

## Контактная задача для прямолинейной трещины под воздействием гармонического нагружения

А. В. Меньшиков, М. В. Меньшикова

*Центр микро- и наномеханики SEMINACS, Абердинский университет, Шотландия*

The paper is devoted to solution of a fracture dynamics problem for the elastic cracked solid with allowance for the crack faces contact interaction. The linear crack under oblique incidence of a time-harmonic tension-compression wave is considered. The Signorini contact constraints are imposed and the friction is governed by the Coulomb law. The problem is solved by the method of the boundary integral equations with the use of the iterative procedure.

### 1. Введение и актуальность рассматриваемой задачи

Известно, что наличие в структуре любого твердого тела разнообразных дефектов (трещин, полостей и т.п.), существенным образом влияющих на прочность и устойчивость материала, значительно усложняет решение задач теории упругости и механики разрушения.

При решении задач о динамическом (гармоническом) нагружении тела с трещинами, необходимо учитывать, что в реальности противоположные берега трещин всегда взаимодействуют между собой с образованием изменяющихся во времени областей нормального контакта, скольжения и сцепления, а на берегах трещин имеют место силы контактного взаимодействия. При этом область контакта берегов неизвестна заранее и должна быть определена в ходе решения задачи. К сожалению, в подавляющем большинстве известных авторам работ влиянием контактного взаимодействия берегов трещин неоправданно пренебрегают, допуская при деформации материала взаимное проникновение берегов трещин, что приводит к упрощенному описанию физических процессов и искажению получаемых механических характеристик [1–3].

В настоящей работе рассматривается задача о гармоническом нагружении двумерного пространства с прямолинейной трещиной конечной длины. Задача решена с учетом контактного взаимодействия берегов трещины. Проведен анализ распределения коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига в зависимости от угла падения волны и частоты нагружения.

### 2. Постановка и методика решения задачи

Математическая постановка задачи о динамическом нагружении упругого тела с трещинами, позволяющая учесть контактное взаимодействие их берегов, была предложена в монографии А.Н. Гузя и В.В. Зозули [1]. Там же также были получены эквивалентные исходной задаче граничные вариационные неравенства и разработаны итерационные алгоритмы численного решения задачи с использованием метода граничных интегральных уравнений. В работах [4–7] были решены двумерная и трехмерная задачи о гармоническом

нагрузении тел с трещинами, проведен сравнительный анализ полученных результатов с учетом и без учета контактного взаимодействия берегов.

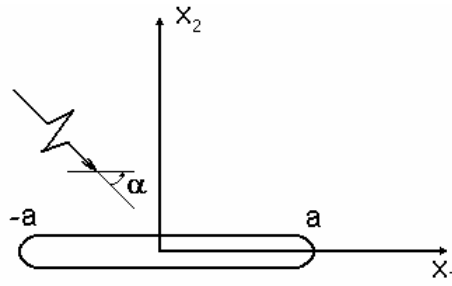


Рис. 1. Трещина под нагружением

В настоящей статье рассматривается задача о падении волны растяжения-сжатия с частотой  $\omega = 2\pi/T$  под произвольным углом к поверхности прямолинейной трещины конечной длины (Рис. 1). Не имеющая начального раскрытия трещина расположена в однородном, линейно-упругом, изотропном пространстве.

Как было отмечено ранее, противоположные берега трещин взаимодействуют между собой с образованием изменяющихся во времени областей нормального контакта, скольжения и сцепления. Контакт между берегами трещин предпологается односторонним, то есть не допускается взаимное проникновение берегов и нормальная составляющая вектора контактных сил взаимодействия – неотрицательна. В области контакта противоположные берега удерживаются силами трения или движутся относительно друг друга со скоростью, зависящей от коэффициента трения и величины вектора контактных сил взаимодействия. В соответствии с этими условиями, на берегах трещин для нормальных и касательных компонент векторов сил контактного взаимодействия  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  и разрыва перемещений  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  должны выполняться односторонние ограничения Синьорини и закон трения Кулона [1]:

$$\Delta u_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, q_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \Delta u_n(\mathbf{x}, t)q_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial \Delta u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial \Delta u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \frac{q_\tau(\mathbf{x}, t)}{|q_\tau(\mathbf{x}, t)|} \left| \frac{\partial \Delta u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|,$$

где  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in [0; T]$ ;  $\Omega = \{-a \leq x_1 \leq a, x_2 = 0\}$  – срединная поверхность трещины,  $k_\tau$  – коэффициент трения.

В работах [1, 4–7] показано, что решение задачи о гармоническом нагружении пространства с трещиной может быть сведено к решению с учетом ограничений (2.1), (2.2) системы граничных интегральных уравнений для коэффициентов Фурье векторов нагрузки и разрыва перемещений берегов трещины:

$$p_q^k(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} F_{qj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_j^k(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad q = \overline{1,2}, \quad k = \overline{-\infty, +\infty}, \quad (2.3)$$

где коэффициенты Фурье имеют вид

$$p_j^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T p_j(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \Delta u_j^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \Delta u_j(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad (2.4)$$

а физические значения компонент векторов нагрузки  $p_j(\mathbf{x}, t)$  и разрыва перемещений берегов трещины  $\Delta u_j(\mathbf{x}, t)$  представляются экспоненциальными рядами Фурье

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_j^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad \Delta u_j(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta u_j^k(\mathbf{x}) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad \omega_k = \omega k. \quad (2.5)$$

Ядра граничных интегральных уравнений, входящих в систему уравнений (2.3), представляют собой фундаментальные решения динамической теории упругости и могут быть получены последовательным дифференцированием тензора фундаментальных перемещений Грина. Для прямолинейной трещины интегральные ядра  $F_{qj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  имеют следующий вид [1, 4]:

$$F_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = F_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0, \quad (2.6)$$

$$F_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{i\mu}{4} \left[ \left( \frac{\omega_k}{c_2} \right)^2 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_2} \right) - 4 \frac{\omega_k}{c_2 r} H_1^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_2} \right) + \right. \\ \left. 4 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\omega_k}{c_1 r} H_1^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_1} \right) + \frac{12}{r^2} \left( H_2^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_2} \right) - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} H_2^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_1} \right) \right) \right], \quad (2.7)$$

$$F_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{i\mu}{2} \left[ \frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)^2} \left( \frac{\omega_k}{c_2} \right)^2 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_1} \right) + 2 \frac{\omega_k}{c_2 r} H_1^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_2} \right) + \right. \\ \left. 2 \frac{\omega_k}{c_1 r} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} H_1^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_1} \right) - \frac{6}{r^2} \left( H_2^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_2} \right) - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} H_2^{(1)} \left( \frac{\omega_k r}{c_1} \right) \right) \right], \quad (2.8)$$

где  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  и  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорости распространения продольных и поперечных волн,  $r$  – расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ,  $\rho$  – плотность материала,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе, а  $H_n^1 \left( \frac{\omega_k r}{c_i} \right)$  – функции Ханкеля первого рода.

Для решения задачи был применен основанный на вариационных принципах теории упругости итерационный алгоритм, который можно условно разделить на следующие этапы:

- 1) задается начальное распределение нагрузки на поверхности трещины;
- 2) задача решается без учета ограничений Синьорини и закона трения Кулона;
- 3) полученное решение корректируется с учетом указанных ограничений;
- 4) в случае, если требуемая точность не достигнута, совершается переход к следующему итерационному шагу.

Подробную информацию о свойствах данного алгоритма можно найти в работах [1, 8–10].

### 3. Регуляризация расходящихся интегралов

Известно, что основными преимуществами использования метода граничных интегральных уравнений являются естественное отражение условий взаимодействия на границах тел и снижение на единицу геометрической размерности задачи. В то же время применение данного метода может привести к появлению интегральных операторов с ядрами, содержащими особенности различного вида [1–3].

В работах [1, 4, 11–14] показано, что интегральные ядра  $F_{qj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  содержат гиперсингулярные особенности, поэтому интегралы, присутствующие в системе уравнений (2.3), должны рассматриваться в смысле конечной части расходящегося интеграла по Адамару. В частности, при численном решении задачи при помощи метода Галеркина с пробным решением на основе линейных элементов были регуляризованы и вычислены следующие гипер- и слабосингулярные интегралы [14]:

$$\int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \frac{1}{r^2} dx dy, \int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \frac{\mathbf{x}}{r^2} dx dy, \int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \frac{\mathbf{y}}{r^2} dx dy, \int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{r^2} dx dy, \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \ln(r) dx dy, \int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \mathbf{x} \ln(r) dx dy, \int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \mathbf{y} \ln(r) dx dy, \int_{\Omega_j^h} \int_{\Omega_j^h} \mathbf{x}\mathbf{y} \ln(r) dx dy. \quad (3.2)$$

### 4. Численные результаты

Численные результаты, представленные в настоящей работе, были получены для трещины, находящейся в материале со следующими характеристиками: коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ , модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент трения  $k_\tau = 0.2$ .

Для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига были использованы следующие асимптотические выражения [1, 2, 4]:

$$K_I(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_2(\mathbf{x}, t),$$

$$K_{II}(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_1(\mathbf{x}, t),$$

где  $r$  - расстояние от вершины трещины.

Максимальные значения динамических коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I^{\max}(\mathbf{x}) = \max_t K_I(\mathbf{x}, t)$ ,  $K_{II}^{\max}(\mathbf{x}) = \max_t K_{II}(\mathbf{x}, t)$  были нормированы соответствующими статическими величинами  $K_I^{\text{stat}} = \sqrt{\pi a}$  и  $K_{II}^{\text{stat}} = \sqrt{\pi a}$  [1–3].

Особо отметим, что, в отличие от решения задачи о нормальном гармоническом нагружении, решение рассматриваемой задачи – несимметрично относительно центра трещины [2, 4–7]. На рисунках 2 и 3 показано различие между величинами коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва (Рис. 2) и поперечного сдвига (Рис. 3), вычисленных в окрестности «дальней» (a,0) и «ближней» (-a,0) вершин трещины, при различных значениях приведенного волнового числа  $k_2 a$  ( $k_2 = \omega / c_2$ ) и угла падения волны  $\alpha$ .

На рисунках хорошо видно, что полученные результаты существенно отличаются друг от друга. При рассмотренных в настоящей работе приведенных волновых числах ( $0 \leq k_2 a \leq 2.0$ ) и углах падения волны ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ), значения коэффициентов интенсивности напряжений в «дальней» вершине трещины существенно больше, чем в «ближней» вершине. Причем, если для коэффициента интенсивности напряжений поперечного сдвига различие между результатами не превышает 15–20 процентов (Рис. 3), то для коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва это различие может достигать 50 процентов (Рис. 2). В связи с этим на рисунках 4 и 5 значения коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва (Рис. 4) и поперечного сдвига (Рис. 5) приведены лишь для «дальней» вершины трещины.

Видно, что коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва достигает своего максимального значения при нормальном падении волны ( $\alpha = 90^\circ$ ), а коэффициент интенсивности напряжений поперечного сдвига – при угле падения волны  $\alpha = 45^\circ$ .

#### 4. Заключение

В настоящей работе при помощи метода граничных интегральных уравнений было получено численное решение задачи о гармоническом нагружении двумерного линейно-упругого, однородного и изотропного пространства, содержащего прямолинейную трещину конечной длины. Задача решена с применением итерационного алгоритма, основанного на вариационных принципах теории упругости. Проведен анализ распределения коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига в зависимости от угла падения волны и частоты нагружения, показано, что решение задачи – несимметрично относительно центра трещины.

Полученные результаты еще раз подтверждают важность учета контактного взаимодействия берегов при решении задач о динамическом нагружении тел с трещинами. Дальнейшие исследования будут направлены на изучение влияния контактного взаимодействия в задачах о межслоевых трещинах в композитных материалах.

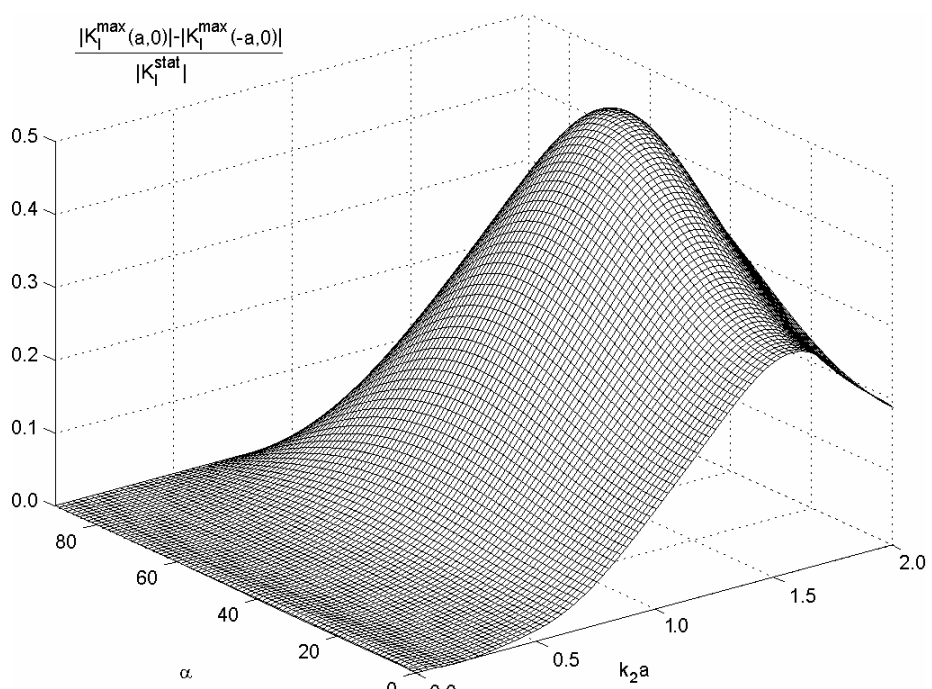


Рис. 2. Различие между значениями коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва в вершинах трещины  $(a,0)$  и  $(-a,0)$

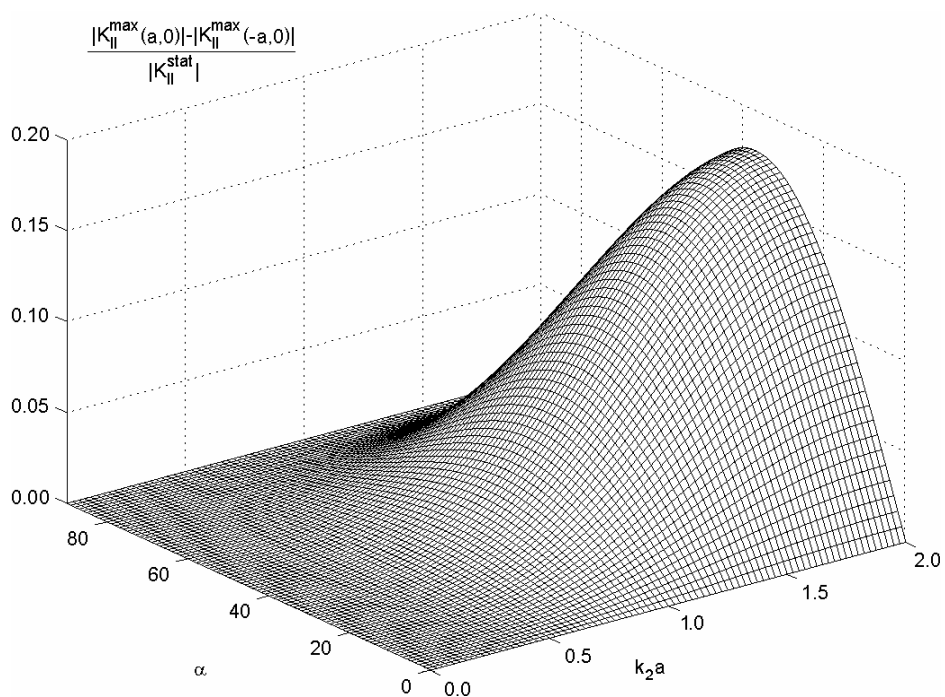


Рис. 3. Различие между значениями коэффициента интенсивности напряжений поперечного сдвига в вершинах трещины  $(a,0)$  и  $(-a,0)$

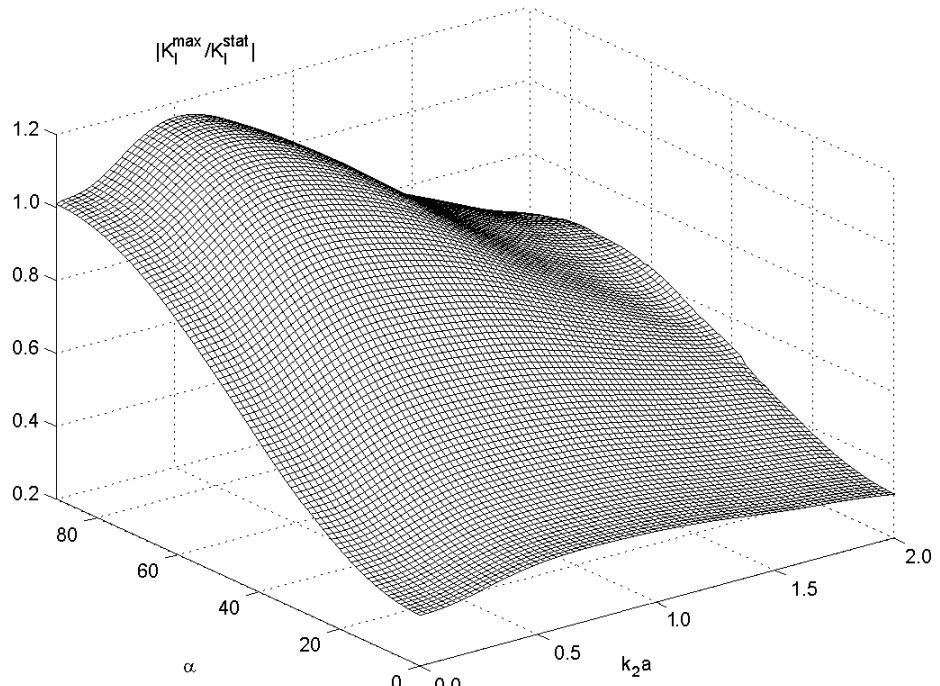


Рис. 4. Коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва в вершине трещины  $(a,0)$

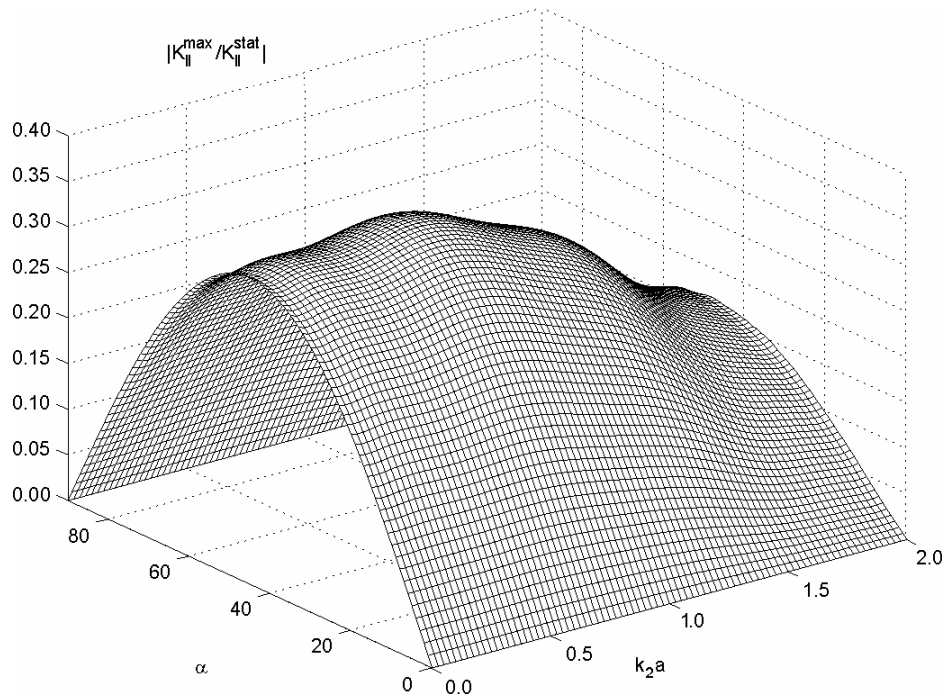


Рис. 5. Коэффициент интенсивности напряжений поперечного сдвига в вершине трещины  $(a,0)$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4т./ Под ред. А.Н. Гузя – Т. 4. Кн.2. К.: Наук. думка, 1993. – 236 с.
2. Static and Dynamic Fracture Mechanics. Aliabadi MH, Brebbia CA, Parton VZ, editors. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
3. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. – 248 p.
4. Zozulya V.V., Men'shikova M.V. Dynamic contact problem for a plane with a finite crack // International Applied Mechanics. – 2002. – 38(12). – P.1459–1463.
5. Guz A.N., Menshykov O.V., Zozulya V.V. Surface contact of elliptical crack under normally incident tension-compression wave // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 40(3). – P.285–291.
6. Меньшиков А.В. Контактное взаимодействие берегов круговой трещины при косонаправленном гармоническом нагружении // Доклады НАН Украины.– 2006.– №7. – С.47–51.
7. Guz A.N., Menshykov O.V., Zozulya V.V., Guz I.A. Contact problem for the plane elliptical crack under normally incident shear wave // Computer Modelling in Engineering & Sciences. – 2007. – 17(3). – P.205–214.
8. Zozulya V.V., Men'shikova M.V. Study of iterative algorithms for solution of dynamic contact problems for elastic cracked bodies // International Applied mechanics. – 2002. – 38(5). – P.573–577.
9. Zozulya V.V., Menshykov O.V. Use of the constrained optimization algorithms in some problems of fracture mechanics // Optimization and Engineering. – 2003. – 4(4). – P. 365–384.
10. Mistakidis E.S., Stavroulakis G.E. Nonconvex optimization in mechanics. Algorithms, heuristics and engineering applications by FEM. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 300 p.
11. Martin P.A., Rizzo F.J., Gonzalves I.R. On hypersingular boundary integral equations for certain problems in mechanics // Mechanics Research Communications – 1989, No 16. – P.65–71.
12. Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I. Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers. – 1999. – 22(6). – P.763–775.
13. Зозуля В.В., Меньшиков А.В., Меньшикова М.В. Применение граничных гиперсингулярных интегральных уравнений в механике разрушения // Теоретическая и прикладная механика. – 2001, вып. 33 – С.57–63.
14. Menshykov O.V., Menshykova M.V., Wendland W.L. On use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading // International Applied mechanics. – 2005. – 41(11). – P.1324–1329.