Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 775, 2007, с.216-227

УДК 537.8

# Истокообразная функция Грина полубесконечного круглого волновода, заполненного анизотропной плазмой

С. Д. Прийменко
*Институт плазменной электроники и новых методов ускорения Национального научного центра "Харьковский физико-технический институт", Украина*

The Green's function has been developed for point electric current source in semi-infinite circular waveguide, filled by strongly magnetizing anisotropic plasma. The singularity of this function is singled out in explicit form as the Green's function of strongly magnetizing an infinite anisotropic plasma. The built Green's function was obtained as a sum of ordinary and extraordinary waves Green's functions. The problem to construct the Green's function of a point electric current source was solved as a problem of diffraction of ordinary and extraordinary tensor divergent waves on the internal surface of a semi-infinite circular waveguide.

## 1. Введение

Проблемы высокочастотного нагрева плазмы, ускорения заряженных частиц, усиления и генерации радиоволн СВЧ диапазона связаны с анализом распространения электромагнитных колебаний в ограниченной плазме. Особый интерес вызывает плазма, находящаяся в волноводе [1], [2] (с.292), [3] (с.205). [4] (с.185), [5]. Ограниченная изотропная плазма рассмотрена в [1] – [5], а сильно замагниченная анизотропная плазма рассмотрена в [1], [2]. В общем случае, в холодной бесстолкновительной электронной магнитоактивной плазме тензор диэлектрической проницаемости $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ имеет пять компонент, а обыкновенная и необыкновенная волны связаны [2] (с.105). В очень сильном внешнем магнитном поле при $\omega_B >> \omega >> \omega_N^2 / \omega_B$ ($\omega_N, \omega_B$ - ленгмюровская и ларморовская частоты) тензор диэлектрической проницаемости $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ бесстолкновительной электронной магнитоактивной плазмы является диагональным тензором с одинаковыми поперечными компонентами $\varepsilon_t$ и отличной продольной компонентой $\varepsilon_z(\omega)$ [6]. Для $\omega > \omega_N$ компоненты $\varepsilon_t > 0$, $\varepsilon_z(\omega) > 0$, при этом обыкновенная сферическая и необыкновенная эллиптическая волны несвязаны [7] (с. 374), а электронная плазма ведет себя как одноосная анизотропная среда.

Реальные устройства плазменной электроники представляют собой плазменный волновод, нагруженный металлическими неоднородностями. Перспективным методом анализа подобных систем представляется аппарат интегральных уравнений [8], [3], ядром которых является функция Грина волноведущей структуры.

Функция Грина для электрического поля электрического источника тока была построена в виде TE и TM мод для круглого волновода с одноосной анизотропной средой [9]. Однако в этом случае функция Грина содержит сингулярность в неявном виде, что затрудняет использование функции при малых расстояниях между точками источника и наблюдения. Электрическая функция Грина $\overleftrightarrow{G}_E(\vec{k}_{or},\vec{k}_{ex},r,r')$ ($\vec{k}_{or}$, $\vec{k}_{ex}$ есть волновые вектора обыкновенной сферической и необыкновенной эллиптической волн соответственно) для круглого неограниченного волновода, заполненного сильно замагниченной анизотропной плазмой, была получена [10] как сумма сингулярной функции Грина $\overleftrightarrow{G}^s_E(\vec{k}_{or},\vec{k}_{ex},r,r')$ неограниченной сильно замагниченной анизотропной плазмы и регулярной функции Грина $\overleftrightarrow{G}^R_E(\vec{k}_{or},\vec{k}_{ex},r,r')$, учитывающей влияние границы.

Задача построения $\overleftrightarrow{G}_E(\vec{k}_{or},\vec{k}_{ex},r,r';z_0)$ решена как задача дифракции тензорной расходящейся H – типа сферической (обыкновенной) и E – типа эллиптической (необыкновенной) волн на внутренней поверхности полубесконечного круглого волновода.

**2. Формулировка тензорной краевой задачи**

Рассмотрим полубесконечный круглый волновод с идеально проводящей торцевой стенкой в сечении $z = z_0$, который заполнен холодной бесстолкновительной электронной магнитоактивной плазмой, находящейся в сильном продольном магнитостатическом поле. Пусть точечный источник электрического тока дельта-образно расположен в точке $(\rho',\varphi',z')$. Без потери общности полагаем $z - z' > 0$.

Первичное поле, падающее на торцевую стенку волновода, представляет собой сумму поля точечного источника тока в неограниченной одноосной анизотропной среде и поля, отраженного от боковой стенки неограниченного круглого волновода. Поле точечного источника в неограниченной одноосной анизотропной среде складывается из расходящейся H – типа сферической (обыкновенной) и E – типа эллиптической (необыкновенной) волн. Поле, отраженное от боковой стенки неограниченного волновода, складывается из отраженного поля обыкновенной и необыкновенной волн.

Принимая во внимание, что для обыкновенной сферической волны полю точечного источника тока и отраженному от боковой стенки полю ставятся в соответствие сингулярная функция Грина $\overleftrightarrow{G}^s_E(\vec{k}_{or},\vec{k}_{ex},r,r')$ неограниченной одноосной анизотропной среды и регулярная функция Грина $\overleftrightarrow{G}^R_E(\vec{k}_{or},\vec{k}_{ex},r,r')$ неограниченного круглого волновода соответственно, можем записать [10]

$$\overleftrightarrow{G}^0_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r') = \overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r') + \overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r'), \tag{2.1}$$

где $\overleftrightarrow{G}^0_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')$ есть функция Грина точечного источника электрического тока, соответствующая первичному полю, падающему на торцевую стенку волновода. Отметим, что $\overleftrightarrow{G}^0_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')$ описывает тензорную обыкновенную волну в неограниченном волноводе в виде суперпозиции тензорной расходящейся обыкновенной сферической $\overleftrightarrow{G}^{S}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')$ и тензорной обыкновенной плоско-цилиндрической [11] $\overleftrightarrow{G}^{R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')$ волн.

Функцию Грина для векторного потенциала обыкновенной волны $\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$ точечного источника электрического тока полубесконечного круглого волновода будем разыскивать в виде

$$\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)=\overleftrightarrow{G}^{S}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')+\overleftrightarrow{G}^{R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)= \tag{2.2}$$

$$=\overleftrightarrow{G}^{0}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')+\overleftrightarrow{G}^{0R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)\,,$$

где

$$\overleftrightarrow{G}^{R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)=\overleftrightarrow{G}^{R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')+\overleftrightarrow{G}^{0R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)= \tag{2.3}$$

$$=\overleftrightarrow{G}^{R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')+\overleftrightarrow{G}^{SR}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)+\overleftrightarrow{G}^{RR}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)\,,$$

При этом $\overleftrightarrow{G}^{0R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$, $\overleftrightarrow{G}^{SR}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$, $\overleftrightarrow{G}^{RR}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$ сопоставляются отраженным от торцевой стенки первичному полю, полю точечного источника тока, полю отраженному от боковой стенки соответственно, а $\overleftrightarrow{G}^{R}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$ есть регулярная функция Грина, соответствующая результирующему отраженному полю, которое формируется при отражении от боковой и торцевой стенок волновода.

Согласно (100)-(104) [10] $\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$ является решением неоднородного тензорного уравнения Гельмгольца

$$\begin{gathered}[\nabla^2(r_\perp)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\dot{k}^2_{or}]\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r,r';z_0)=(-1)\overleftrightarrow{I}_{rt}(r_\perp,r'_\perp)\delta(z-z')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\chi(z-z')}d\chi\times\\ \left\{\frac{(-1)}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\nu[\frac{1}{\nu}\mathrm{rot}(r_\perp)\frac{1}{\nu}\mathrm{rot}(r'_\perp)(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\varphi')}\nu H^{(1)}_m(\nu\rho_{><})J_m(\nu\rho'_{><}))]\vec{e}_3\otimes\vec{e}_3\right\}\end{gathered}, \tag{2.4}$$

с однородными граничными условиями на стенках полубесконечного круглого волновода

$$[\vec{n}(r_s)\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r_s,r';z_0)]=0\,, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{div}(r_s)\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r_s,r';z_0)=0 \tag{2.6}$$

и однородными условиями на бесконечности

$$\lim_{z\to\infty}\dot{k}_{or}(\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r_s,r';z_0)\cdot\vec{n}(r))=0\,, \tag{2.7}$$

$$\lim_{z\to\infty}\mathrm{rot}(r)\overleftrightarrow{G}_{E}(\dot{\vec{k}}_{or};r_s,r';z_0)=0\,, \tag{2.8}$$

где $\overleftrightarrow{I}_{rt}(r_\perp, r'_\perp)$ есть вихревая поперечная диада единичного тензорного источника $\overleftrightarrow{I}\delta(r_\perp, r'_\perp)$, $k_{or} = \sqrt{\varepsilon_t}\, k_o$, $k_o^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

В соответствие с (105) – (109) [10] (2.3) $\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r, r'; z_0)$ есть решение однородного тензорного уравнения Гельмгольца

$$[\nabla^2(r_\perp) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dot{k}_{or}^2]\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r, r'; z_0) = 0, \tag{2.9}$$

с неоднородными граничными условиями

$$[\vec{n}(r_s)\cdot\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r'; z_0)] = (-1)[\vec{n}(r_s)\cdot\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r')], \tag{2.10}$$

$$\mathrm{div}(r_s)\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r'; z_0) = (-1)\mathrm{div}(r_s)\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r') \tag{2.11}$$

и неоднородными условиями на бесконечности

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to\infty} \dot{k}_{or}(\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r'; z_0)\cdot\vec{n}(r)) = \\ &= (-1)\lim_{z\to\infty} \dot{k}_{or}(\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r')\cdot\vec{n}(r)), \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to\infty} \mathrm{rot}(r)\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r'; z_0) = \\ &= \lim_{z\to\infty} \mathrm{rot}(r)\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{or}; r_s, r'), \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для необыкновенной эллиптической волны аналогично (2.1) – (2.3) имеем

$$\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r') = \overleftrightarrow{G}_E^{S}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r') + \overleftrightarrow{G}_E^{R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'), \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0) = \overleftrightarrow{G}_E^{S}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r') + \overleftrightarrow{G}_E^{R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0) = \\ &= \overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r') + \overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0), \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &\overleftrightarrow{G}_E^{R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0) = \overleftrightarrow{G}_E^{R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r') + \overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0) = \\ &= \overleftrightarrow{G}_E^{R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r') + \overleftrightarrow{G}_E^{SR}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0) + \overleftrightarrow{G}_E^{RR}(\dot{\vec{k}}_{exr}; r, r'; z_0), \end{aligned} \tag{2.16}$$

Укажем, что $\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r')$ описывает тензорную необыкновенную волну в неограниченном волноводе в виде суперпозиции тензорной расходящейся необыкновенной эллиптической $\overleftrightarrow{G}_E^{S}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r')$ и тензорной необыкновенной плоско-цилиндрической $\overleftrightarrow{G}_E^{R}(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r')$ волн.

С учетом (122) – (126) [10] $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex}; r, r'; z_0)$ является решением тензорной краевой задачи

$$[\nabla^2(r_\perp)+\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\dot{k}_{ex}^2]\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r,r';z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\chi(z-z')}d\chi\times$$
$$\left\{\frac{(-1)}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\nu[\frac{1}{\nu}\mathrm{grad}(r_\perp)\otimes\frac{1}{\nu}\mathrm{grad}(r'_\perp)(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\varphi')}\nu H_m^{(1)}(\nu\rho_{><})J_m(\nu\rho'_{><}))]\right\}, \quad (2.17)$$

$$[\vec{n}(r_{\perp s},\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z_s)\cdot\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r';z_0)]=0, \quad (2.18)$$

$$\mathrm{div}(r_{\perp s},\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z_s)\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r_s,r';z_0)=0, \quad (2.19)$$

$$\lim_{\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z\to\infty}\dot{k}_{ex}(\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r\;,r';z_0)\cdot\vec{n}(r_\perp,\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z\;))=0, \quad (2.20)$$

$$\lim_{\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z\to\infty}\mathrm{rot}(r_\perp,\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z\;)\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r,r';z_0)=0, \quad (2.21)$$

где $k_{ex}=\sqrt{\varepsilon_z(\omega)}k_o$.

Согласно (129) – (133) [10] и (2.15) $\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r\;,r';z_0)$ есть решение тензорной краевой задачи

$$[\nabla^2(r_\perp)+\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\dot{k}_{ex}^2]\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r,r';z_0)=0, \quad (2.22)$$

$$[\vec{n}(r_{\perp s},\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z_s)\cdot\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r';z_0)]=$$
$$=(-1)[\vec{n}(r_{\perp s},\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z_s)\cdot\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r')], \quad (2.23)$$

$$\mathrm{div}(r_{\perp s},\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z_s)\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r';z_0)=$$
$$=(-1)\mathrm{div}(r_{\perp s},\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\,\varepsilon_t}}z_s)\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r'), \quad (2.24)$$

$$\lim_{\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\to\infty} \dot{k}_{ex}(\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r';z_0)\cdot\vec{n}(r_\perp,\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\ )) = (-1)\lim_{\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\to\infty} \dot{k}_{ex}(\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r')\cdot\vec{n}(r_\perp,\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\ )), \tag{2.25}$$

$$\lim_{\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\to\infty} \mathrm{rot}(r_\perp,\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\ )\overleftrightarrow{G}_E^{0R}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r';z_0) = \lim_{\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z\to\infty} \mathrm{rot}(r_\perp,\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}}z)\overleftrightarrow{G}_E^{0}(\dot{\vec{k}}_{ex};r_s,r'), \tag{2.26}$$

Функция Грина $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$, $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ с учетом (41) – (44), (135) [10] и (2.4), (2.17) удовлетворяют неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2(r_\perp)[\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r,r';z_0)+\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r,r';z_0)]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r,r';z_0)+ \\ +\frac{\mathrm{Re}\dot{\varepsilon}_z(\omega)}{\mathrm{Re}\varepsilon_t}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r,r';z_0)+\dot{k}_{or}^2\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r,r';z_0)+\dot{k}_{ex}^2\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r,r';z_0)= \\ =(-1)\overleftrightarrow{I}\delta(r,r'), \tag{2.27}$$

где $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)$ и $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ удовлетворяют граничным условиям (2.5) – (2.8) и (2.18) – (2.21) соответственно.

Результирующая функция Грина точечного электрического источника тока для полубесконечного круглого волновода с одноосной анизотропной средой $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$, принимая во внимание принцип суперпозиции, есть

$$\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)+\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0) \tag{2.28}$$

и представляет диаду, где поперечные компоненты обусловлены расходящимися сферической обыкновенной и эллиптической необыкновенной волнами, а продольные компоненты обусловлены необыкновенной эллиптической волной.

В пределе изотропной среды $\dot{\varepsilon}_t\to\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}_z(\omega)\to\dot{\varepsilon}$ в полубесконечном круглом волноводе краевая задача (2.27), (2.5) – (2.8), (2.18) – (2.21) решена в [12].

Принимая во внимание (2.2), (2.15) и (2.28), получаем $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ как сумму сингулярной функции Грина неограниченной одноосной анизотропной среды $\overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r')$ и регулярной функции Грина неограниченного круглого волновода с одноосной анизотропной средой $\overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$

$$\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=\overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r')+\overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)\,, \tag{2.29}$$

т.е. выделяем сингулярность, описываемую сингулярной функцией $\overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r')$, в явном виде.

При этом

$$\overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r')=\overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r')+\overleftrightarrow{G}^S_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r')\,, \tag{2.30}$$

$$\overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=\overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{or};r\ ,r';z_0)+\overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)\,. \tag{2.31}$$

## 3. Решение задачи

Решение тензорных краевых задач (2.9) – (2.13) с учетом (2.1), а также (2.22) – (2.26) с учетом (2.14) сводим к решению задач дифракции тензорных обыкновенной сферической и плоско-цилиндрической волн, а также необыкновенных эллиптической и плоско-цилиндрической волн на торцевой стенке полубесконечного круглого волновода с использованием метода электрических изображений.

Учитывая (2.3), (2.16), (2.31) и (184) – (189) [10] находим регулярную результирующую функцию Грина $\overleftrightarrow{G}^R_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ для векторного потенциала точечного электрического источника тока в полубесконечном круглом волноводе с одноосной анизотропной средой

$$\begin{aligned}
&G^R_{E11'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=\frac{(-1)i}{8\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\varphi')}\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi\{\ [f^R_{or}(\chi;z,z')+f^{RR}_{or}(\chi;z,z';z_0)]\\
&\times\frac{m^2}{\dot{\nu}^2_{or}(\chi)\rho\rho'}J_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho\right)J_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)\prime}_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}{J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}+\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[f^R_{ex}(\chi;z,z')+\\
&+f^{RR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)]J'_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho\right)J'_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)}_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}{J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}\ \}+\\
&+\{\ \frac{1}{4\pi}\cos(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}\,G^{SR}(\dot{k}_{ex};r\ ,r';z_0)+\frac{i}{8\pi}[\ \int_{-\infty}^{+\infty}d\chi[f^R_{or}(\chi;z,z')\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\times\\
&\times\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(H^{(1)}_0\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))+(-1)\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}f^{SR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)\times\\
&\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(H^{(1)}_0\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))]]\ \}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$G^{R}_{E12'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\;,r';z_0)=\frac{(-1)}{8\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}me^{im(\varphi-\varphi')}\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi\{\;[f^{R}_{or}(\chi;z,z')+f^{RR}_{or}(\chi;z,z';z_0)]$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho}J_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho\right)J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)'}_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}{J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}+\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[f^{R}_{ex}(\chi;z,z')+$$

$$+f^{RR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)]\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho'}J'_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho\right)J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)}_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}{J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}\;\}+$$

$$+\{\;\frac{1}{4\pi}\sin(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}G^{SR}(\dot{k}_{ex};r\;,r';z_0)+\frac{i}{8\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi[f^{R}_{or}(\chi;z,z')\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\times \tag{3.2}$$

$$\times\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}(H^{(1)}_0\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}\,'_\perp\right|\right))+(-1)\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}f^{SR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)\times$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}(H^{(1)}_0\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}\,'_\perp\right|\right))]]\;\}$$

$$G^{R}_{E21'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\;,r';z_0)=\frac{1}{8\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}me^{im(\varphi-\varphi')}\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi\{\;[f^{R}_{or}(\chi;z,z')+f^{RR}_{or}(\chi;z,z';z_0)]$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho'}J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho\right)J_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)'}_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}{J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}+\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[f^{R}_{ex}(\chi;z,z')+$$

$$+f^{RR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)]\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho}J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho\right)J'_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)}_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}{J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}\;\}+$$

$$+\{\;\frac{(-1)}{4\pi}\sin(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}G^{SR}(\dot{k}_{ex};r\;,r';z_0)+\frac{i}{8\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi[f^{R}_{or}(\chi;z,z')\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\times \tag{3.3}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(H^{(1)}_0\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}\,'_\perp\right|\right))+(-1)\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}f^{SR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)\times$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(H^{(1)}_0\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}\,'_\perp\right|\right))]]\;\}$$

$$G^{R}_{E22'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\;,r';z_0)=\frac{(-1)i}{8\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\varphi')}\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi\{\;[f^{R}_{or}(\chi;z,z')+f^{RR}_{or}(\chi;z,z';z_0)]$$

$$\times J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho\right)J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)'}_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}{J'_m\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)R\right)}+\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[f^{R}_{ex}(\chi;z,z')+$$

$$+f^{RR}_{ex}(\chi;z,z';z_0)]\frac{m^2}{\dot{\nu}^2_{ex}(\chi)\rho\rho'}J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho\right)J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho'\right)\frac{H^{(1)}_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}{J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}\;\}+$$

$$+\{\;\frac{1}{4\pi}\cos(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}G^{SR}(\dot{k}_{ex};r\;,r';z_0)+\frac{i}{8\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi[f^{SR}_{or}(\chi;z,z')\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))+\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}f_{ex}^{SR}(\chi;z,z';z_0)\times$$
$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))]]\ \Big\}, \tag{3.4}$$

$$G_{E33''}^{R}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=\frac{(-1)i}{8\pi}\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{im(\varphi-\varphi')}\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi\Big\{\ [l_{ex}^{R}(\chi;z,z')+$$
$$+l_{ex}^{RR}(\chi;z,z';z_0)]J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho\right)J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\rho'\right)\frac{H_m^{(1)}\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}{J_m\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)R\right)}\ \Big\}+ \tag{3.5}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sqrt{Re\dot{\varepsilon}_t}G^{SR}(\dot{k}_{ex};r\ ,r';z_0),$$

$$G_{E13'}^{R}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=G_{E23'}^{R}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=G_{E31'}^{R}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$
$$=G_{E32'}^{R}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=0, \tag{3.6}$$

где

$$\dot{\nu}_{or}(\chi)=\sqrt{\dot{k}_{or}^2-\chi^2}\ , \tag{3.7}$$

$$\dot{\nu}_{ex}(\chi)=\sqrt{\dot{k}_{ex}^2-\chi^2}\ , \tag{3.8}$$

$$G^{SR}(\dot{k}_{ex};r\ ,r';z_0)=\frac{e^{i\frac{\dot{k}_{ex}}{\sqrt{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sqrt{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+Re\dot{\varepsilon}_t(z-\tilde{z}(z',z_0))^2}}}{\sqrt{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+Re\dot{\varepsilon}_t(z-\tilde{z}(z',z_0))^2}}, \tag{3.9}$$

$$\tilde{z}(z',z_0)=\begin{cases}2z_0-z', & z_0-z'>0\\ (-1)(2z_0-z'), & z_0-z'<0\end{cases}, \tag{3.10}$$

$$f_{or}^{R}(\chi;z,z')=e^{i\chi(z-z')}, \tag{3.11}$$

$$l_{ex}^{R}(\chi;z,z')=f_{ex}^{R}(\chi;z,z')=e^{i\chi\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}(z-z')}\ , \tag{3.12}$$

$$f_{or}^{SR}(\chi;z,z';z_0)=f_{or}^{RR}(\chi;z,z';z_0)=\begin{cases}(-1)e^{-i\chi[z+(-1)(2z_0-z')]}, & z_0-z'>0\\ (-1)e^{i\chi[z+(-1)(2z_0-z')]}, & z_0-z'<0\end{cases}, \tag{3.13}$$

$$l_{ex}^{RR}(\chi;z,z';z_0)=\begin{cases}e^{-i\chi\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[z+(-1)(2z_0-z')]}\ , & z_0-z'>0\\ e^{i\chi\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[z+(-1)(2z_0-z')]}\ , & z_0-z'<0\end{cases}, \tag{3.14}$$

$$f_{ex}^{SR}(\chi;z,z';z_0)=f_{ex}^{RR}(\chi;z,z';z_0)=\begin{cases}(-1)e^{-i\chi\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[z+(-1)(2z_0-z')]}\ , & z_0-z'>0\\ (-1)e^{i\chi\sqrt{\frac{Re\dot{\varepsilon}_t}{Re\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}[z+(-1)(2z_0-z')]}\ , & z_0-z'<0\end{cases}, \tag{3.15}$$

В пределе изотропной среды $\dot{\varepsilon}_t \to \dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}_z(\omega) \to \dot{\varepsilon}$ соотношения (3.1) – (3.6) переходят в соотношения (44), (46), (49), (23) – (27) [12], определяющие компоненты регулярной функции Грина полубесконечного круглого волновода с изотропным заполнением.

Решение тензорной краевой задачи (2.27), (2.5) – (2.8), (2.18) – (2.21) в форме (2.29) $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ сводим с учетом (2.30), (2.31) к решению задачи дифракции тензорных расходящихся обыкновенной сферической и необыкновенной эллиптической волн на стенках полубесконечного круглого волновода. При этом сингулярную часть решения исходной краевой задачи, описываемую сингулярной тензорной функцией Грина неограниченной одноосной среды $\overleftrightarrow{G}{}^S_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r')$, выделяем в явном виде.

Компоненты результирующей функции Грина $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ для векторного потенциала точечного электрического источника тока в полубесконечном круглом волноводе с одноосной анизотропной средой определяются соотношениями

$$G_{E11'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$

$$\left\{\frac{1}{4\pi}\cos(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}\,\frac{e^{i\frac{\dot{k}_{ex}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}+\frac{i}{8\pi}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\chi e^{i\chi(z-z')}\right.$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}\left(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right)\right)-\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}e^{i\chi\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}(z-z')} \tag{3.16}$$

$$\left.\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}\left(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right)\right)\Big]\ \right\}+G^R_{E11'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0),$$

$$G_{E12'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$

$$\left\{\frac{1}{4\pi}\sin(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}\,\frac{e^{i\frac{\dot{k}_{ex}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}+\frac{i}{8\pi}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\chi e^{i\chi(z-z')}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right)\right)+(-1)\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}e^{i\chi\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}(z-z')}\times \tag{3.17}$$

$$\left.\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right)\right)\Big]\ \right\}+G^R_{E12'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0),$$

$$G_{E21'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$

$$\left\{\frac{(-1)}{4\pi}\sin(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}\,\frac{e^{i\frac{\dot{k}_{ex}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}+\frac{i}{8\pi}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\chi e^{i\chi(z-z')}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))-\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}e^{i\chi\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}(z-z')}\times$$
$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial\varphi'}(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))]\ \Big\}+G^R_{E21'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0), \tag{3.18}$$

$$G_{E22'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$
$$\left\{\frac{1}{4\pi}\cos(\varphi-\varphi')\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}\ \frac{e^{i\frac{\dot{k}_{ex}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}+\frac{i}{8\pi}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi e^{i\chi(z-z')}\times\right.$$
$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{or}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{or}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))+\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}e^{i\chi\sqrt{\frac{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}(z-z')}\times$$
$$\times\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\dot{\nu}_{ex}(\chi)}\frac{\partial}{\partial\rho'}(H_0^{(1)}\left(\dot{\nu}_{ex}(\chi)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|\right))]]\ \Big\}+G^R_{E22'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0), \tag{3.19}$$

$$G_{E33''}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$
$$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t}\ \frac{e^{i\frac{\dot{k}_{ex}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)}}\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_z(\omega)\left|\vec{r}_\perp-\vec{r}'_\perp\right|+\mathrm{Re}\,\dot{\varepsilon}_t(z-z')^2}}+G^R_{E33''}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0), \tag{3.20}$$

$$G_{E13'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=G_{E23'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=G_{E31'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=$$
$$=G_{E32'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)=0, \tag{3.21}$$

где $G^R_{Eij'}(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ определяются соотношениями (3.1) – (3.6).

В пределе изотропной среды $\dot{\varepsilon}_t\to\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}_z(\omega)\to\dot{\varepsilon}$ (3.16) – (3.21) переходят в соотношения (10), (6), (44), (46), (49), (23) – (27) [12], определяющие компоненты результирующей функции Грина полубесконечного круглого волновода с изотропным заполнением.

## 4. Выводы

Функция Грина $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ точечного электрического источника тока в полубесконечном круглом волноводе с сильно замагниченной анизотропной плазмой построена в виде суммы сингулярной функции Грина неограниченной замагниченной анизотропной плазмы и регулярной функции Грина, учитывающей влияние границы.

Функция $\overleftrightarrow{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ представлена суперпозицией функций Грина обыкновенной и необыкновенной волн полубесконечного круглого волновода с анизотропным заполнением.

Задача построения $\overset{\leftrightarrow}{G}_E(\dot{\vec{k}}_{or},\dot{\vec{k}}_{ex};r\ ,r';z_0)$ решена как задача дифракции тензорных расходящейся Н – типа сферической (обыкновенной) и Е – типа эллиптической (необыкновенной) волн на внутренней поверхности полубесконечного круглого волновода. Данная задача сведена к задаче дифракции тензорных обыкновенных сферической и плоско-цилиндрической волн, а также необыкновенных эллиптической и плоско-цилиндрической волн на торцевой стенке полубесконечного круглого волновода.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Кондратенко А.Н. Плазменные волноводы. – М.: Атомиздат, 1976. – 232с.
2. Александров А.Ф., Богданкевич А.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высш. школа, 1978. – 407 с.
3. Нерух А.Г., Хижняк Н.А. Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. – Харьков: Тест-радио, 1991. – 280 с.
4. Nerukh A.G., Sherbatko J.U., Marciniak M. Electromagnetics of modulated media with applications to photonics. – Warsaw: National Institute of Trlrcommunications. 2001. – 267 p.
5. Sakhnenko N.K., Nerukh A.G. A plasma cylinder emergence effect on the electromagnetic field in a waveguide // IEEE AP-S International symposium and USNC/ URSI national radio science meeting – Columbus, OH – 2003. – URSI Digest. – P.14.
6. Хижняк Н.А., Яценко Е.А. Излучение электрического вибратора в анизотропной плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т.2, №4. –С. 14-20.
7. Фелсен Л.Б., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. – М.: Мир, 1978. Т.2. – 555 с.
8. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. – Киев: Наукова думка, 1986. 286 с.
9. Li Le-Wei, Lin Sheghong, Leong Mok-Seng and Yeo Tai-Soon. Circular cylindrical waveguide filled with uniaxial anisotropic media – electromagnetic fields and dyadic Green’s functions // IEEE Trans. MTT. 2001. - v.49, №7. – P. 1361–1364.
10. Priyemenko S.D. Green’s function for line and point sources in a circular waveguide filled by anisotropic plasma // Telecommunications and Radio Engineering – 2004 – 61(9) – P. 767 - 812.
11. Марков Г.Т. К решению граничных задач электродинамики // Труды МЭИ. Вып. 30. М.: Госэнергоиздат, 1958. – С. 126 – 141.
12. Priymenko S.D., Khizhnyak N.A. The effective method of Green’s function representation in the circular waveguide. // Telecommunications and Radio Engineering – 1997 – 51(6 - 7) – P. 110 - 126.