Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.95
№ 775, 2007, с.246-257

# Взаимодействие полей деформации и температуры при распространении температурного возмущения

Т. З. Чочиев
*Владикавказский научный центр Академии наук РФ и РСО-Алания, Россия*

A change law of heat conductivity coefficient is being constructed on the basis of potentiality of temperature field. Interrelationship of the two fields is described by a fourth order partial differential equation.

**1. О законе изменения коэффициента теплопроводности.**

Имеется однородное упругое полупространство с поверхностью $x=0$ и с начальной температурой $T_0$. В момент $t=0$ поверхность со стороны среды получает тепловой удар, температура которой повышается от $T_0$ до $\theta$; в дальнейшем при $t>0$ происходит теплообмен в среде. Эффект взаимосвязанности описывается совместной системой равенств [1,3,7].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)-c\rho\dfrac{\partial T}{\partial t}-\dfrac{E\alpha_T}{1+2\nu}T_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0, \\ \dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}-\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

при соблюдении условий:

$$T\big|_{t=0}=T_0;\ \frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\alpha(t)}{k}(T-\theta)=0,\ \text{при }\ x=0, \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t}=0\ \ \text{при }\ t=0, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{xx}=0\ \text{при }\ x=0, \tag{1.4}$$

$T$ – описывает температурное поле, $\sigma_{xx}$ – поле напряжения, $u(x,t)$ – компонента смещения, $\rho$ – плотность, $c$ – удельная теплоемкость, $E$ – изотермический модуль упругости, $\alpha_T$ – средний коэффициент линейного теплового расширения, $\nu$ – коэффициент Пуассона. В данном случае $\nu=\omega=0$; $\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xy}=0$; $\sigma_{yx}=\sigma_{zy}=\sigma_{xz}=0$.

Воспользовавшись этим обстоятельством, а также [3,6]

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\chi^*}\sigma_{xx}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T(T-T_0);\ \sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{xx}-\frac{E\alpha_T}{1-\nu}(T-T_0) \tag{1.5}$$

и обозначением Кирхгоффа

$$F=\frac{1}{k_0}\int_{T_0}^{T}k(T)dT, \tag{1.6}$$

систему (1.1) приведем к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial t^2} - \tilde{a}\dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \tilde{b}\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \tilde{c}\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \tilde{d}\sigma_{xx} + \tilde{e}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \tilde{g}\dfrac{\partial F}{\partial t} + \tilde{f}(T - T_0) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \hat{a}\dfrac{\partial F}{\partial t} + \hat{b}\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \hat{c}\sigma_{xx} + \hat{d}(T - T_0) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\chi^* = \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $\tilde{a} = \dfrac{\chi^*}{\rho}$; $\tilde{b} = 2\chi^* \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\chi^*}\right)$; $\tilde{c} = -\chi^* \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$;

$\tilde{d} = \chi^* \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{1}{\chi^*}\right)$; $\tilde{e} = \dfrac{E\alpha_T}{(1-2\nu)k}$; $\tilde{g} = \chi^*\left[\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\alpha_T}{k}\right) + \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right)\right]$;

$\tilde{f} = \chi^* \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right)$; $\hat{a} = \dfrac{c\rho}{k} + \dfrac{E\alpha_T^2}{1+2\nu}\dfrac{1+\nu}{(1-\nu)k}$;; $\hat{b} = -\dfrac{1}{\chi^*}\dfrac{\alpha_T}{1+2\nu}T_0$

$\hat{c} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\chi^*}\right)\dfrac{E\alpha_T}{1+2\nu}T_0$; $\hat{d} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right)\dfrac{E\alpha_T}{1-2\nu}T_0$;

$\gamma = -\chi^* \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right) \Bigg/ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right)\dfrac{E\alpha_T}{1-2\nu}T_0$ .

Во избежание повышения порядка производной, вместо (1.7) составляем другую систему равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial t^2} - \tilde{a}\dfrac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + (\tilde{b} - \gamma\hat{b})\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \tilde{c}\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + (\tilde{d} - \gamma\hat{c})\sigma_{xx} = \delta, \\ \tilde{e}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \gamma\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (\tilde{g} + \gamma\hat{a})\dfrac{\partial F}{\partial t} + (\tilde{f} - \gamma\hat{d})(T - T_0) = -\delta, \\ \tilde{e}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \tilde{g}\dfrac{\partial F}{\partial t} + \tilde{f}(T - T_0) + \gamma\hat{b}\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \gamma\hat{c}\sigma_{xx} = -\delta, \end{cases} , \tag{1.8}$$

эквивалентную данной, если $\delta$ удовлетворяет третьему уравнению.

Если $\delta$ задана, то температурная функция определяется из второго уравнения (1.8) ($\tilde{f} - \gamma\hat{d} = 0$; (см. значение $\gamma$)). Однако, нам необходимо соответствующее однородное уравнение

$$\tilde{e}\frac{\partial^2 F^*}{\partial t^2} - \gamma\frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} + (\tilde{g} + \gamma\hat{a})\frac{\partial F^*}{\partial t} = 0, \tag{1.9}$$

к которому применяем те же преобразования, что и в [8,9]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial F^*}{\partial x} = \dfrac{\partial T^*}{\partial x}, \\ \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial F^*}{\partial t} = \dfrac{\partial T^*}{\partial t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F^*}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial F^*}{\partial t} = \dfrac{\partial T^*}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial T^*}{\partial t} = P(x,t), \\ \dfrac{1}{\lambda} = g^* = \dfrac{\tilde{g} + \gamma\left(\hat{a} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\right)}{\gamma P}, \end{cases} \tag{1.10}$$

очевидно, оно преобразуется к виду ($P(x,t)$ неизвестна)

$$\tilde{e}\frac{\partial^2 F^*}{\partial t^2} - \gamma P\frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial t} + \left[\tilde{g} + \gamma\left(\hat{a} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial F^*}{\partial t} = 0,$$

из которого сразу разрешаем $\dfrac{\partial F^*}{\partial t}$, и, согласно (1.10), $\dfrac{\partial F^*}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F^*}{\partial t}=e^{\int_0^x g^* dx}\omega_0(\sigma);\ \frac{\partial F^*}{\partial x}=Pe^{\int_0^x g^* dx}\omega_0(\sigma)\ \left(d\sigma=\mu^*\left(\frac{\tilde{e}}{\gamma P}dx+dt\right)\right),$$

обращающие (1.9) в тождество. Если правую часть $\dfrac{\partial F^*}{\partial t}$ обозначим через $\omega$, то, она должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}-P\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial x}\omega \Rightarrow e^{\int_0^x g^* dx}\omega_0(\sigma)=e^{-\int_0^t \frac{\partial \ln P}{\partial t}dt}\varphi(\tau)\quad \left(d\tau=\mu_0^*(Pdx+dt)\right), \tag{1.11}$$

где $\omega_0(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ – произвольные функции; $\mu^*$ и $\mu_0^*$ – интегрирующие множители. Из (1.10) имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T^*}{\partial t}=\omega_0(\sigma)\dfrac{\partial}{\partial x}e^{\int_0^x g^* dx}=\tilde{V};\\[2ex] \dfrac{\partial T^*}{\partial x}=P\omega_0(\sigma)\dfrac{\partial}{\partial x}e^{\int_0^x g^* dx}=P\tilde{V};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial x}-P\dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial t}=\dfrac{\partial P}{\partial t}\tilde{V};\\[2ex] \tilde{V}=e^{-\int_0^t \frac{\partial \ln P}{\partial t}dt}\varphi_1(\tau).\end{cases}$$

Следовательно,

$$\omega_0(\sigma)\frac{\partial}{\partial x}e^{\int_0^x g^* dx}=\tilde{V}=\frac{P(x,0)}{P(x,t)}\varphi_1(\tau), \tag{1.12}$$

$\varphi_1(\tau)$ – произвольная функция. (1.11) и (1.12) дают важное соотношение:

$$e^{\int_0^x g^* dx}\omega_0(\sigma)=\frac{P(x,0)}{P(x,t)}\varphi(\tau)=\omega_0(\sigma)e^{\int_0^x \frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi(\tau)}dx},\ \left(\omega_0(\sigma)=e^{\sigma}P_0(t)\right) \tag{1.13}$$

из которого следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x,0)}{P(x,t)}\frac{\varphi(\tau)}{\omega_0(\sigma)}\right]-\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi(\tau)}\left[\frac{P(x,0)}{P(x,t)}\frac{\varphi(\tau)}{\omega_0(\sigma)}\right]=0;\ \frac{P(x,0)}{P(x,t)}=e^{\int_0^x \frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi(\tau)}dx}\frac{\omega_0(\sigma)}{\varphi(\tau)}, \tag{1.14}$$

а из первых двух равенств ($P(x,0)$ допускается заданной) составляется уравнение относительно $1/k$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1-\nu}{\chi^*(1+\nu)\alpha_T}\left\{2\chi^*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right)+\gamma\left[c\rho+\frac{E^2\alpha_T^2}{(1-4\nu^2)\chi^*}\right]+P_0(t)\mu_0^*\frac{E\alpha_T}{1-2\nu}\right\}\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{\gamma(1-\nu)}{\chi^*(1+\nu)\alpha_T}P(x,t)\left\{\frac{P(x,t)}{P(x,0)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x,0)}{P(x,t)}\right]+\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}\mu_0^*P(x,t)\right\}+\frac{\gamma(1-\nu)}{\chi^*(1+\nu)\alpha_T}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{1.15}$$

Вернемся ко второму уравнению (1.8), но уже к неоднородному случаю.

$$\tilde{e}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}-\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(\tilde{g}+\gamma\hat{a})\frac{\partial F}{\partial t}=-\delta\cdot \tag{1.16}$$

Считая $\delta$ заданной, для $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=e^{\int_0^x g^* dx}\left[\omega_0(\sigma)+\int_0^x \frac{\delta}{\gamma P} e^{-\int_0^x g^* dx} dx\right]=\frac{\partial F^*}{\partial t}+F^{**}, \tag{1.16$_1$}$$

где $F^{**}$ – частное решение (1.16).

Согласно (1.6) и формулы (1.16)$_1$ следует:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial x}\Big/\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial F^*}{\partial x}\Big/\frac{\partial F^*}{\partial t}=P(x,t). \tag{1.17}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{k_0}{k}\dfrac{\partial F}{\partial t},\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x}=\dfrac{k_0}{k}\dfrac{\partial F}{\partial x},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{k_0}{k}\left(\dfrac{\partial F^*}{\partial t}+F^{**}\right),\\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial x}=P\dfrac{k_0}{k}\left(\dfrac{\partial F^*}{\partial t}+F^{**}\right),\end{cases}\left(F^{**}=e^{\int_0^x g^* dx}\int_0^x\frac{\delta}{\gamma P}e^{-\int_0^x g^* dx}dx\right) \tag{1.18}$$

где $k_0=k(0,0)$.

Перейдем к выполнению условия (1.2); на основании (1.18)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{1}{k}\frac{\partial F^*}{\partial t}dt-\frac{\alpha(t)}{P(0,t)k}\int_0^t\frac{1}{k}\frac{\partial F^*}{\partial t}dt=\frac{\alpha(t)(T_0-\theta)}{k(0,t)P(0,t)k_0}\qquad (x=0),$$

ибо,

$$T-T_0=k_0\int_0^t\frac{1}{k}\left(\frac{\partial F^*}{\partial t}+F^{**}\right)dt,\qquad \left(T-T_0=k_0\int_0^t\frac{1}{k}\frac{\partial F^*}{\partial t}dt\right)_{x=0} \tag{1.18$_1$}$$

причем, $\alpha(t)$ – коэффициент теплоотдачи на поверхности $x=0$, $F^{**}\big|_{x=0}=0$. Разрешив интеграл и приняв во внимание (1.11), будем иметь:

$$\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{kP}dt=\frac{1}{P(0,0)}\frac{\theta-T_0}{k_0}\left[e^{\int_0^t\frac{\alpha(t)dt}{Pk}}+1\right]\Rightarrow\varphi(\tau)=\frac{\theta-T_0}{P(0,0)k_0}\alpha(t)e^{\int_0^t\frac{\alpha(t)dt}{P(0,t)k(0,t)}}. \tag{1.19}$$

Снова из (1.14) при $x=0$ записываем:

$$\omega_0(\sigma)=e^{\sigma}P_0(t)=\frac{\theta-T_0}{P(0,0)k_0}\alpha(t)e^{\int_0^t\frac{\alpha(t)dt}{P(0,t)k(0,t)}};\ P_0(t)=\alpha_T e^{\int_0^t\frac{\alpha(t)dt}{P(0,t)k(0,t)}}. \tag{1.20}$$

Следовательно, $P(0,t)$ определяется

$$e^{\sigma}P(0,t)=\frac{\theta-T_0}{\alpha_T k_0}\alpha(t).\qquad\left(d\sigma=\mu^*\left(\frac{\tilde{e}}{\gamma P}dx+dt\right)\right) \tag{1.20$_1$}$$

Далее, замечаем, что при $x=0$, $d\tau=\mu_0^* dt$, $t=\displaystyle\int_0^\tau\frac{d\tau}{\mu_0^*}=t^*(\tau)$, правая часть $\varphi(\tau)$ (см. (1.19)) через $\tau$ переписывается

$$\varphi(\tau)=\frac{\theta-T_0}{P(0,0)k_0}\alpha(\tau)e^{\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{\alpha(z)dz}{\mu_0^* P(0,z)k(0,z)}}. \tag{1.21}$$

Также при $x=0$, $d\tau=\frac{\mu_0^*}{\mu^*}d\sigma \Rightarrow \tau=\tau(\sigma)$. $dt=\frac{1}{\mu^*}d\sigma$. Поэтому из (1.14)

$$\omega_0(\sigma)_{x=0}=\frac{P(0,0)}{P(0,t)}\varphi(\tau)\Rightarrow \omega_0(\sigma)=\frac{\theta-T_0}{P(0,\sigma)k_0}\alpha(\sigma)e^{\int\limits_0^{\tau(\sigma)}\frac{\alpha(z)dz}{\mu^* P(0,z)k(0,z)}}. \tag*{(1.21)$_1$}$$

Но $\varphi(\tau)$ и $\omega_0(\sigma)$ станут вполне определенными функциями, если построить $k(0,t)$. В связи с этим, из (1.15) имеем:

$$\frac{1}{k(x,t)}=e^{-\int\limits_0^t Qdt}\left\{\frac{1}{k_1(x)}+\int\limits_0^t\left[\frac{\gamma(1-\nu)}{\chi^*(1+\nu)}\frac{P^2(x,t)}{\alpha_T}\mu_0^*\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}+\Gamma\right]e^{\int\limits_0^t Qdt}dt\right\}, \tag{1.22}$$

где $Q=\frac{1-\nu}{\chi^*(1+\nu)\alpha_T}\left\{2\chi^*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\right)+\gamma\left[c\rho+\frac{E^2\alpha_T^2}{(1-4\nu^2)\chi^*}\right]+P_0(t)\mu_0^*\frac{E\alpha_T}{1-2\nu}\right\}.$

$$\Gamma=\frac{\gamma(1-\nu)}{\chi^*(1+\nu)\alpha_T}\left\{\frac{P^2(x,t)}{P(x,0)}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x,0)}{P(x,t)}+\frac{\partial P}{\partial x}\right]\right\};\ \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}=\frac{1}{\mu_0^*}\frac{\alpha'(\tau)+\frac{\alpha(\tau)}{P(0,\tau)k(0,\tau)\mu_0^*}}{\alpha(\tau)}.$$

В (1.22) допускаем $x=0$ и вместо $\varphi'(\tau)/\varphi(\tau)$ внесем его значение

$$e^{\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{Q(\tau)}{\mu_0^*}d\tau}\frac{1}{k(0,t^*(\tau))}=\frac{1}{k_0}+\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{D_0e^{\int\limits_0^{\tau}\frac{Q}{\mu_0^*}d\tau}}{\mu_0^*P(0,\tau)k(0,\tau)}d\tau+\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{D(\tau)+\Gamma(\tau)}{\mu_0^*}e^{\int\limits_0^{\tau}\frac{Q(\tau)}{\mu_0^*}d\tau}d\tau.$$

Отсюда легко догадаться, что имеем дело с дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{D_0(\tau)}{\mu_0^*P(0,\tau)k(0,\tau)}e^{\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{Q(\tau)}{\mu_0^*}d\tau}d\tau-\frac{D_0(t^*)}{P(0,t^*)}\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{D_0(\tau)}{\mu_0^*P(0,\tau)k_0(\tau)}e^{\int\limits_0^{t^*(\tau)}\frac{Q(\tau)}{\mu_0^*}d\tau}d\tau=$$

$$=R(t^*),\ t^*=t^*(\tau),$$

где $D=\frac{\gamma(1-\nu)P^2(0,t)}{\chi^*(1+\nu)\alpha_T}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$; $D_0=\frac{\gamma(1-\nu)P^2(0,t)}{\chi^*(1+\nu)\mu_0^*\alpha_T}$;

$$R(t)=\frac{D_0(t)}{\mu_0^*P_0(t)}\left[\frac{1}{k_0}+\int\limits_0^t\frac{D(\tau)+\Gamma(\tau)}{\mu_0^*}e^{\int\limits_0^{\tau}\frac{Q(\tau)}{\mu_0^*}d\tau}d\tau\right].$$

Таким образом,

$$\int_0^{t^*} \frac{D_0(\tau) e^{\int_0^{t^*} \frac{Q(\tau)}{\mu_0^*} d\tau}}{\mu_0^* P(0,\tau) k(0,\tau)} d\tau = e^{\int_0^{t^*} \frac{D_0(\tau)}{\mu_0^* P(0,\tau)} d\tau} \left[ W_0 + \int_0^{\tau} R(\tau) e^{-\int_0^{\tau} \frac{D_0(\tau)}{\mu_0^* P(0,\tau)} d\tau} d\tau \right]$$

и, следовательно:

$$\frac{1}{k(0,t^*)} = \frac{\mu_0^* P(0,t^*)}{D_0(t^*)} e^{-\int_0^{t^*} \frac{Q(\tau)}{\mu_0^*} d\tau} \frac{\partial}{\partial t^*} \left\{ e^{\int_0^{t^*} \frac{D_0(\tau)}{\mu_0^* P(0,\tau)} d\tau} \left[ W_0 + \int_0^{t^*} R(\tau) e^{-\int_0^{\tau} \frac{D_0(\tau)}{\mu_0^* P(0,\tau)} d\tau} d\tau \right] \right\}, \quad (1.23)$$

где постоянная $W_0 = 0$, ибо по условию $\frac{1}{k(0,0)} = \frac{1}{k_0}$. Осталось уточнить $\varphi_1(\tau)$. Но, прежде необходимо найти зависимость между $\sigma$ и $\tau$ при $t = 0$.

Из (1.11) имеем: $d\sigma = \mu^* \frac{\tilde{e}}{\gamma P} dx$, $d\tau = \mu_0^* P dx$; то есть $\sigma = \int_0^{\tau} \frac{\mu^*}{\mu_0^*} \frac{\tilde{e}}{\gamma P^2} d\tau = \sigma^*(\tau)$.

Из последнего равенства (1.14) при $t = 0$ находим представление для $\varphi_1(\tau)$:

$$\varphi_1(\tau) = \omega_0\left[\sigma^*(\tau)\right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\varphi(\tau)}{\omega_0[\sigma^*(\tau)]} \right\} \mu_0^* P(x,0), \quad (1.24)$$

(значение $\omega_0[\sigma^*(\tau)]$ составляется из $\omega_0(\sigma)$ (см. $(1.21)_1$) заменой $\sigma$ переменной $\sigma^*(\tau)$), причем по условию $P(x,0)$ задана. Но, зная $\varphi(\tau)$, $\omega(\sigma)$ и $\varphi_1(\tau)$ при $t > 0$ (см. (1.21), $(1.21)_1$ и (1.24)), сразу из (1.14) выражаем функцию $P(x,t)$

$$\frac{1}{P(x,t)} = \frac{\omega_0(\sigma)}{\varphi(\tau) P(x,0)} e^{\int_0^x \frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi(\tau)} dx}, \quad (1.25)$$

названную в [8,10] фундаментальной. Таким образом, закон изменения $k$ определяется формулой (1.22), где $k_1(x) = k_0$ произвольную функцию $k_1(x)$ допускаем равной $k_0$. Этим линеаризована система (1.1) и приведена к виду (1.7). Невыясненным остался еще один немаловажный момент, являющийся следствием (1.18) и $(1.18)_1$. В частности,

$$P(x,t) \frac{k_0}{k(x,t)} \left( \frac{\partial F^*}{\partial t} + F^{**} \right) = k_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{1}{k} \left( \frac{\partial F^*}{\partial t} + F^{**} \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0(t) + k_0 \int_0^x \frac{P}{k} \left( \frac{\partial F^*}{\partial x} + F^{**} \right) dx = k_0 \int_0^t \frac{1}{k} \left( \frac{\partial F^*}{\partial t} + F^{**} \right) dt = T - T_0, \quad (1.26)$$

т. е. $C_0(0)$ есть определенное число, если существует несобственный интеграл

$$C_0(0) = -k_0 \lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{P}{k} \left( \frac{\partial F^*}{\partial t} + F^{**} \right) dx.$$

Итак, мы добились: построения фундаментальной функции $P(x,t)$, определенной формулой (1.25); закона изменения коэффициента теплопроводности, определенного формулой (1.22); построения решения для второго уравнения выражения (1.8), определенного формулой (1.16); удовлетворения условиям (1.2). Попутно линеаризована система (1.1).

**2. Температурные напряжения.**

Теперь первое уравнение (1.8) перепишем в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} - \sqrt{a_1}\,\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + c_1^* \sigma_{xx} = V_1, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + \sqrt{a_1}\,\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + d_1^* V_1 = \dfrac{\delta}{\tilde{e}} + d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)\sigma_{xx}, \end{cases} \tag{2.1}$$

Однако, гораздо удобнее иметь дело с системой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} - \sqrt{a_1}\,\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \left[c_1^* - l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)\right]\sigma_{xx} = \rho_1, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + \sqrt{a_1}\,\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + \left(d_1^* - \dfrac{1}{l_1}\right)V_1 = \dfrac{\delta}{\tilde{e}} - \dfrac{\rho_1}{l_1}, \\ \rho_1 + l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)\sigma_{xx} = V_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

эквивалентной (2.1), если $\rho_1$ удовлетворяет третьему уравнению. Причем, $l_1$ – некоторое решение нелинейного уравнения (см.[8,11])

$$\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{d_1^*}{\sqrt{a_1}}\left(c_1^* - e_1^*\right)l_1^2 - \left(\frac{c_1^*}{\sqrt{a_1}} + d_1^*\right)l_1 + 1 = 0 \qquad \left(l_1\big|_{x=0} = 1;\ l_1 > 0\right), \tag{2.3}$$

а коэффициенты выражаются:

$$c_1^* = \frac{1}{2}\left[b_1 + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\left(\frac{\partial\sqrt{a_1}}{\partial t} + \sqrt{a_1}\,\frac{\partial\sqrt{a_1}}{\partial x} + c_1\right)\right];$$

$$d_1^* = \frac{1}{2}\left[b_1 - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\left(\frac{\partial\sqrt{a_1}}{\partial t} + \sqrt{a_1}\,\frac{\partial\sqrt{a_1}}{\partial x} + c_1\right)\right];$$

$$e_1^* = \frac{1}{d_1^*}\left(d_1 - \frac{\partial c_1^*}{\partial t} - \sqrt{a_1}\,\frac{\partial c_1^*}{\partial x}\right);\ a_1 = \tilde{a};\ b_1 = \tilde{b} - \gamma\hat{b};\ c_1 = \tilde{c};\ d_1 = \tilde{d} - \gamma\hat{c}.$$

Если $l_1$ удовлетворяет уравнению (2.3), то всегда выполняется

$$\frac{1}{l_1} e^{\int_0^x \left(d_1^* - \frac{1}{l_1}\right)dx} = e^{-\int_0^x \frac{c_1^* - l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}dx}. \tag{2.4}$$

Из первых двух уравнений (2.2) для $\sigma_{xx}$ и $V_1$ имеем соответственно:

$$\sigma_{xx}(x,\tau_1) = e^{\int_0^x \frac{c_1^* - l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}dx}\left[\sigma_{x0}(\tau_1) - \int_0^x \frac{\rho_1}{\sqrt{a_1}} e^{-\int_0^x \frac{c_1^* - l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}dx} dx\right], \tag{2.5}$$

$$V_1(x,\sigma_1)=e^{-\int\limits_0^x\left(d_1^*-\frac{1}{l_1}\right)dx}\left[V_{10}(\sigma_1)+\int\limits_0^x\frac{1}{\sqrt{a_1}}\left(\frac{\rho_1}{l_1}-\delta\right)e^{\int\limits_0^x\left(d_1^*-\frac{1}{l_1}\right)dx}dx\right],$$

где $\sigma_{x0}(\tau_1)$ и $V_{10}(\sigma_1)$ – произвольные функции;

$$d\tau_1=\mu_1\left(dx+\sqrt{a_1}\,dt\right),\ d\sigma_1=\tilde{\mu}_1\left(dx-\sqrt{a_1}\,dt\right), \tag{2.5$_0$}$$

$\mu_1$ и $\tilde{\mu}_1$ – интегрирующие множители. В первой формуле (2.5) вводим обозначение

$$\Phi_1=\int\limits_0^x\frac{\rho_1}{\sqrt{a_1}}e^{-\int\limits_0^x\frac{c_1^*-l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}dx}dx, \tag{2.5$_1$}$$

то есть

$$\sigma_{xx}(x,\tau_1)=e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*-l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}dx}\left[\sigma_{x0}(\tau_1)-\Phi_1\right]. \tag{2.6}$$

Подставляя эту формулу и значение $V_1(x,\sigma_1)$ в третье уравнение выражения (2.2) и используя соотношения (2.4), относительно $\Phi_1$ получим уравнение

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-\frac{l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}\Phi_1=L_1,$$
$$L_1=\frac{1}{\sqrt{a_1}\,l_1}\left[V_{10}(\sigma_1)-\int\limits_0^x\frac{\delta}{\sqrt{a_1}}e^{\int\limits_0^x\left(d_1^*-\frac{1}{l_1}\right)dx}dx\right]-\frac{l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}\sigma_{x0}(\tau_1). \tag{2.7}$$

Следовательно,

$$\Phi_1=e^{\int\limits_0^x\frac{l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}\int\limits_0^x L_1e^{-\int\limits_0^x\frac{l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}dx \tag{2.7$_1$}$$

и этим установлена выполнимость третьего уравнения выражения (2.2). Сравнение обозначения $(2.5)_1$ с решением $(2.7)_1$ позволяет определить $\rho_1$

$$\rho_1=\sqrt{a_1}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*-l_1d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}dx},$$

доказывающей эквивалентность систем (2.1) и (2.2).

Выше допустили, что $\delta$ задана и удовлетворяет третьему уравнению (1.8). Дальше своей целью ставим найти ее; поэтому $\sigma_{xx}$ перепишем в такой форме, чтобы содержащая в себе $\delta$, $-\sigma_{xx}^*$ выделялась особо

$$\sigma_{xx}=e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}\sigma_{xx}^*+\Phi^*;\ \sigma_{xx}^*=\int\limits_0^x\frac{\Delta_1}{\sqrt{a_1}}e^{-\int\limits_0^x\frac{l_1^2d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)+1}{l_1\sqrt{a_1}}dx}dx;$$

$$\Phi^* = e^{\int_0^x \frac{c_1^* - l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} dx} \left[ \sigma_{x0}\left(\tau_1\right) - e^{\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} \int_0^x L_0 e^{-\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} dx \right], \qquad (2.8)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{l_1} \int_0^x \frac{\delta}{\sqrt{a_1}} e^{\int_0^x \left(d_1^* - \frac{1}{l_1}\right) dx} dx; \; L_0 = \frac{1}{l_1 \sqrt{a_1}} \left[ V_{10}\left(\sigma_1\right) - l_1^2 d_1^* \left(c_1^* - e_1^*\right) \sigma_{x0}\left(\tau_1\right) \right].$$

Очевидно, нам нужно знать $\sigma_{xx}^*$. Однако предстоит предварительно удостовериться в выполнимости условий (1.3) и (1.4). При $t = 0$ уравнению

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \tau_1} = 0$$

будет удовлетворять: $\sigma_{xx} = 0$. Но оно в развернутом виде (см. значение $L_1$ выражения (2.7)) есть:

$$e^{-\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} \sigma_{x0}\left(\tau_1\right) + \int_0^x \frac{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} e^{-\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} \sigma_{x0}\left(\tau_1\right) dx =$$

$$= \int_0^x \left[ \frac{V_{10}\left(\sigma_1\right)}{l_1 \sqrt{a_1}} - \frac{\Delta_1}{\sqrt{a_1}} \right] e^{-\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} dx . \; (t = 0).$$

Или, после принятия обозначений:

$$\Psi = \int_0^x \frac{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} e^{-\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} \sigma_{x0}\left(\tau_1\right) dx, \; (t = 0),$$

$$\Omega(x) = \int_0^x \left[ \frac{V_{10}\left(\sigma_1\right)}{l_1 \sqrt{a_1}} - \frac{\Delta_1}{\sqrt{a_1}} \right] e^{-\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} dx, \quad (t = 0), \qquad (2.9)$$

можно коротко записать

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} \Psi = \Omega .$$

Следовательно,

$$\Psi(x,0) = e^{-\int_0^x \frac{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} dx} \int_0^x \Omega e^{\int_0^x \frac{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} dx} dx .$$

Тут ограничились частным решением $\Psi$, чтобы заодно выполнялись оба условия (1.3). Обозначение (2.9) позволяет сразу записать $\sigma_{x0}\left(\tau_1\right)$:

$$\sigma_{x0}\left(\tau_1\right) = -e^{\int_0^x \frac{dx}{l_1 \sqrt{a_1}}} \int_0^x \Omega e^{\int_0^x \frac{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}} dx} dx + \frac{\sqrt{a_1}}{l_1 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)} \Omega e^{\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^* - e_1^*\right)+1}{l_1 \sqrt{a_1}} dx} \; (t = 0). \qquad (2.9)_1$$

Этим оба условия (1.3) выполняются. Далее, замечая, что $dx = \frac{1}{\mu_1} d\tau_1$, $\left( x = \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau_1}{\mu_1} = \chi(\tau_1) \right)$ $\sigma_{x0}(\tau_1)$ как функцию от $\tau_1$, представляем в общем виде:

$$\sigma_{x0}(\tau_1) = -e^{\int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{dz}{\mu_1 l_1 \sqrt{a_1}}} \int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{\Omega}{\mu_1} e^{\int_0^z \frac{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)}{\mu_1 \sqrt{a_1}} dz} dz + \frac{\sqrt{a_1}}{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)} \Omega(\tau_1) e^{\int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{l_1^2 d_1^* (c_1^* - e_1^*) + 1}{\mu_1 l_1 \sqrt{a_1}} dz} \quad (2.10)$$

В формуле (2.5) под $\sigma_{x0}(\tau_1)$ будем подразумевать правую часть (2.10). Нам остается удовлетворить условию (1.4). На основании упомянутой формулы (2.5) $\sigma_{xx}\big|_{x=0} = 0$, если $\sigma_{x0}(\tau_1)\big|_{x=0} = 0$. Пусть

$$\Psi^* = \int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{\Omega}{\mu_1} e^{\int_0^z \frac{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)}{\mu_1 \sqrt{a_1}} dz} dz . \quad (2.11)$$

Правая часть (2.10) будет нуль (при $x = 0$), если $\Psi^*$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \chi} - \frac{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)}{\mu_1 \sqrt{a_1}} \Psi^* = 0 \Rightarrow \Psi^*(\chi) = e^{\int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)}{\mu_1 \sqrt{a_1}} d\chi} . \quad (2.12)$$

Отсюда, ограничиваясь частным решением и приняв его равным (2.11), для $\Omega$ получим:

$$\Omega(\chi(\tau_1)) = \frac{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)}{\sqrt{a_1}} , \quad (2.13)$$

но $\Omega$ имеет вид (2.9), там она есть функция от $x$. В силу вышеуказанного замечания ($x = \chi(\tau_1)$), ее можем представить так:

$$\Omega = \int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{1}{\mu_1} \left[ \frac{V_{10}(\sigma_1)}{l_1 \sqrt{a_1}} - \frac{\Delta_1}{\sqrt{a_1}} \right] e^{-\int_0^z \frac{l_1^2 d_1^* (c_1^* - e_1^*) + 1}{\mu_1 l_1 \sqrt{a_1}} dz} dz , \quad (2.13)_1$$

где, также как и в (2.13), правую часть подразумеваем как функцию от $\tau_1$. Из (2.13) и $(2.13)_1$ легко находим функцию $V_{10}(\sigma_1)$

$$V_{10}(\sigma_1) = l_1 \Delta_1 + l_1 \mu_1 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{l_1 d_1^* (c_1^* - e_1^*)}{\sqrt{a_1}} \right] e^{\int_0^{\chi(\tau_1)} \frac{l_1^2 d_1^* (c_1^* - e_1^*) + 1}{\mu_1 l_1 \sqrt{a_1}} dz} . \quad (2.14)$$

Правая часть (2.14) должна быть функцией от $\sigma_1$. В связи с этим возвращаемся к $(2.5)_0$ при условии, что $x = 0$. Замечая, что

$$d\tau_1 = -\frac{\mu_1}{\tilde{\mu}_1} d\sigma_1 \Rightarrow \tau_1 = -\int_0^{\sigma_1} \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}_1} d\sigma_1 = -r_0(\sigma_1),$$

в правой части (2.14) вместо $\tau_1$ подставим его значение, а также примем во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial \chi}=\frac{\partial}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial \chi}=\mu_1\frac{\partial}{\partial r_0};\ \frac{\partial r_0}{\partial \chi}=\frac{\partial r_0}{\partial \tau_1}\frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial \tau_1}}=\mu_1\frac{\partial r_0}{\partial \sigma_1}\frac{1}{\frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_1}}=\mu_1,$$

тогда (2.14) перейдет:

$$V_{10}(\sigma_1)=l_1\Delta_1+l_1\mu_1^2\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{l_1 d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)}{\sqrt{a_1}}\right]e^{-\int\limits_0^{-\chi(r_0(\sigma_1))}\frac{l_1^2 d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)+1}{\mu_1\tilde{\mu}_1 l_1\sqrt{a_1}}d\sigma_1};\quad (2.15)$$

причем, $\chi(\tau_1)=\int\limits_0^{\tau_1}\frac{d\tau_1}{\mu_0}=-\int\limits_0^{-r_0(\sigma_1)}\frac{1}{\tilde{\mu}_1}d\sigma_1=-\chi(r_0(\sigma_1))$.

Напоминаем, что формула (2.10) устанавливает выполнимость условий (1.3), а (2.15) удовлетворяет краевому условию (1.4). Выполнимость условий (1.2) установили в П.1. Для окончательного построения $\sigma_{xx}$ и $F$ остается определить $\delta$ из третьего уравнения (1.8). То есть нужно найти $\sigma_{xx}^*$ и $F^{**}$.

**3. О функции $\delta$.**

Неизвестная $\delta$ содержится в $\sigma_{xx}^*$ и $F^{**}$ (см. (2.8) и $(1.16)_1$). В третье уравнение (1.8) внесем вместо $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\sigma_{xx}$ и $(T-T_0)$ их соответственные значения из $(1.16)_1$, (2.8) и $(1.18)_1$, результат продифференцируем по $t$ и сгруппируем относительно функций, содержащих в себе $\delta$:

$$\frac{\tilde{e}}{\tilde{f}}\frac{\partial^2 F^{**}}{\partial t^2}+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{e}}{\tilde{f}}\right)+\frac{\tilde{g}}{\tilde{f}}\right]\frac{\partial F^{**}}{\partial t}+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{f}}\right)+\frac{k_0}{k}\right]+\frac{\hat{b}}{\tilde{f}}e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}\frac{\partial^2\sigma_{xx}^*}{\partial t^2}+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hat{b}}{\tilde{f}}e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}\right)+\left(\frac{\hat{b}}{\tilde{f}}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx+\frac{\hat{c}}{\tilde{f}}\right)e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}\right]\frac{\partial\sigma_{xx}^*}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\hat{b}}{\tilde{f}}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx+\frac{\hat{c}}{\tilde{f}}\right)e^{\int\limits_0^x\frac{c_1^*+\frac{1}{l_1}}{\sqrt{a_1}}dx}\right]\sigma_{xx}^*=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta}{\tilde{f}}\right)-\frac{\partial f^*}{\partial t}-\frac{k_0}{k}\frac{\partial F^*}{\partial t};\quad (3.1)$$

где $f^*=-\left(\frac{\tilde{e}}{\tilde{f}}\frac{\partial^2 F^*}{\partial t^2}+\frac{\tilde{g}}{\tilde{f}}\frac{\partial F^*}{\partial t}+\frac{\hat{b}}{\tilde{f}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+\frac{\hat{c}}{\tilde{f}}\Phi_1\right)\cdot$

Если из тождественного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{l_1\sqrt{a_1}\frac{\partial\sigma_{xx}^*}{\partial x}e^{\int\limits_0^x\frac{1}{\sqrt{a_1}}\left[l_1 d_1^*\left(c_1^*-e_1^*\right)+\frac{1}{l_1}\right]dx}\right\}=\frac{1}{h_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(F^{**}e^{-\int\limits_0^x g^* dx}\right),\quad (3.2)$$

где $h_0 = \dfrac{\sqrt{a_1}}{\gamma P} e^{-\int\limits_0^x \left( d_1^* + g^* - \frac{1}{l_1} \right) dx}$, выразить $F^{**}$ через $\dfrac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x}$ (при допущении, что $\dfrac{\partial h_0}{\partial x} = 0$), внести в (3.1), привести подобные члены, то относительно $\sigma_{xx}^*$ получим соотношение

$$\frac{\partial^3 \sigma_{xx}^*}{\partial x^3} - a \frac{\partial^3 \sigma_{xx}^*}{\partial x^2 \partial t} + b \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^*}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^*}{\partial x^2} + d \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial t} + e \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + q \sigma_{xx}^* = h, \tag{3.3}$$

где $a, b, c, d, e, q$ – заданные коэффициенты.

Из (3.3) разрешить $\sigma_{xx}^*$ не представляет проблему, так как известно как решаются такого класса уравнения [9]. Чтобы изучить линейные уравнения четвертого порядка необходимо знать как решаются уравнения третьего порядка. Поэтому считаем изучить (3.3) особо.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 518с.
2. Карслау Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488с.
3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наука думка, 1970. – 302с.
4. Коздоба А.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 228с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1976. – 600с.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708с.
7. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: изд. АНСССР, 1962. – 364с.
8. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч.I. – Владикавказ: изд. СОГУ, 2003. – С. 56.
9. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч.II. – Владикавказ: изд. СОГУ, 2004. – С.116.
10. Чочиев Т.З. О фундаментальной функции нелинейного температурного поля // Влад. мат. журнал, Т. 2, вып. I, С.30-43.
11. Чочиев Т.З. Температурные напряжения в однородном упругом полупространстве и соответствующее характеристическое уравнение, //Тр. ИПММ НАН Украины, 2004, вып. 9, С.209-220.