Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання, Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 532.5
№ 775, 2007, с.179-190

Сингулярные интегральные уравнения теории волновых движений жидкости

М. В. Макасеев
Национальный технический университетУкраины «Киевский политехнический институт», Украина

The sigular and hypersingular integral equations for problems of the wave motions theory of ideal incompressible fluid are obtained. The equations connect the pressure distribution caused by motions of a solid body on a free surface with the function describing form of border of a liquid. Cases of finite and infinite depth of liquid are considered. The special case of harmonious fluctuations is considered in more details and the equations convenient for the numerical decision are obtained.

1. Введение

В работе рассматриваются задачи теории волновых движений жидкости при движении твердого тела по поверхности в условиях образования волн, а также при наличии волн и под воздействием волн. Такие задачи исторически связаны с классическими проблемами гидродинамики корабля − качкой, движением на волнении, волновым сопротивлением [1−8], которые до сих пор остаются актуальными. В настоящее время интерес к таким задачам еще более увеличился в связи с новыми техническими проблемами по созданию так называемых больших плавающих структур (VLFS − very larg floating structure) − плавучих аэродромов, искусственных островов, грузовых плавающих и буксируемых платформ различного назначения, изучению динамики ледяного покрова (обзоры [9, 10]). Теоретическому решению возникающих задач и созданию методов расчета посвящены, например, работы [11–21]. Несмотря на достаточно большое количество публикаций по этой теме, многие важные для практики вопросы остаются открытыми. В частности, нет достаточно эффективных и пригодных для инженерного использования в вычислительном эксперименте методик для расчета основной гидродинамической характеристики – распределения давления по смоченной поверхности тела.

Учитывая известную аналогию задачи о движении тела по поверхности жидкости с задачами теории крыла, целесообразно воспользоваться идеями и методами, развитыми в этой области гидроаэродинамики. Один из эффективних подходов теории крыла основан на сингулярных интегральных уравнениях и различных численных методах их решения [22−26], в частности, методах дискретных особенностей. Важнейшим элементом подхода, основанного на сингулярных интегральных уравнениях, является этап получения конечных интегральных уравнений, удобных для непосредственного численного решения. Во многих случаях такой этап связан с преодолением принципиальных математических трудностей и более детальным анализом физической постановки задач. В настоящей работе сделана попытка систематизации этапа получения конечных сингулярных интегральных уравнений для задач теории волновых движений жидкости, основанная на использовании аппарата теории обобщенных функций.

2. Постановка задачи о движении тела на поверхности жидкости

Краевую двумерную задачу для потенциала скорости φ о движении твердого тела с постоянной горизонтальной скоростью V_0 в положительном направлении оси x по поверхности жидкости в предположениях теории волн малой амплитуды можно записать в таком виде [1−4]:

$$\Delta\varphi(x,y,t)=0,\ y<0, \tag{2.1}$$

$$N\varphi(x,-0,t)=-\gamma(x,t)-g\eta(x,t),\ -\infty<x<\infty,\ \ x\neq a_1,a_2, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-0,t)=N\eta(x,t),\ -\infty<x<\infty,\ x\neq a_1,a_2, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,-h,t)=0,\ -\infty<x<\infty, \tag{2.4}$$

где $N=\dfrac{\partial}{\partial t}-V_0\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\gamma(x,t)=\left[p(x,-0,t)-p_0\right]/\rho$ – относительное давление на границе, p – абсолютное давление в жидкости, p_0 – абсолютное давление на свободной поверхности (известно и постоянно), ρ – плотность жидкости, $\gamma(x,t)=0$ при $x<a_1, x>a_2$, a_1 – проекция на ось x левой кромки тела, a_2 – правой, $\eta(x,t)$ – форма границы свободной поверхности при $x<a_1, x>a_2$ и смоченной части тела при $a_1\le x\le a_2$ (будет использовано также обозначение $\beta(x,t)=\eta(x,t)$ при $a_1\le x\le a_2$), h − глубина жидкости. Должны быть выполнены также условия излучения − в частных решениях задачи (2.1)−(2.4), являющихся свободными волнами, учитываются только те волны, которые распространяются в направлении от тела как источника излучения. Начальные условия ставятся при формулировке конкретных физических задач.

3. Основные нтегро-дифференциальные соотношения

Для решения задачи (2.1)−(2.4) воспользуемся преобразованием Фурье обобщенных функций [27−29]. Преобразование Фурье по переменной x обычных функций $\psi(x)$ определяется так: $F_x[\psi(x)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{i\lambda x}dx$. Из краевой задачи (2.1)−(2.4) следует, что функции $H(\lambda,t)=F_x[\eta(x,t)]$ и $\Gamma(\lambda,t)=F_x[\gamma(x,t)]$ связаны соотношением

$$\frac{1}{\lambda\tanh\lambda h}\widetilde{N}^2H(\lambda,t)+gH(\lambda,t)=-\Gamma(\lambda,t), \tag{3.1}$$

где $\widetilde{N}^2=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+2i\lambda V_0\dfrac{\partial}{\partial t}-\lambda^2V_0{}^2$, $\widetilde{N}=\dfrac{\partial}{\partial t}+i\lambda V_0$.

Соотношение (3.1) умножением на $i\tanh\lambda h$ приводится к виду

$$\frac{i}{\lambda}\tilde{N}^2 H(\lambda,t)+gi\tanh\lambda h H(\lambda,t)=-i\tanh\lambda h\Gamma(\lambda,t). \qquad (3.2)$$

Переход от (3.1) к (3.2) соответствует применению в пространстве оригиналов Фурье к уравнению, соответствующему (3.1), интегрального преобразования с ядром $1/\sinh\frac{\pi}{2h}(x-s)$, поскольку [30] $F_x^{-1}[i\tanh\lambda h]=\frac{1}{2h}\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2h}x}$. В результате после обратного преобразования (3.2) будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vartheta(x,t)-2V_0\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t)+V_0{}^2\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,t)+\frac{g}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(s,t)\frac{ds}{\sinh\frac{\pi}{2h}(x-s)}=$$

$$=-\frac{1}{2h}\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s,t)\frac{ds}{\sinh\frac{\pi}{2h}(x-s)},\ -\infty<x<\infty, \qquad (3.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial x}\vartheta(x,t)=\eta(x,t)$. Интегралы в (3.3) понимаются в обычном смысле главного значения. Можно показать, что соответствующей заменой переменных сингулярные интегралы в (3.3) приводятся к интегралам с ядром Коши.

Дифференцирование (3.3) по переменной x дает гиперсингулярное интегральное уравнение. Диференцированию по x в пространстве образов Фурье соответствует умножение (3.2) на $-i\lambda$, в результате

$$\tilde{N}^2 H(\lambda,t)+g\lambda\tanh\lambda h H(\lambda,t)=-\lambda\tanh\lambda h\Gamma(\lambda,t). \qquad (3.4)$$

В пространстве оригиналов будем иметь уравнение

$$N^2\eta(x,t)-\frac{g\pi}{4h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(s,t)\frac{\cosh\frac{\pi}{2h}(x-s)}{\sinh^2\frac{\pi}{2h}(x-s)}ds=$$

$$=\frac{\pi}{4h^2}\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s,t)\frac{\cosh\frac{\pi}{2h}(x-s)}{\sinh^2\frac{\pi}{2h}(x-s)}ds,\ -\infty<x<\infty, \qquad (3.5)$$

где $N^2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2V_0\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+V_0{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, а интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару.

Из уравнения (3.5) может быть получено еще одно интегро-дифференциальное уравнение. Для этого применим к (3.5) еще раз интегральное преобразования с ядром $1/\sinh\frac{\pi}{2h}(x-s)$ и дифференцирование. В пространстве образов Фурье этой операции соотвествует формальное умножение (3.4) на $\lambda\tanh\lambda h$, в результате (3.4) примет вид:

$$\lambda\tanh\lambda h\tilde{N}^2 H(\lambda,t)+g\lambda^2\tanh^2\lambda h H(\lambda,t)=-\lambda^2\tanh^2\lambda h\Gamma(\lambda,t). \qquad (3.6)$$

Выразим $\lambda \tanh \lambda h H(\lambda,t)$ из (3.4) и подставим в (3.6). В результате получим:

$$\widetilde{N}^4 H(\lambda,t) - g^2\lambda^2 \tanh^2 \lambda h H(\lambda,t) = g\lambda^2 \tanh^2 \lambda h \Gamma(\lambda,t) - \widetilde{N}^2 \lambda \tanh \lambda h \Gamma(\lambda,t), \quad (3.7)$$

где $\widetilde{N}^4 = \dfrac{\partial^4}{\partial t^4} + 4V_0 i\lambda \dfrac{\partial^3}{\partial t^3} - 6V_0{}^2\lambda^2 \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - 4i\lambda^3 \dfrac{\partial}{\partial t} + V_0{}^2\lambda^4$.

Применяя к (3.7) обратное преобразование Фурье и учитывая, что [30] $F_x^{-1}\left[\tanh^2 \lambda h\right] = -\dfrac{1}{2h^2}\dfrac{1}{\sinh\dfrac{\pi x}{2h}} + \delta(x)$, где $\delta(x)$ − дельта-функция, будем иметь

$$N^4\eta(x,t) - \frac{g^2}{2h^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\eta(s,t)\frac{ds}{\sinh\dfrac{\pi}{2h}(x-s)} + g^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta(x,t) =$$

$$= \frac{g}{2h^2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\gamma(s,t)\frac{ds}{\sinh\dfrac{\pi}{2h}(x-s)} - g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma(x,t) -$$

$$-\frac{\pi}{4h^2}\int_{a_1}^{a_2} N^2\gamma(s,t)\frac{\cosh\dfrac{\pi}{2h}(x-s)}{\sinh^2\dfrac{\pi}{2h}(x-s)}ds, \ -\infty < x < \infty, \quad (3.8)$$

где $N^4 = \dfrac{\partial^4}{\partial t^4} - 4V_0\dfrac{\partial^4}{\partial t^3\partial x} + 6V_0{}^2\lambda^2\dfrac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^4}{\partial t dx^3} + V_0{}^2\dfrac{\partial^4}{dx^4}$.

В уравнения (3.3), (3.5) и (3.8) входят интегралы с бесконечными пределами, содержащие неизвестную функцию $\eta(x,t)$, поэтому их сложно использовать для непосредственного решения задач. Однако они полезны для вывода на их основе других уравнений, а также качественного анализа и решения задач в различных предельных случаях.

4. Бесконечно глубокая жидкость

В случае бесконечно глубокой жидкости при $h \to \infty$ имеем $\lim\limits_{h\to\infty}\tanh \lambda h = \operatorname{sgn}\lambda$, а вместо (3.1):

$$\frac{1}{|\lambda|}\widetilde{N}^2 H(\lambda,t) + gH(\lambda,t) = -\Gamma(\lambda,t). \quad (4.1)$$

Обратное преобразование (4.1) дает:

$$N^2 L\eta(x,t) + g\eta(x,t) = -\gamma(x,t), \quad (4.2)$$

где $L\eta(x,t) = F_x^{-1}\left[reg\left(\dfrac{1}{|\lambda|}\right)H(\lambda,t)\right] = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\eta(s,t)\ln C^*|x-s|ds$, а $reg(f)$ − регуляризация обобщенной функции f, $C^* = e^C$, C − постоянная Эйлера. Вместо (3.2) и (3.3) при $h \to \infty$ получим соответственно:

$$\frac{i}{\lambda}\widetilde{N}^2 H(\lambda,t) + gi\operatorname{sgn}\lambda\, H(\lambda,t) = -i\operatorname{sgn}\lambda\,\Gamma(\lambda,t). \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vartheta(x,t)-2V_0\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t)+V_0{}^2\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,t)+\frac{g}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(s,t)\frac{ds}{x-s}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_1}^{a_2}\gamma(s,t)\frac{ds}{x-s},\ -\infty<x<\infty. \quad (4.4)$$

Переход от (4.2) к (4.4), аналогичный переходу от (3.1) к (3.2), при $h\to\infty$ соответствует применению к (4.2) преобразования Гильберта.

Дифференцированием (4.4) получим

$$N^2\eta(x,t)-\frac{g}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(s,t)\frac{ds}{(x-s)^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_1}^{a_2}\gamma(s,t)\frac{ds}{(x-s)^2},\ -\infty<x<\infty. \quad (4.5)$$

Интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару. В пространстве образов Фурье уравнению (4.5) соответствует уравнение

$$\widetilde{N}^2H(\lambda,t)+g|\lambda|H(\lambda,t)=-|\lambda|\,\Gamma(\lambda,t), \quad (4.6)$$

Аналогично тому, как получено уравнение (3.7), получим при $h\to\infty$:

$$\widetilde{N}^4H(\lambda,t)-g^2\lambda^2H(\lambda,t)=g\lambda^2\Gamma(\lambda,t)-\widetilde{N}^2|\lambda|\Gamma(\lambda,t). \quad (4.7)$$

Обратное преобразование (4.7) дает:

$$N^4\eta(x,t)+g^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta(x,t)=$$

$$=-g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma(x,t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_1}^{a_2}N^2\gamma(s,t)\frac{ds}{(x-s)^2},\ -\infty<x<\infty. \quad (4.8)$$

5. Гармонические колебания

Полученные выше уравнения имеют наиболее простой вид в случаях установившихся режимов движения − стационарного во времени, когда все величины от времени не зависят, и режимах установившихся гармонических колебаний. Для первого, называемого режимом стационарного глиссирования, сингулярные интегральные уравнения исследованы в [31−33]. Рассмотрим далее случай волновых движений бесконечно глубокой жидкости ($h\to\infty$) при $V_0=0$ в режиме гармонических колебаний, когда предполагается, что

$$\varphi(x,y,t)=\operatorname{Re}\varphi^*(x,y)e^{ikt},\ \eta(x,t)=\operatorname{Re}\eta^*(x)e^{ikt},\ \gamma(x,t)=\operatorname{Re}\gamma^*(x)e^{ikt}, \quad (5.1)$$

где k − круговая частота колебаний, функции со звездочками − комплексные амплитудные функции. В соотношениях (5.1) одна из величин должна быть каким-то образом заданной и определять режим колебаний.

При сделанных предположениях $N=\widetilde{N}=ik$, $N^2=\widetilde{N}^2=-k^2$, $N^4=\widetilde{N}^4=k^4$. Далее звездочки над функциями и знак Re не пишутся, в окончательных результатах берется действительная часть. Уравнение (4.2) для случая гармонических колебаний будет иметь вид:

$$\frac{k^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(s)\ln|x-s|ds+g\eta(x)=-\gamma(x),\ -\infty<x<\infty, \quad (5.2)$$

при этом $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(x)dx = 0$ в силу необходимого условия однозначной разрешимости краевой задачи с заданной нормальной производной на границе. Уравнение (5.2) рассматривалось в [37] в задаче о вибрации пластины на поверхности жидкости.

Уравнение (4.6) при принятых условиях гармоничности движения можно записать в виде

$$(\nu - |\lambda|)H(\lambda) = |\lambda|\frac{\Gamma(\lambda)}{g}, \tag{5.3}$$

где $\nu = k^2/g$, а $H(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda)$ − образы Фурье амплитудных функций $\eta(x)$ и $\gamma(x)$. Этому уравнению в пространстве оригиналов соотвествует

$$\nu\eta(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(s)}{(x-s)^2}ds = -\frac{1}{\pi g}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma(s)}{(x-s)^2}ds, \ -\infty < x < \infty. \tag{5.4}$$

Частным случаем (4.8) для гармонических колебаний будет уравнение

$$\eta''(x) + \nu^2\eta(x) = -\frac{\gamma''(x)}{g} - \frac{\nu}{\pi g}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma(s)}{(x-s)^2}ds, \ -\infty < x < \infty. \tag{5.5}$$

При заданном внешнем возмущающем давлении $\gamma(x)$ это обыкновенное дифференциальное уравнение для определение формы волновой поверхности. При $\gamma(x) \equiv 0$ однородное уравнение описывает регулярные синусоидальные волны. Уравнение (5.5) согласуется с уравнением для плавающей пластины, полученным Л.Н.Сретенским [4].

При гармонических движениях твердого тела на поверхности функция $\gamma(x)$ неизвестна и уравнение (5.5) на отрезке $[a_1, a_2]$ есть гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение для определения $\gamma(x)$. В частности, при условиях $\gamma(a_1) = \gamma(a_2) = 0$ (давление непрерывно на боковых кромках − границах смоченного участка и свободной поверхности) интегрированием по частям получим интегро-дифференциальное уравнение с ядром Коши, которое можно записать в таком виде

$$\frac{\nu}{\pi g}\int\limits_{a_1}^{a_2}\frac{\theta(s)}{x-s}ds - \frac{\theta'(x)}{g} = \nu^2\beta(x) + \beta''(x), \ a_1 < x < a_2, \tag{5.6}$$

где $\theta(x) = \gamma'(x)$, а функция $\beta(x)$ описывает смоченную поверхность тела (форму границы жидкости на участке $[a_1, a_2]$). Отметим, что функция $\beta(x)$ есть суперпозиция свободных волн и формы тела и в общем случае также неизвестна. Очевидно, ее можно считать известной в режиме заданных вынужденных колебаний тела при предположении или условии, что подъем поверхности жидкости в области тела равен нулю.

Важное значение для практических приложений имеет анализ предельных случаев − малых и больших частот колебаний.

В случае предельно малых частот колебаний при $k \to 0$ ($\nu \to 0$) из (5.2), равно как и из исходной постановки краевой задачи, следует, что

$$\gamma(x) = -g\beta(x),\ a_1 < x < a_2,$$

т.е. на пластину в этом случае действует главным образом гидростатическая сила, а форма свободной поверхности $\eta(x) = 0$, $x < a_1, x > a_2$.

В случае предельно больших частот колебаний при $k \to \infty$ $(1/\nu \to 0)$ из (5.5) видно, что слагаемыми $\eta''(x)/\nu$ и $-\gamma''(x)/\nu$ можно пренебречь по сравнению с остальными. В итоге получим уравнение

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma(s)}{(x-s)^2}\,ds = k^2\eta(x),\ -\infty < x < \infty. \qquad (5.7)$$

Этому предельному случаю фактически соответствует предположение о малости величины $g\eta$ в исходном граничном условии задачи по сравнению с остальными слагаемыми. Такие случаи в литературе обычно называют условно моделями невесомой жидкости. Формальное пренебрежение весомостью (слагаемым $g\eta$) может быть оправдано также при очень малых задающих амплитудах (или малых значениях $\max|\eta(x)|$).

В частном случае $\gamma(a_1) = \gamma(a_2) = 0$, отмеченном выше, будем иметь уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\theta(s)}{x-s}\,ds = k^2\beta(x),\ a_1 < x < a_2. \qquad (5.8)$$

В соответствии с принятыми условиями должно выполняться:

$$\int_{a_1}^{a_2}\theta(x)dx = 0. \qquad (5.9)$$

Решение уравнения (5.8) определяется в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка интегрирования, и при условии (5.9) имеет вид[34]

$$\theta(x) = -\frac{k^2}{\pi\sqrt{(x-a_1)(a_2-x)}}\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{(s-a_1)(a_2-s)}\,\frac{\beta(s)}{x-s}\,ds.$$

Получим уравнения, удобные для решения практических задач при произвольных частотах колебаний. Рассмотрим уравнение (5.3). Его общее решение в обобщенных функциях можно записать в виде

$$H(\lambda) = -\left[1 + \nu\, reg\left(\frac{1}{|\lambda|-\nu}\right)\right]\frac{\Gamma(\lambda)}{g} +$$

$$+ A\nu\frac{\Gamma(\nu)}{g}\delta(\lambda-\nu) + B\nu\frac{\Gamma(-\nu)}{g}\delta(\lambda+\nu) + H_0(\lambda), \qquad (5.10)$$

где $H_0(\lambda)$ – однородное решение (при $\Gamma \equiv 0$):

$$H_0(\lambda) = A_c\delta(\lambda-\nu) + B_c\delta(\lambda+\nu), \qquad (5.11)$$

A, B, A_c и B_0 – комплексные константы. Слагаемые с дельта-функциями соответствуют в пространстве функций-оригиналов свободным волнам, в (5.11) – свободным независимым волнам. Для независимых свободных волн после примененения обратного преобразования Фурье к (5.11) можно получить

$$\eta_0(x) = F_x^{-1}\left[T_0(\lambda)\right] = A_0 e^{-i(\nu x - \theta_A)} + B_0 e^{i(\nu x + \theta_B)}$$

где A_0, B_0, θ_A, θ_B – действительные константы, определяющие амплитуду и фазу волн. Окончательная форма независимых волн будет описываться формулой

$$\eta_0(x,t) = \operatorname{Re}\eta_0(x)e^{ikt} = \operatorname{Re}\left[A_0 e^{-i(\nu x - \theta_A - kt)} + B_0 e^{i(\nu x + \theta_B + kt)}\right]$$

Это суперпозиция двух волн, движущихся в противоположные стороны с одинаковой скоростью $V_0 = k/\nu = g/k$, длина волн равна $2\pi/\nu$. В частности, при $A_0 \neq 0$ и $B_0 = 0$ волна распространяется вправо, при $A_0 = 0$ и $B_0 \neq 0$ – влево, при $A_0 = B_0$ – получается стоячая волна. Подбором параметров A_0, B_0, θ_A, θ_B можно получать различные виды волн.

Обратное преобразование Фурье (5.10) дает:

$$g\eta(x) = -\gamma(x) - \nu\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)Q(\nu, x-s)ds +$$
$$+\frac{A}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)e^{-i\nu(x-s)}ds + \frac{B}{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)e^{i\nu(x-s)}ds + g\eta_0(x), \qquad (5.12)$$

где (см. Приложение)

$$Q(\nu,x) = F_x^{-1}\left[reg\left(\frac{1}{|\lambda|-\nu}\right)\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\cos\nu x\,\mathrm{Ci}\,\nu|x| + \sin\nu|x|\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{Si}\,\nu|x|\right)\right],$$

а $\mathrm{Si}\,x$ и $\mathrm{Ci}\,x$ – интегральные синус и косинус [35]. Первый интеграл в (5.12) имеет логарифмическую особенность за счет интегрального косинуса.

Входящие в (5.12) константы определяются из условия излучения. В результате $A = i\nu\pi$, $B = i\nu\pi$, а уравнение принимает вид

$$g\eta(x) = -\gamma(x) - \nu\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)Q(\nu, x-s)ds +$$
$$+ i\nu\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)\cos\nu(x-s)ds + g\eta_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \qquad (5.13)$$

При этом

$$\eta(x)\big|_{x\to\pm\infty} = A_\pm e^{-i\nu x} + B_\pm e^{i\nu x},$$

где

$$A_+ = A_0 e^{i\theta_A} + A_{+\gamma}, \quad B_+ = B_0 e^{i\theta_B}, \quad A_- = A_0 e^{i\theta_A}, \quad B_- = B_0 e^{i\theta_B} + B_{-\gamma}$$

$$A_{+\gamma} = \frac{i\nu}{g}\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)e^{i\nu s}ds, \quad B_{-\gamma} = \frac{i\nu}{g}\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)e^{-i\nu s}ds.$$

Уравнение (5.13) без учета независимых волн получено другим способом в [37].

Используя (5.3), можно получить уравнение с регулярным ядром относительно функции $\theta(x) = \gamma'(x)$. Общее решение (5.3) можно представить еще в такой форме:

$$H(\lambda) = -reg\left(\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda| - \nu}\right)\left(\frac{-i\lambda\Gamma(\lambda)}{g}\right) +$$

$$+ A\nu\frac{\Gamma(\nu)}{g}\delta(\lambda - \nu) + B\nu\frac{\Gamma(-\nu)}{g}\delta(\lambda + \nu) + H_0(\lambda). \tag{5.14}$$

После обратного преобразования (5.4), с учетом определенных выше констант из условия излучения, будем иметь

$$-\int_{a_1}^{a_2}\theta(s)R(\nu, x - s)ds + i\int_{a_1}^{a_2}\theta(s)\sin\nu(x - s)ds + g\eta_0(x) = g\eta(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{5.15}$$

где (см. Приложение)

$$R(\nu, x) = F_x^{-1}\left[reg\left(\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda| - \nu}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,x + \mathrm{Si}\,\nu x\right)\cos\nu x - \mathrm{Ci}\,\nu|x|\sin\nu x\right].$$

Уравнение (5.15) без учета независимых волн использовалось в [36].

Во многих реальных задачах возможно задать только функцию $\beta'(x)$, как, например, в задаче о свободно плавающей пластине. В этом случае удобнее перейти к другому уравнению, полученному из (5.13) дифференцированием. Можно заметить, что

$$\frac{\partial Q(\nu, x)}{\partial x} = F_x^{-1}\left[-i\lambda\,reg\left(\frac{1}{|\lambda| - \nu}\right)\right] = -F_x^{-1}\left[i\,\mathrm{sgn}\,\lambda + \nu reg\left(\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\lambda}{|\lambda| - \nu}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi x} - \nu R(\nu, x).$$

В результате получается уравнение с ядром Коши:

$$-\gamma'(x) + \frac{\nu}{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\gamma(s)}{x - s}ds + \nu^2\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)R(\nu, x - s)ds -$$

$$-i\nu^2\int_{a_1}^{a_2}\gamma(s)\sin\nu(x - s)ds + g\eta_0'(x) = g\beta'(x),\ a_1 < x < a_2. \tag{5.16}$$

Полученные уравнения (5.13), (5.15) и (5.16) приведены к виду, удобному для непосредственного применения численных методов [22−26] решения сингулярных интегральных уравнений, в частности, метода дискретных вихрей. Уравнения (5.13) и (5.15) целесообразно использовать для решения задач о вынужденных колебаниях твердого тела в режиме генерации волн, когда амплитуда $\beta(x)$ задается. При этом схема расположения вихрей и расчетных точек будет соответствовать поиску решения, неограниченного на концах отрезка интегрирования. Необходимым дополнительным условием в таком случае будет условие задания суммарной нагрузки. Для решения задачи о колебаниях твердого тела на волновой поверхности в режиме свободного плавания целесообразно использовать уравнение (5.16). Распределение давления следует искать в классе функций, ограниченных на обоих концах отрезка интегрирования. При этом возникает необходимость в регуляризации численной схемы. Регуляризирующими переменными могут служить неизвестные углы поворота тела относительно горизонтального положения.

6. Выводы

Показано, что задачи теории волновых движений идеальной несжимаемой жидкости описываются сингулярными и гиперсингулярными интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями. Получены основные уравнения для общей постановки задачи о движении твердого тела с постоянной скоростью по поверхности жидкости конечной глубины, связывающие распределение давления по смоченной поверхности тела с функцией, описывающей форму границы жидкости − свободной и контактирующей с твердым телом.

Для частного случая гармонических колебаний при нулевой поступательной скорости (плавающего тела) в бесконечно глубокой жидкости получены различные сингулярные интегральные уравнения, не содержащие особые интегралы с бесконечными пределами и с неизвестной функцией, описывающей форму свободной поверхности, т.е. в виде, пригодном численного решения. Известные из литературы уравнения для этого частного случая согласуются с уравнениями, полученными в настоящей работе.

Применяемый в работе подход к выводу сингулярных интегральных уравнений теории волновых движений жидкости пригоден для трехмерных пространственных задач, а также связанных задач гидроупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 700 с.
2. Кочин Н.Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости // Собр. соч. –М.-Л: АН СССР, 1949.– Т.2. – С. 244–276.
3. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. – М.: Наука, 1967. – 280 с.
4. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
5. Friedrichs K.O., Lewy H. The dock problem // Comm. Pure Appl.Math. 1948, v. 1, N2, pp. 135–148.
6. Ursell F. The transmission of surface waves under surface obstacles // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1966, V. 57, N 3, pp. 638–668.
7. Ursell F. Slender oscillating ships at zero forward speed // J. Fluid Mech., 1962, V. 14, N 4, pp. 496–516.
8. Lee C. Motion characteristics of floating bodies // J. Ship Res., 1976, V. 20, pp. 181–189.
9. Squire V.A., Dugan J.P., Wadhams P. et al. Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995, 27. Pp. 115–168.
10. Watanabe E., Utsunomiya T., Wang C.M. Hydroelastyc analysis of pontoon-type VLFS: a literature surveiy // Engineering structures, 2004, 26. Pp. 245–256.

11. Keller J.B., Weitz M. Reflection and transmission coefficients for waves entering or leaving an icefield // Commun. Pure Appl. Math, 1950, 6. Pp. 415-417.
12. Evans D.V., Davies T.V. Wave-ice interaction. // Rep. 1313 Davidson Lab., Stevens Inst. Of Technol., Hoboken, N. J., 1968.
13. Bates H.F., Shapiro L.H. Long-period gravity waves in ice-covered sea // J. Geophys. Res., 1980, 85. Pp. 1095–1100.
14. Fox C., Squire V. Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // J. of Geophys. Res., 1990, V. 95, N 11, pp. 11,629–11,639.
15. Meylan M., Squire V. The response of ice floes to ocean waves // J. of Geophys. Res., 1994, V. 99, N C1, Yanuary 15, pp. 891–900.
16. Squire V., Dugan J., Wadhams P. et al. Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid. Mech., 1995, V. 27, pp, 1115–168.
17. Коробкин А.А. Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // ПМТФ, 2000, Т. 41, № 2. – С. 90–96.
18. Стурова И.В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу. – ПММ, 2002, Т.66, вып. 1. – С.87–94.
19. Хабахпашева Т.И. Плоская задача об упругой плавающей пластине // Динамика сплошной среды, 2000. Вып. 116. – С. 166–169.
20. Ткачева Л.А. Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // Изв. РАН МЖГ, № 3,2003. – С. 131–149.
21. Andrianov A.I. Hydroelastic analysis of very large floating structures. – Doctorale thesis, Delft University of Technology. 2005. – 188 p.
22. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
23. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
24. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // В кн.: «Численные методы решения диф. и инт. уравнений и квадратурные формулы». – М.: Наука, 1964. – С. 64–74.
25. Каландия А.И. Математические методы двумерной теории упругости. – М: Наука, 1973. – 304 с.
26. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. ун-та им. В.Н.Каразина. – 2000. – 92 с
27. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними . – М: Физматгиз, 1959. – 470 с.
28. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
29. Шварц Л. Математические методы для физических наук. − М.: Мир, 1965. − 412 с.
30. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. − М.: Наука, 1977. − 287 с.
31. Dovgiy S., Efremov I., Makasyeyev M. Some problems of a planing theory // High Speed Hydrodynamics. 2002. Proceedings of Int. Summer Scient. School / Public. Russia, Cheboksary−USA, Washington. Pp. 241–248.

32. Макасеев М.В. Установившиеся движения пластины по поверхности весомой жидкости с заданной нагрузкой и свободным углом хода // Прикладна гідромеханіка. 2003. Т. 5(77), №2, сс. 73−75.
33. Довгий С.О., Макасеев М.В. Глиссирование системы профилей по поверхности весомой жидкости // Доповіді НАН України. 2003. № 9. С. 39–45.
34. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. − М.: Наука, 1977. − 640 с.
35. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
36. Ефремов И.И., Лукащик Е.П. Колебания массивной плоской пластины, плавающей на поверхности весомой жидкости // High Speed Hydrodynamics and Numerical Simulations. Proceedings of conference. June 2006, Kemerovo, Russia. – Pp. 371–374.
37. Потетюнко Э.Н. Волновые движения жидкости со свободными границами. − Ростов/дон: Рост. отделен. Всесеюз. об-ва информатики и выч. техники. 1993. − 318 с.