Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 775, 2007, с.205-215

УДК 532.546

Единственность решения граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде[1]

В. Ф. Пивень
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Россия

Author's formulation of conjugation problems are generalized on a case of a filtration in the anisotropic-non-uniform porous ground. Uniqueness of the decision of these problems is investigated.

1. Основные уравнения

Течение несжимаемой жидкости вязкости μ и плотности ρ в недеформируемой анизотропной среде (грунте) с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1,2,3$ описываем полями скоростей фильтрации $\vec{v}$ и давлений p, которые являются функциями точки $M = (x_1, x_2, x_3)$ пространства, а в нестационарном случае – также времени t (t - параметр). Полагаем, что действующая на жидкость массовая сила $\vec{F}$ потенциальна: $\vec{F} = -\nabla \Pi$ (Π - потенциал, сила $\vec{F}$ отнесена к единице массы жидкости). В этом случае обобщенный закон Дарси имеет вид [3]

$$\vec{v} = K \cdot \nabla \varphi \quad \left(\varphi = -\frac{p + \rho \Pi}{\mu} \right), \tag{1.1}$$

где φ- обобщенный потенциал скорости, ∇ - оператор Гамильтона.

Пусть в области D течения распределены его источники (стоки) с объемной плотностью $\tilde{\rho}$. Плотность $\tilde{\rho}$ - непрерывная функция точки $M \in D$, а в нестационарном случае – также времени t. Плотность $\tilde{\rho}$ - сингулярная функция $M \in D$, если источники (стоки) дискретные, расположенные в конечном числе N точек $M_k \in D$, $k = 1,2..,N$. В этом случае уравнение неразрывности запишем

$$\nabla \cdot \vec{v} = \tilde{\rho} . \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует уравнение для обобщенного потенциала φ:

$$T\varphi \equiv \nabla \cdot (K \cdot \nabla \varphi) = \tilde{\rho} \text{ или } T\varphi \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \tilde{\rho} . \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) в области D эллиптического типа, если компоненты тензора проницаемости K_{ij}, $i, j = 1,2,3$ в любой точке $M \in D$ удовлетворяют необходимым и достаточным условиям [3]

$$K_{11} > 0 , \; K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2} \right)^2 > 0 ,$$

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).*

$$K_{11}K_{22}K_{23}+\frac{1}{4}\Big[(K_{12}+K_{21})(K_{13}+K_{31})(K_{23}+K_{32})-K_{11}(K_{23}+K_{32})^2- \qquad (1.4)$$
$$-K_{22}(K_{13}+K_{31})^2-K_{33}(K_{12}+K_{21})^2\Big]>0\,.$$

Далее, полагаем, что K_{ij}, $i,j=1,2,3$ удовлетворяет условиям (1.4). Моделируем $K_{ij}(M)$, $i,j=1,2,3$ непрерывно дифференцируемыми хотя бы один раз в области D с границей σ функциями координат $\left(K_{ij}(M)\in C^1(\overline{D}),\ \overline{D}\in D\cup\sigma\right)$. При этом границу σ моделируем гладкой поверхностью.

2. Постановка основных граничных задач фильтрации

Обобщим указанную в [1-3] постановку основных граничных задач фильтрации в анизотропной и неоднородной пористой среде. Первую и вторую задачи и задачу сопряжения сформулируем для стационарного течения. В нестационарном случае эти задачи ставятся аналогично, причем в них необходимо к граничным условиям присоединить начальные условия для обобщенного потенциала, полагая его заданным в начальный момент времени.

Первая краевая задача. Найти обобщенный потенциал $\varphi(M)$ класса $C^2(D)\cap C(\overline{D})$, удовлетворяющий в области D уравнению (1.3) и на её границе σ_1 условию первого рода

$$\varphi^+(M)=f(M) \quad \left(f(M)=-\left[p_0(M)+\rho\Pi(M)\right]/\mu\right),\ M\in\sigma_1. \qquad (2.1)$$

Здесь и далее «+» (или «-») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (или противоположенной стороны) орта нормали $\vec{n}$ к ней.

Условие (2.1) означает, что на границе σ_1 задано давление $p_0(M)$ ($f(M)$ - непрерывная функция $M\in\sigma_1$).

Вторая краевая задача. Найти обобщенный потенциал $\varphi(M)$ класса $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющий в области D уравнению (1.3) и на её границе σ_2 условию второго рода

$$\left[\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu}\right]^+=g(M),\quad M\in\sigma_2\,. \qquad (2.2)$$

Здесь конормаль $\vec{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ - орт границы σ_2, связанный с ортом нормали $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ к ней, равенством [3]

$$\vec{\nu}=\frac{\vec{n}\cdot K}{|\vec{n}\cdot K|}=\frac{1}{K_n}\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_j n_i K_{ij}\quad\left(K_n=|\vec{n}\cdot K|=\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}n_iK_{ij}\right)^2\right]^{1/2}\right). \qquad (2.3)$$

Условие (2.2) означает, что на границе σ_2 задана нормальная составляющая скорости $v_n=\vec{n}\cdot\vec{v}=K_n\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ ($g(M)$ - непрерывная функция $M\in\sigma_2$). Если граница σ_2 непроницаема для жидкости (поток жидкости через нее отсутствует), то в условии (2.2) $g(M)=0$.

Задача сопряжения на границе раздела сред. Найти обобщенный потенциал $\varphi(M)$ ($\varphi(M)=\varphi_1(M),\ M\in D_1$; $\varphi(M)=\varphi_2(M), M\in D_2$) класса $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющий в области $D=D_1\cup D_2$ (в её частях D_1 и D_2 среды проницаемости $K_1=\left(K_{ij}^{(1)}\right)$ и $K_2=\left(K_{ij}^{(2)}\right)$) уравнению (1.3), а на границе Γ сопряжения D_1 и D_2 условиям

$$\varphi_1^+(M)=\varphi_2^-(M),\ K_{1n}^+(M)\left[\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial\nu_1}\right]^+=K_{2n}^-(M)\left[\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial\nu_2}\right]^-,\ M\in\Gamma, \quad (2.4)$$

где согласно (2.3)

$$\vec{\nu}_\delta=\frac{\vec{n}\cdot K_\delta}{\left|\vec{n}\cdot K_\delta\right|}=\frac{1}{K_{\delta n}}\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_j n_i K_{ij}^{(\delta)}\ ,\ K_{\delta n}=\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}n_i K_{ij}^{(\delta)}\right)^2\right]^{1/2},\quad \delta=1,2.$$

Условия (2.4) означают непрерывность давления и расхода жидкости на границе Γ (орт $\vec{n}\in\Gamma$ направлен в D_1).

Задача эволюции границы раздела жидкостей. Найти положение границы раздела жидкостей Γ_t: $\vec{r}_M=\vec{r}_M(t,S_1,S_2)$, ($S_1,S_2$ - параметры) в каждый момент времени $t>0$ как решение $\vec{r}_M$ класса $C^1(t>0)\cap C(t\ge 0)$ и решение $\varphi(M,t)$ $(\varphi(M,t)=\varphi_1(M,t),\ M\in D_1;\ \varphi(M,t)=\varphi_2(M,t),\ M\in D_2)$ класса $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ системы дифференциального уравнения границы Γ_t:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt}=\frac{\left[K_1(M)\cdot\nabla\varphi_1(M,t)\right]^+ +\left[K_2(M)\cdot\nabla\varphi_2(M,t)\right]^-}{2},\ M\in\Gamma_t \quad (2.5)$$

и уравнения (1.3), которые удовлетворяют следующим условиям: начальному

$$\text{при } t=0\ \ \Gamma_t=\Gamma_0:\ \vec{r}_0=\vec{r}_M(0,S_1,S_2) \quad (2.6)$$

и граничному

$$\mu_1\varphi_1^+(M,t)-\mu_2\varphi_2^-(M,t)=(\rho_2-\rho_1)\Pi(M,t),$$
$$\left[\frac{\partial\varphi_1(M,t)}{\partial\nu}\right]^+=\left[\frac{\partial\varphi_2(M,t)}{\partial\nu}\right]^-,\ M\in\Gamma_t. \quad (2.7)$$

В задаче эволюции (1.3), (2.5)-(2.7) полагаем, что жидкости разных физических свойств (вязкости μ и плотности ρ) занимают части $D_1(\mu_1,\rho_1)$ и $D_2(\mu_2,\rho_2)$ области $D=D_1\cup D_2$, которые сопрягаются на подвижной границе Γ_t ($\overline{D}=D\cup\Gamma_t$, орт нормали $\vec{n}\in\Gamma_t$ направлен в D_1). Принимаем «поршневую» модель вытеснения жидкостей, в которой одна жидкость полностью замещает другую. Условия (2.7) означают непрерывность на границе Γ_t давления (в предположении пренебрежимой малости капиллярных сил) и расхода жидкостей.

В том случае, когда область D течения ограничена сингулярной поверхностью и имеет бесконечно удаленную точку, то его обобщенный потенциал должен также удовлетворять определенным условиям. Укажем эти условия для стационарного течения (в нестационарном случае они формулируются аналогично). Если граница σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$) сингулярная, то есть на ней проницаемость $K = (K_{ij})$ обращается в бесконечность (на части σ_{01}) и равна нулю (на части σ_{02}), то выполняются условия

$$\varphi^+(M) = 0\,, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \left[K_n(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial \nu} \right]^+ = 0\,, \quad M \in \sigma_{02}\,. \qquad (2.8)$$

Условия (2.8) означают, что поверхность σ_{01} - граница бассейна жидкости с «нулевым» значением обобщенного потенциала, а поверхность σ_{02} - непроницаема для жидкости (поток через неё отсутствует).

Когда обобщенный потенциал не имеет сингулярностей в бесконечности, то потребуем выполнения для него условий регулярности

$$\varphi(M) = \mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-1}\right), \quad \left|K(M) \cdot \nabla \varphi(M)\right| = \mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-2}\right), \text{ при } r_{MM_0} \to \infty\,, \qquad (2.9)$$

где r_{MM_0} - расстояние между произвольной M и фиксированной M_0 точками области D. Условия (2.9) означают, что обобщенный потенциал $\varphi(M)$ и скорость $\vec{v}(M)$ течения обращаются в ноль на бесконечности.

Если область D течения ограничена замкнутой поверхностью $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ и не содержит (или содержит) бесконечно удаленную точку, то поставленные выше задачи называются внутренними (или внешними) задачами. Условия (2.9), как показано далее, обеспечивают единственность решения внешних задач.

3. Формула Грина для обобщенного потенциала

Запишем первую формулу Грина для обобщенного потенциала $\varphi(M)$ (в нестационарном случае время t войдет в φ как параметр). Пусть $\varphi(M)$ класса $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, а проницаемость $K(M) = (K_{ij}(M))$ моделируем функциями класса $C^1(\overline{D})$. ($\overline{D} = D \cup \sigma$, σ - гладкая поверхность с ортом нормали $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, внешней к области D). Воспользуемся формулой Остроградского для вектора $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$

$$\int_D \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\tau = \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} n_i A_i d\sigma\,.$$

В этой формуле выберем $A_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $i = 1,2,3$ и запишем

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\tau = \int_\sigma \sum_{i,j=1}^{3} n_i K_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\sigma\,.$$

Учитывая выражение оператора $T\varphi$ из (1.3) и конормали $\vec{\nu}$ (2.3), имеем формулу Остроградского для обобщенного потенциала

$$\int_D T\varphi d\tau = \int_\sigma K_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma \,. \tag{3.1}$$

Так как $T\varphi \equiv \nabla \cdot (K \cdot \nabla \varphi) = div(K \cdot \nabla \varphi)$, то для функций $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$ того же класса, что и $\varphi(M)$ запишем интеграл

$$\int_D \varphi_2 T\varphi_1 d\tau = \int_D \varphi_2 div(K \cdot \nabla \varphi_1) d\tau \,.$$

Учитывая для вектора $\vec{a}$ и скалярной функции f равенство $div(f\vec{a}) = f \, div\, \vec{a} + a \cdot \nabla f$ при $\vec{a} = K \cdot \nabla \varphi_1$ и $f = \varphi_2$, этот интеграл представим в виде

$$\int_D \varphi_2 T\varphi_1 d\tau = \int_D div[\varphi_2 (K \cdot \nabla \varphi_1)] d\tau - \int_D \nabla \varphi_2 \cdot (K \cdot \nabla \varphi_1) d\tau \,.$$

Согласно (3.1) имеем

$$\int_D div[\varphi_2 (K \cdot \nabla \varphi_1)] d\tau = \int_\sigma K_n \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} d\sigma \,.$$

Тогда получаем так называемую первую формулу Грина

$$\int_D \varphi_2 T\varphi_1 d\tau = \int_\sigma K_n \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} d\sigma - \int_D \nabla \varphi_2 \cdot (K \cdot \nabla \varphi_1) d\tau \,. \tag{3.2}$$

Формулы (3.1) и (3.2) остаются в силе, когда проницаемость терпит разрыв в области D, ограниченной гладкой поверхностью σ, если обобщенный потенциал $\varphi(M)$ удовлетворяет обобщенным условиям Остроградского:

1) $\varphi(M)$ - функция класса $C(\overline{D})$ ($\overline{D} = D \cup \sigma$);
2) в каждых попарно не пересекающихся областях D_α со средой проницаемости $K_\alpha = (K_{ij}^\alpha)$ класса $C^1(\overline{D}_\alpha)$, функция $\varphi(M)$ класса $C^2(D_\alpha) \cap C(\overline{D}_\alpha)$ ($\overline{D}_\alpha = D_\alpha \cup \Gamma_\alpha$, Γ_α - гладкая поверхность, $\alpha = 1,2,..., a$);
3) на общих границах Γ_α, прилегающих друг к другу подобластей D_α^+ и D_α^- выполняются условия

$$K_n^+(M)\left[\frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial \nu^+}\right]^+ = K_n^-(M)\left[\frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial \nu^-}\right]^-, \; M \in \Gamma_\alpha, \; \alpha = 1,2,..., a. \tag{3.3}$$

Здесь «+» («-») обозначают предельные значения соответствующих функций при подходе со стороны (противоположенной стороны) орта нормали $\vec{n} \in \Gamma_\alpha$, $\vec{\nu}^\pm$ - конормаль границы Γ_α : $\vec{\nu}^\pm = \dfrac{\vec{n} \cdot K^\pm}{K_n^\pm}$, $K_n^\pm = |\vec{n} \cdot K^\pm|$.

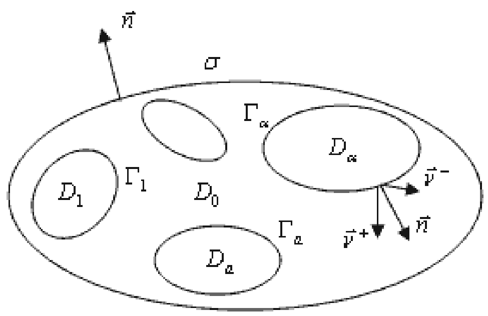

Рис. 1. Область фильтрации

Убедимся в справедливости формулы (3.1) на конкретном примере области фильтрации (см. рис.1). В этом случае согласно формулы (3.1) имеем

$$\int_{D_0} T\varphi d\tau = \int_{\sigma} K_n \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma - \sum_{\alpha=1}^{a} \int_{\Gamma_\alpha} K_n^+ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu^+}\right]^+ d\sigma,$$

$$\int_{D_\alpha} T\varphi d\tau = \int_{\Gamma_\alpha} K_n^- \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\nu^-}\right]^- d\sigma, \ \alpha = 1,2,..,a.$$

Складывая почленно левые и правые части этих равенств и учитывая обобщенные условия Остроградского, имеем формулу (3.1). Следовательно, при тех же обобщенных условиях Остроградского будет иметь место формула (3.2), вытекающая из (3.1).

4.Единственность решения граничных задач

Воспользуемся формулой (3.2) для исследования единственности поставленных выше граничных задач фильтрации. Первую и вторую краевые задачи и задачу сопряжения на границе раздела пористых сред исследуем для стационарных течений (в нестационарном случае результаты останутся в силе). Единственность нестационарной задачи эволюции исследуем отдельно.

Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ - два решения какой-либо из указанных стационарных задач. Разность $\omega(M) = \varphi(M) - \varphi'(M)$ удовлетворяет всюду в области D следующему из (1.3) однородному уравнению

$$T\omega(M) \equiv \nabla \cdot [K(M) \cdot \nabla\omega(M)] = 0 \text{ или } T\omega(M) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}\right] = 0,$$

$$M \in D. \quad (4.1)$$

Для $\omega(M)$ из (2.1), (2.2) и (2.4) имеем однородные краевые условия для первой задачи

$$\omega^+(M) = 0, \ M \in \sigma_1, \quad (4.2)$$

второй задачи

$$\left[\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}\right]^+ = 0, \ M \in \sigma_2 \quad (4.3)$$

и условия для задачи сопряжения

$$\omega^+(M)=\omega^-(M),\ \ K_{1n}^+(M)\left[\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}\right]^+=K_{2n}^-(M)\left[\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}\right]^-,\ \ M\in\Gamma\ . \tag{4.4}$$

Условия на сингулярной границе (2.8) и в бесконечности (2.9) записываем для $\omega(M)$:

$$\omega^+(M)=0\,,\ M\in\sigma_{01};\qquad \left[K_n(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}\right]^+=0\,,\ M\in\sigma_{02}\,, \tag{4.5}$$

$$\omega(M)=\mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-1}\right),\ \left|K(M)\cdot\nabla\omega(M)\right|=\mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-2}\right)\ \text{при}\ r_{MM_0}\to\infty\,. \tag{4.6}$$

Полагаем, что $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ удовлетворяют обобщенным условиям Остроградского. Тогда этим же условиям будет удовлетворять функция $\omega(M)$ (условия (3.3) и (4.4) идентичны) и к ней можно применить формулу (3.2) в случае, когда проницаемость $K(M)=\left(K_{ij}(M)\right)$ разрывная функция. Запишем формулу (3.2) для области D, ограниченной гладкой поверхностью σ, состоящей из указанных поверхностей σ_1 и σ_2 $(\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2)$. Положим в ней $\varphi_1=\omega(M)$, $\varphi_2=\omega(M)$ и учтем

$$\nabla\omega\cdot(K\cdot\nabla\omega)=\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\,.$$

Имеем первую формулу Грина для $\omega(M)$:

$$\int_D\omega(M)T\omega(M)d\tau=\int_\sigma K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma-\int_D\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau\,. \tag{4.7}$$

Если область D кроме поверхности σ ограничена также сингулярной поверхностью σ_0 $(\sigma_0=\sigma_{01}\cup\sigma_{02})$, то в силу условий (4.5) интеграл

$$\int_{\sigma_0}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma=0 \tag{4.8}$$

и, следовательно, в формуле (4.7) интеграл, по-прежнему, только по поверхности σ.

Так как $\omega(M)$ - решение уравнения (4.1) в области D ($T\omega(M)=0$), то формула (4.7) принимает вид

$$\int_D\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau=\int_\sigma K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma\,. \tag{4.9}$$

Теорема 1. Решение $\varphi(M)$ первой внутренней краевой задачи (1.3), (2.1) единственно в классе функций $C^1(D)\cap C(\overline{D})$ ($\overline{D}=D\cup\sigma_1$).

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ - два решения внутренней задачи (1.3), (2.1). Так как функция $\omega(M)=\varphi(M)-\varphi'(M)$ - решение однородной внутренней краевой задачи (4.1), (4.2), то из формулы (4.9) ($\sigma=\sigma_1$) следует $\dfrac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,3$ или $\omega(M)=const$, $M\in D$. Так как функция $\omega(M)$

непрерывна всюду в области $\overline{D}$, то согласно условию (4.2) имеем $\omega(M)=0$, то есть $\varphi(M)=\varphi'(M)$, $M\in\overline{D}$. ■

Теорема 2. Любые два решения $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ второй внутренней краевой задачи (1.3), (2.2) из класса функций $C'(\overline{D})$ ($\overline{D}=D\cup\sigma_2$) могут отличаться лишь на аддитивную постоянную: $\varphi(M)-\varphi'(M)=const$.

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ - решения внутренней задачи (1.3), (2.2). Поскольку функция $\omega(M)=\varphi(M)-\varphi'(M)$ - решение однородной внутренней краевой задачи (4.1), (4.3), то из формулы (4.9) ($\sigma=\sigma_2$) имеем

$\dfrac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,3$ или $\omega(M)=\varphi(M)-\varphi'(M)=const$. ■

Замечание. При наличии в области D источников (стоков) суммарной мощности Q ($Q=\int\limits_D\tilde{\rho}(M)d\tau$ или $Q=\sum\limits_{k=1}^{N}q_k$) вторая внутренняя краевая задача (1.3), (2.2) разрешима, если заданная на границе σ_2 функция $g(M)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\sigma_2}K_n(M)g(M)d\sigma=Q\,. \tag{4.10}$$

Условие (4.10) имеет ясный гидродинамический смысл: поток вектора скорости $\vec{v}$ через граничную поверхность σ_2 равен мощности Q источников (стоков), расположенных внутри этой поверхности.

В случае, когда поверхность σ_2 непроницаема для жидкости, то в условии (2.2) $g(M)=0$ и вторая внутренняя краевая задача разрешима согласно (4.10), если в области D нет источников (стоков) либо их суммарная мощность равна 0 ($Q=0$).

Теорема 3. Решение $\varphi(M)$ первой (1.3), (2.1) (второй (1.3), (2.2)) внешней краевой задачи единственно в классе функций $C^1(D)\cap C(\overline{D})$, $\overline{D}=D\cup\sigma_1$ ($C^1(\overline{D})$, $\overline{D}=D\cup\sigma_2$), регулярных на бесконечности.

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ - решения первой (второй) внешней краевой задачи и их разность $\omega(M)=\varphi(M)-\varphi'(M)$. Из некоторой точки M_0, лежащей внутри поверхности σ ($\sigma=\sigma_1$ или σ_2) опишем сферу σ_R настолько большого радиуса R, чтобы она целиком лежала в области D. Для функции $\omega(M)$в области D_R, ограниченной поверхностями σ и σ_R, применим формулу (4.7). Получим

$$\int\limits_{D_R}\omega(M)T\omega(M)d\tau=\int\limits_{\sigma\cup\sigma_R}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma-\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau\,.$$

Это равенство остается в силе также в случае, когда область D_R кроме поверхности $\sigma\cup\sigma_R$ ограничена сингулярной поверхностью $\sigma_0=\sigma_{01}\cup\sigma_{02}$ поскольку на ней выполняется равенство (4.8).

Так как $\omega(M)$ - решение однородной первой (4.1), (4.2) (второй (4.1), (4.3)) краевой задачи в области D_R, то в последнем равенстве $T\omega(M)=0$, и интеграл по σ равен нулю. Следовательно, имеем

$$\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau=\int\limits_{\sigma_R}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma. \quad (4.11)$$

Оценим в равенстве (4.11) интеграл по σ_R. Учитывая для $\omega(M)$ условия регулярности (4.6) и равенство $\vec{n}\cdot[K(M)\cdot\nabla\omega(M)]=K_n(M)\dfrac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}$, находим

$$\left|\int\limits_{\sigma_R}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma\right|\le\int\limits_{\sigma_R}\frac{d\sigma}{r^3_{MM_0}}=\frac{4\pi}{R}. \quad (4.12)$$

Учитывая (4.12) и переходя в равенстве (4.11) при $R\to\infty$ к пределу, имеем

$$\int\limits_{D}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau=0.$$

Отсюда следует $\dfrac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,3$ или $\omega(M)=const$, $M\in D$. В силу условий (4.6) $\omega(M)\to 0$ при $r_{MM_0}=R\to\infty$. Поэтому $\omega(M)=0$ или $\varphi(M)=\varphi'(M)$, $M\in D$. ■

Теорема 4. Пусть проницаемость среды $K=(K_{ij})$ терпит разрыв на границе Γ частей D_1 и D_2 неограниченной области D ($D=D_1\cup D_2$) и моделируется функцией класса $C^1(D)$. Тогда решение $\varphi(M)$ задачи сопряжения (1.3) (2.4), удовлетворяющее обобщенным условиям Остроградского, единственно в классе функций $C^1(D)$, регулярных на бесконечности.

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ и $\varphi'(M)$ - решения задачи (1.3), (2.4), удовлетворяющие обобщенным условиям Остроградского, их разность $\omega(M)=\varphi(M)-\varphi'(M)$ также удовлетворяет этим условиям. Проведем из произвольной точки M_0 области $D=D_1\cup D_2$ сферу σ_R настолько большого радиуса R, чтобы замкнутая граница Γ целиком лежала внутри поверхности σ_R. Применим формулу (4.7) для $\omega(M)$ в области D_R, ограниченной поверхностью σ_R, получим

$$\int\limits_{D_R}\omega(M)T\omega(M)d\tau=\int\limits_{\sigma_R}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma-\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau.$$

Это равенство остается в силе, если наряду с поверхностью σ_R границей области D_R является сингулярная граница σ_0, на которой выполняются (4.8).

Так как $\omega(M)$ решение уравнения (4.1) в области D_R ($T\omega(M)=0$), то последнее равенство принимает вид

$$\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau=\int\limits_{\sigma_R}K_n(M)\omega(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial\nu}d\sigma .$$

Учитывая, что $\omega(M)$ - регулярная в бесконечности функция и для интеграла по σ_R имеет место оценка (4.12), переходим в полученном равенстве при $R\to\infty$ к пределу. Имеем

$$\int\limits_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_j}d\tau=0 .$$

Отсюда находим $\frac{\partial\omega(M)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,3$ или $\omega(M)=const$, $M\in D$. В силу условий (4.6) $\omega(M)\to 0$ при $r_{MM_0}=R\to\infty$. Поэтому $\omega(M)=0$ или $\varphi(M)=\varphi'(M)$, $M\in D$. ■

Исследуем единственность нахождения в каждый момент времени $t\ge 0$ обобщенного потенциала $\varphi(M,t)$ в задаче эволюции границы раздела жидкостей Γ_t в неограниченной области D ($D=D_1\cup D_2$, D_1 и D_2 - части области D, которые заняты жидкостями вязкости, плотности μ_1,ρ_1 и μ_2,ρ_2).

Теорема 5. Обобщенный потенциал $\varphi(M,t)$ задачи эволюции границы раздела жидкостей Γ_t в неограниченной области D единственен в каждый момент времени $t\ge 0$ в классе функций $C^1(D)$, регулярных на бесконечности, то есть удовлетворяющих условиям:

$$\varphi(M,t)=\mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-1}\right),\ \left|K(M)\cdot\nabla\varphi(M,t)\right|=\mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-2}\right),\ \text{при } r_{MM_0}\to\infty . \quad (4.13)$$

Доказательство. Пусть функции $\varphi(M,t)$ и $\varphi'(M,t)$ - удовлетворяют уравнению (1.3) и на границе Γ_t условию (2.7). Их разность (помноженная на вязкость μ): $\omega(M,t)=\mu[\varphi(M,t)-\varphi'(M,t)]$ удовлетворяет этому же уравнению и условиям на Γ_t:

$$\omega^+(M,t)=\omega^-(M,t),\ \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial\omega(M,t)}{\partial\nu}\right]^+=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial\omega(M,t)}{\partial\nu}\right]^-,\ M\in\Gamma_t . \quad (4.14)$$

Тогда $\omega(M,t)$ удовлетворяет условиям, аналогичным обобщенным условиям Остроградского:

1) $\omega(M,t)$ - функция класса $C^1(D)$;
2) на границе Γ_t выполняются условия (4.14).

Поэтому для $\omega(M,t)$ можно применить формулу (4.7).

Проведем из точки M_0 сферу σ_R настолько большого радиуса R, чтобы граница Γ_t целиком лежала внутри этой сферы. Для области D_R, ограниченной сферой σ_R, запишем (4.7):

$$\int\limits_{D_R}\omega(M,t)T\omega(M,t)d\tau=\int\limits_{\sigma_R}K_n(M)\omega(M,t)\frac{\partial\omega(M,t)}{\partial\nu}d\sigma-$$

$$-\int_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M.t)}{\partial x_j}d\tau .$$

Если границей области D_R кроме поверхности σ_R является сингулярная граница σ_0, то в силу (4.8) в последнем равенстве будет интеграл только по σ_R.

Учтём, что функция $\omega(M,t)$ удовлетворяет уравнению (4.1) ($T\omega(M,t)=0$) и для неё имеет место оценка (4.12) в силу условий (4.13). Переходя в последнем равенстве при $R\to\infty$ к пределу, имеем

$$\int_{D_R}\sum_{i,j=1}^{3}K_{ij}(M)\frac{\partial\omega(M,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\omega(M.t)}{\partial x_j}d\tau=0 .$$

Отсюда находим $\dfrac{\partial\omega(M,t)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,3$ или $\omega(M,t)=\alpha(t)$, ($\alpha(t)$ - произвольная функция времени t, $M\in D$). В силу условий регулярности (4.13) $\omega(M,t)\to 0$ при $r_{MM_0}\to\infty$ для любого момента времени $t\geq 0$. Поэтому $\omega(M,t)=0$ или $\varphi(M,t)=\varphi'(M,t)$, $M\in D$ для любого $t\geq 0$. ■

Отметим, что если в задачах сопряжения на границе Γ и эволюции границы Γ_t имеются также границы σ_1 и σ_2 области течения, то единственность решений этих задач определяют теоремы 1-3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ». Херсон. 2001. С. 265-269.
2. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкостей. Орёл. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет». 2006. 508 с.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков-Херсон. 2007.