория решения гиперсингулярных интегральных уравнений [2] и метод дискретных особенностей как метод дискретизации получаемого гиперсингулярного уравнения (ГСИУ) [3].

В этой задаче ранее не было получено ГСИУ. Для оболочек, которые имеют сложный меридиан, не было аналитических решений. В данной работе построено фундаментальное решение и выведено аналитическое.

Нерешенным остается вопрос о корректности гипотезы совпадения форм колебаний составной оболочки в жидкости и вакууме.

2. Построение математической модели задачи

Совместно решаются уравнения равновесия оболочки, которая совершает малые колебания, и задача Неймана для уравнения Лапласа для определения давления со стороны жидкости на поверхность оболочки.

Уравнения равновесия выводим исходя из основного вариационного принципа теории упругости, согласно которому уравнения равновесия упругой оболочки получаем как уравнения Лагранжа для функционала, который представляет собой разность между потенциальной энергией упругого тела и работой, совершаемой внешними силами. К уравнениям равновесия необходимо присоединить краевые условия, соответствующие условиям закрепления краев оболочки.

Отыскание упругих перемещений осесимметричной оболочки $u(r,\varphi), v(r,\varphi), w(r,\varphi)$ сводится к решению краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [7]. При этом искомые упругие перемещения раскладываются в тригонометрические ряды.

Интегральное представление упругих перемещений можно осуществить интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих одномерную дельта-функцию. При этом вырожденные уравнения интегрируются в элементарных функциях и квадратурах, невырожденные – асимптотическим методом интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр [1].

На Рис. 1 – 3 показаны графики упругих перемещений:

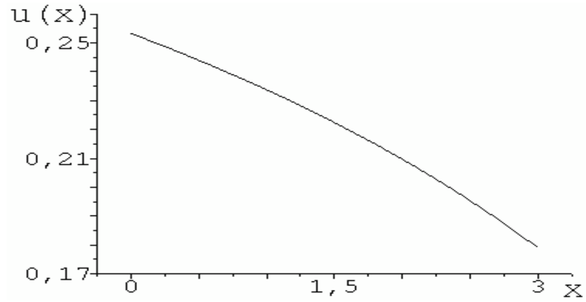

Рис.1. Перемещение $u(r,\varphi)$

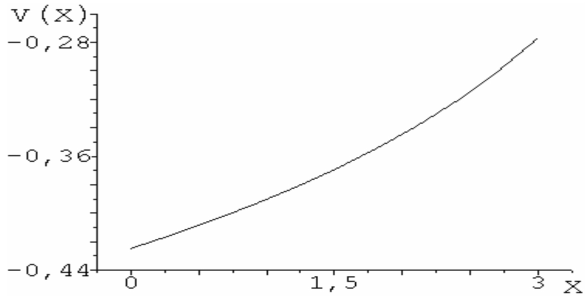

Рис.2. Перемещение $v(r,\varphi)$

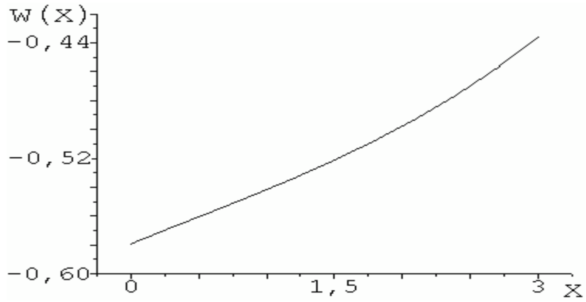

Рис.3. Перемещение $w(r,\varphi)$

Задачу Неймана для функции давления p можно сформулировать так:

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{p} = 0 \text{ внутри } S \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = F \text{ на S} \end{cases} \tag{1}$$

где $S = S_0 \bigcup \sigma$, S_0 – срединная поверхность оболочки, σ – свободная поверхность колеблющейся жидкости, функция $F(r,\varphi)$ является линейной дифференциальной зависимостью функций $f(r,\varphi)$, описывающей свободную поверхность жидкости, и упругого перемещения $w(r,\varphi)$.

Так как в процессе колебаний свободная поверхность жидкости совершает поступательные перемещения, сохраняя плоскую конфигурацию, то функция f, ее описывающая, зависит только от времени t: $f = -\dfrac{1}{S}\int\limits_{S_0} w d\sigma$, где $s = \int\limits_{\sigma} d\sigma$ – площадь плоской фигуры σ, функция $w(r,\varphi,t)$ – нормальное упругое перемещение точек средней поверхности оболочки.

Краевое условие получаем из предположения, что относительная скорость частицы жидкости, обтекающей смачиваемую поверхность оболочки, и относительная скорость соответствующей точки смачиваемой поверхности должны иметь одинаковые нормальные составляющие:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial n} = -\rho \left[\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{n} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}(\vec{r} \times \vec{n}) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \text{на } S_0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = -\rho \left[\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{n} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}(\vec{r} \times \vec{n}) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] \text{на } \sigma \end{cases} \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости, $\vec{v}(t)$ и $\vec{\omega}(t)$ – соответственно, скорость движения и угловая скорость вращения системы координат, связанной с телом (оболочкой с жидкостью), $\vec{r}$ – радиус-вектор рассматриваемой частицы жидкости, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности оболочки.

Ищем давление в виде тригонометрического ряда:

$$p(x,r,\varphi) = p_0(x,r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[P_m^{(1)}(x,r)\cos m\varphi + P_m^{(2)}(x,r)\sin m\varphi \right] \tag{3}$$

Получаем систему линейных двумерных обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентную уравнению Лапласа, в операторном виде:

$$\begin{cases} L_0 p_0 = 0, L_m P_m^{(j)} = 0 \text{ внутри } D \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial n} = F_0(r), \dfrac{\partial P_m^{(j)}}{\partial n} = F_m^{(j)}(r) \text{ на } l \\ j = \overline{1,2}, m = 1,2,... \end{cases} \tag{4}$$

где D – плоская область, ограниченная контуром l, который задает форму оболочки вращения, и отрезком оси x, стягивающим этот контур.

Фундаментальным уравнением дифференциального уравнения $L_m p_m = 0$ является функция $f_m(x,r,x',r')$:

$$f_m(x,r,x',r') = -2^{2m} r'^{m+1} r^m \left((x-x')^2 + (r+r')^2\right)^{-m-\frac{1}{2}} \Phi_m(\xi), \tag{5}$$

где $\xi = \dfrac{\sqrt{(x-x')^2 + (r-r')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (r+r')^2}}$, $\Phi_m(\xi)$ имеет логарифмическую особенность в точке $\xi = 0$: $\Phi_m(\xi) = \ln\xi + H_m(\xi)$, где $H_m(\xi)$ – гладкая функция.

Решение задачи Неймана для каждого m ищем в виде потенциала двойного слоя с плотностью $[p(x)]$, которая характеризует перепад давления:

$$p(y) = \frac{1}{2\pi}\int_l \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}[p(x)]dS_x,\ y \in l \tag{6}$$

где $G(x,y) = \ln\dfrac{1}{|x-y|} + Q_m(x,y)$, $Q_m(x,y)$ – гладкая функция.

Функция $p(x)$ будет решением поставленной задачи, если функция $[p(x)]$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\int_l \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}[p(x)]dS_x = F(y),\ y \in l \tag{7}$$

Параметризуем контур l, приходим (после переобозначений) к гиперсингулярному интегральному уравнению (ГСИУ) вида:

$$\frac{|l|^2}{4\pi}\int_{-1}^{1} j(t)\frac{d^2}{dtdt_0}\left(\ln\frac{1}{|x(t_0)-x(t)|}\right)\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{|l|^2}{4\pi}\int_{-1}^{1} j(t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_0}\big(H(x(t),x(t_0))\big)\times$$

$$\times\sqrt{1-t^2}\,dt = T(x(t_0)) \tag{8}$$

где $j(t) = [p(x)]$, $T(x(t_0)) = \left.\dfrac{\partial F(t_0)}{\partial n}\right|_l$.

Первый интеграл – интеграл в смысле конечной части по Адамару, второй – интеграл Римана.

Решение этого ГСИУ существует с точностью до константы. Для единственности решения к уравнению следует еще добавить дополнительное условие (полученное интегрированием исходного уравнения):

$$\frac{1}{2\pi}\int_l j(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}G(x,\tilde{y})dS_x = T(\tilde{y}),\ \tilde{y} \in l - \text{фиксированное} \tag{9}$$

Численное решение полученного ГСИУ осуществляется методом дискретных особенностей (используются квадратурные формулы интерполяционного типа – узлами которых являются корни полиномов Чебышева второго рода – для интегралов от полиномов по интервалу $(-1,1)$ с весом $\sqrt{1-t^2}$ и интегралов с логарифмическим ядром с таким же весом [5-6]).

3. Выводы и направления дальнейших исследований

В процессе решения определяется давление жидкости на упругую оболочку и форма свободной поверхности жидкости. Это дает возможность определить элементы матрицы присоединенных масс жидкости и частоты колебаний оболочки.

В дальнейшем предполагается подробное рассмотрение случая сжимаемой жидкости – в этом случае рассматривается задача Неймана для уравнения Гельмгольца (решается методом, аналогичным изложенному выше), влияние наличия сварочных швов на оболочке (то есть различие модулей упругости в местах стыка).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. – М.: Машиностроение, 1967. – 359 с.
2. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов. // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С.166-174.
3. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
4. Chen Z, Wang J., Liu H. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery // J. Fluids Eng. –1999.– Vol..121, N4.– P.804-807.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н.Каразина , 2001. – 92 с.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995. – 520 с.
7. Кузина И.Ю. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений для задачи о гиброупругих колебаниях упругой оболочки вращения. // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2006. – № 2(25). – С. 271-276.