Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 775, 2007, с.258-267

УДК 519.146

Математическая модель прикладной задачи оптимизации разбиения геометрической области

А. Б. Элькин
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, Украина

The mathematical model of the partitioning problem of a region with a complex three-dimensional form into subregions which have identical areas or areas, multiple to a certain natural number, is proposed. The special features of the constructed mathematical model are investigated, the used numerical method for its realization is substantiated and the applied value of this investigation is reflected.

1. Постановка проблемы

Задачи разбиения заданных областей сложной пространственной формы на подобласти по заданному критерию возникают во многих областях [1-10]. Примером может служить задача выделения пайщикам в собственность земельных участков равной площади или кратных числу объединившихся пайщиков. При этом если земельное угодье имеет ярко выраженный рельеф, то выделение участков земли необходимо осуществлять с учетом ряда ограничений, диктуемых технологией обработки почвы и наличием областей запрета, представляющих собой деградированные участки земли, водоемы, строения, магистрали и др.

2. Анализ литературных источников

Только на первый взгляд кажется, что для решения задач разбиения в рассматриваемой постановке, возможно, например, применить уже существующие и эффективно применяемые в геометрическом проектировании [3] методы размещения плоских геометрических объектов [11]. Однако, решение этими методами даже задач оптимизации размещения прямоугольников в прямоугольной области объективно приводит к появлению целого ряда внутренних «незанятых» подобластей [11, с. 175]. Предложенные в этой же монографии [11, с. 68] методы разбиения геометрических объектов рассчитаны на решение только задач разбиения невыпуклых областей по критерию получения всех выпуклых подобластей.

Прикладные аспекты задачи оптимизации разбиения могут быть связаны, например, с реализацией законодательства Украины в области землеустройства [12] и земельной реформы [13].

3. Постановка задачи исследования

Необходимо предложить математическую модель задачи разбиения области сложной пространственной формы на подобласти, имеющие одинаковые площади или площади, кратные некоторому натуральному числу. Исследовать особенности математической модели с целью обоснования применяемого численного метода для ее реализации.

4. Модели разбиваемых областей

В R^3 задана область Ω_0. Ее основание Ω принадлежит плоскости xOy и является проекцией Ω_0 на xOy. Область Ω, в общем случае, многосвязная, что может быть обусловлено ее естественной многосвязностью или наличием областей запрета. Для каждой точки $(x, y) \in \Omega$ известны значения координаты z и изолинии соответствующей поверхности, характеризующей рельеф Ω. Граница Γ области Ω может задаваться в оцифрованном или в аналитическом виде, например, с помощью $R-$функции.

Отметим, что в зависимости от характеристик области Ω, например, многосвязность, односвязность, выпуклость, вогнутость, форма границы, соотношение характерных размеров области, применяются те или иные приближенные модели области Ω.

Рассмотрим аппроксимацию области Ω в виде сеточной модели [14]. Для определенности предположим, что начало координат (0,0) лежит внутри Ω. Два семейства параллельных прямых, пересекающиеся под прямым углом, образуют сеточную модель C области Ω с искомыми значениями шага h_1 и h_2. При этом точки $x = i_1 h_1,\ y = i_2 h_2,\ i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ являются узлами сетки C. Ближайшими считаются те точки $(i_1 h_1, i_2 h_2)$ и $(i_1^1 h_1, i_2^1 h_2)$, которые лежат на прямой, параллельной оси Ox или оси Oy, и отстоят друг от друга на расстоянии h_1 или h_2, при этом: $\left|i_1^1 - i_1\right| + \left|i_2^1 - i_2\right| = 1$. Четыре ближайших узла образуют ячейку, а ячейки, все точки которых принадлежат Ω, являются внутренними. Если часть точек ячейки принадлежит Ω, а часть нет – ячейка является граничной. Площадь внутренней ячейки равна $S^{**} = h_1 h_2$, а площадь граничной ячейки будем вычислять приближенно. Если в процессе решения задачи целесообразно учесть параметры $\Delta x, \Delta y$, ($0 \le \Delta x \le h_1$, $0 \le \Delta y \le h_2$), характеризующие плоско-параллельный сдвиг сетки C, то узлы сетки формируются, как $x = i_1 h_1 \pm \Delta x,\ y = i_2 h_2 \pm \Delta y,\ i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ При этом некоторые ячейки могут менять свой статус: внутренние $\leftrightarrow$ граничные. Таким образом, различные значения компонентов кортежа вида $< h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, >$ определяют семейство C сеточных моделей области Ω, на множестве которых ищется рациональное разбиение.

Возможен также учет параметра θ ориентации $(\theta_1 \le \theta \le \theta_2)$ сеточной модели C, где θ_1, θ_2 – заданные величины. Параметр θ целесообразно учитывать в тех случаях, когда характерные размеры L_1, L_2 области Ω, соотносятся, как $L_1 >> (<<) L_2$. В этом случае искомые параметры характеризует кортеж $< h_1^*, h_2^*, \Delta x, \Delta y, \theta >$, где h_1^*, h_2^* – проекции h_1, h_2 на соответствующие оси.

Если область Ω имеет сложную геометрическую форму, то возможно применение неравномерной сетки C, узлы которой формируются пересечением двух семейств неравномерных параллельных прямых. В этом случае соответствующий кортеж параметров будет содержать искомые шаги покрытия области Ω неравномерной сеткой и параметр ориентации сетки C .

5. Математическая модель задачи разбиения

Возможна, например, одна из следующих постановок оптимизационной задачи разбиения области на подобласти равной площади.

Функции цели. Максимизация числа N прямоугольных подобластей равной площади, т.е.

$$\chi_1 = N(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta) \to \max . \qquad (1)$$

Максимизация отношения площади $S(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta)$, занятой внутренними прямоугольными ячейками $\Omega_c \in \Omega$, к площади $S(\Omega)$ области Ω , т.е.

$$\chi_2 = \frac{S(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta)}{S(\Omega)} \to 1 . \qquad (2)$$

Минимизация разности между общей площадью $S(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta)$, занятой внутренними прямоугольными ячейками $\Omega_c \in \Omega$, и площадью $S(\Omega)$ области Ω , т.е.

$$\chi_3 = S(\Omega) - S(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta) \to 0 . \qquad (3)$$

Ограничения. Область допустимых решений задачи разбиения описывается следующей системой ограничений.

Равенство площадей $S^{**}(h_1, h_2)$ всех внутренних ячеек $\Omega_c \in \Omega$ сетки C заданной площади S^* (критерий разбиения)

$$S^{**}(h_1, h_2) = S^* . \qquad (4)$$

Ограничения на величину шага h_1, h_2 сетки C

$$h_{11} \le h_1 \le h_{12} , \qquad (5)$$

$$h_{21} \le h_2 \le h_{22} , \qquad (6)$$

где $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$ – заданные величины, диктуемые, как правило, технологическими аспектами.

Ограничения на шаг плоско-параллельного сдвига сетки C , задаваемые требованиями к точности решения задачи разбиения

$$0 \le \Delta x \le h_1 , \qquad (7)$$

$$0 \le \Delta y \le h_2 . \qquad (8)$$

Ограничение на угол θ ориентации сетки C , связанное также с технологическими аспектами и с точностью решения задачи разбиения

$$\theta_1 \le \theta \le \theta_2 . \qquad (9)$$

Заметим, что в том случае, когда применяемая сетка C неравномерная, то каждый шаг сетки заключается в аналогичные (5-6) двухсторонние ограничения.

6. Особенности математической модели задачи разбиения

1. Размерность пространства искомых параметров рассматриваемой задачи разбиения зависит от способа аппроксимации области Ω сеткой C . Для

неравномерных сеточных моделей с изменяемым углом θ ориентации сетки размерность

$$M = n_1 + n_2 + 1, \tag{10}$$

где n_1 – число узлов сетки по оси Ox, n_2 – число узлов сетки по оси Oy.

Для равномерной сетки и учета ее плоско-параллельного сдвига с изменением ориентации сетки C размерность равна $M = 5$.

2. Число K неравенств, описывающих область допустимых решений задачи разбиения, при ее размерности в виде (10), равно

$$K = n_1 + n_2 + 2. \tag{11}$$

3. Нелинейность выражений $N(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta)$, $S(h_1, h_2, \Delta x, \Delta y, \theta)$ в функциях цели (1-3) и $S^{**}(h_1, h_2)$ в ограничении (4) обусловлена уже тем, что в эти выражения входит операция подсчета площади ячейки с изменяемыми размерами. То есть имеет место квадратичная зависимость.

4. В силу пунктов 1, 3 особенностей, рассматриваемый класс задач относится к задачам нелинейного математического программирования.

5. Оценка числа подобластей равной площади, на которые разбивается область Ω, имеет вид

$$0 \le N \le E\left(\frac{S(\Omega)}{S^*}\right), \tag{12}$$

где E – целая часть числа в скобках, $S(\Omega)$ – площадь области Ω, S^* – площадь ячейки.

6. Экстремальные значения функций цели

$$\chi_1 = \max, \tag{13}$$

$$\chi_2 = 1, \tag{14}$$

$$\chi_3 = 0, \tag{15}$$

достигаются при $\Theta = \varnothing$, т.е. при отсутствии незанятой части области (при точном разбиении области Ω). Например, размеры L_1, L_2 прямоугольной области Ω таковы, что ее разбиение равномерной сеткой с площадью $h^2 = S^*$ ячейки позволяет получить

$$N = \frac{L_1 L_2}{h^2}, \tag{16}$$

где $N -$ натуральное число.

7. Условия, при которых постановка рассматриваемой задачи разбиения имеет смысл, состоят в следующем

$$S(\Omega) \ge S^*, \tag{17}$$

и хотя бы для одной ячейки $\Omega_c \in \Omega$ с параметрами h_1, h_2, заключенными в ограничения (5, 6)

$$h_1 h_2 \ge S^*. \tag{18}$$

8. Значимость рассматриваемых задач для практики, например, для задач паевания земли [12, 13], тем выше, чем больше N в оценке (11).

9. Положительным в применении сеточных моделей разбиваемых областей является то, что формируемая таким образом основная структура разбиения области Ω дает возможность в последующем повысить эффективность решения задач прокладки коммуникационных соединений (трассировки) для обеспечения доступа, например, сельскохозяйственной техники к любому из выделенных участков (паев).

7. Особенности численной и алгоритмической реализации

Алгоритм численной реализации математической модели разбиения области представлен на Рис.1. Рассмотрим основные особенности реализации.

1. Многомерность, нелинейность и многоэкстремальность затрудняют применение классических методов нелинейного математического программирования.

2. В силу непрерывности изменения искомых параметров, имеется возможность применения численных методов оптимизации по группам параметров. При этом целесообразно провести предварительный анализ искомых параметров и соответствующих ограничений с целью установления "естественной связности" параметров и последующего расчленения основной задачи оптимизации на несколько взаимосвязанных подзадач меньшей размерности.

3. Вопрос выбора первого приближения при численной реализации всегда важен, а для задач этого класса имеет особое значение. Остановимся на анализе параметров $\theta, h_1, h_2, \Delta x, \Delta y$. Задание начального значения θ ориентации области Ω связано в основном с двумя факторами: соотношение характерных размеров L_1, L_2 области Ω; смысл прикладной задачи и ограничения, вызванные дополнительными требованиями практического характера. Примером может служить задача паевания земли с учетом рельефа земельного угодья и технологии обработки почвы. Это потребовало, например в работах [15, 16], рассмотрения вопроса определения рационального направления прямолинейного движения сельскохозяйственного агрегата с учетом конфигурации поля и его рельефа. При этом оптимизация направления движения агрегата осуществляется путем минимизации общей длины холостого хода агрегата на поворотах. Это обеспечивает максимальную часовую производительность исследуемого агрегата. Результаты получены [15, 16] для различных ширин захвата агрегата (от 4,0 м. до 12,0 м.) и для угла наклона поля $\alpha = [0^0, 5^0]$. Для $\alpha > 5^0$, поле обрабатывается поперек склона, чтобы предотвратить возникновение водной эрозии почвы. Последнее замечание также накладывает ограничения на ориентацию участков земельных наделов.

4. С изменением угла θ ориентации сетки C (Рис. 2), значения характерных размеров L_1, L_2 области разбиения Ω определяются в направлениях двух семейств параллельных прямых. При этом необходимо учитывать их зависимость от θ, то есть $L_1 = L_1(\theta)$ и $L_2 = L_2(\theta)$.

5. Выбор первого приближения шага h_1 и h_2 сетки C целесообразно увязать с величинами характерных размеров разбиваемой области Ω. Например, если область Ω выпуклая, то при

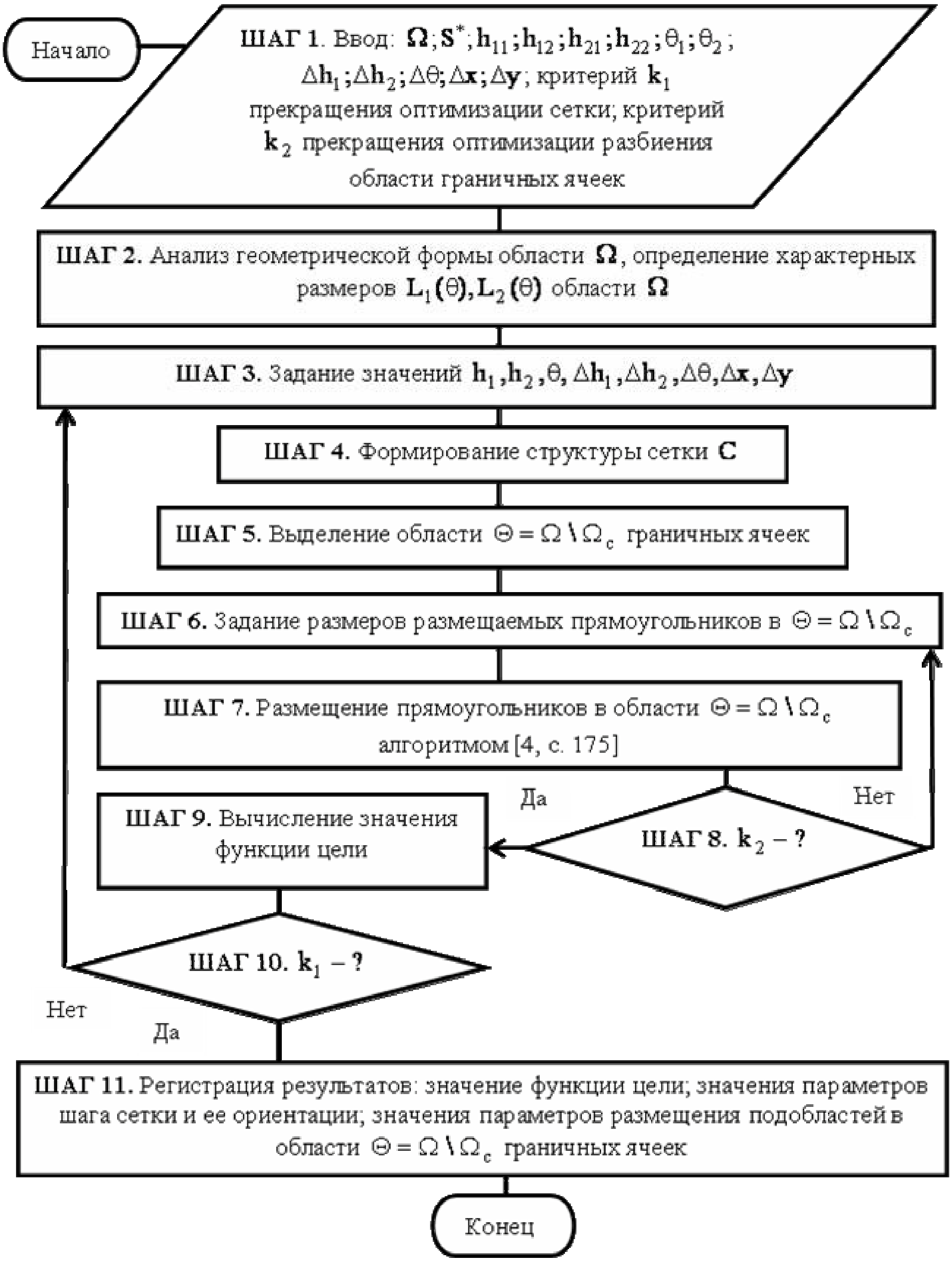

Рис. 1. Блок-схема численной реализации математической модели задачи разбиения области

$$L_1 >> (\approx) L_2 \,, \tag{19}$$

шаг сетки

$$h_1 >> (\approx) h_2 \,, \tag{20}$$

а параметры Δx и Δy приращения шага сетки при плоско-параллельном сдвиге сетки целесообразно выбирать исходя из соотношения

$$\Delta x >> (\approx) \Delta y \,. \tag{21}$$

6. Рассмотрение одной из функций цели (1-3) с ограничениями (4-9) еще не дает окончательного решения задачи в целом. Необходимо далее исследовать область $\Theta = \Omega \setminus \Omega_c$, где Ω_c – область, состоящая только из внутренних ячеек области Ω. То есть рассмотреть область Θ граничных ячеек и осуществить ее разбиение на равные площади, например, методом секущих прямых с изменяемым пределом интегрирования или методами размещения плоских геометрических объектов [11, с. 175].

7. Задание точности решения задачи разбиения должна быть согласована с постановкой прикладной задачи. Например, если речь идет о решении задач разбиения для выделения паев земли [12, 13], то точность численной реализации соответствующих математических моделей должна быть согласована с точностью аппаратных средств для определения линейных размеров на местности (спутниковых, геоинформационных, лазерных и др.).

8. Погрешность численной реализации соответствующих математических моделей в основном зависит от: погрешности разбиения оставшейся подобласти $\Theta = \Omega \setminus \Omega_c$ вблизи границы Γ разбиваемой области; погрешностей вычислительного характера; погрешностей задания исходных данных, в частности, точности оцифровки границы области Ω.

8. Пример решения задачи паевания участка земли

На Рис.2 иллюстрируется результат решения задачи паевания земельного угодия – поле № 7 ФХ «Александровское» Изюмского района Харьковской области. Масштаб: 1 см : 100 м. При этом: общая площадь поля $S = 174{,}21\,\textit{га}$; площадь каждой подобласти $S^* = 4{,}8\ \textit{га}$; площадь под разбитыми участками – 168 *га*; число подобластей $N = 35$; шаг сетки $h_1 = 162{,}1\,\textit{м};\, h_2 = 296{,}2\,\textit{м.}$; приращение плоско-параллельного сдвига сетки $\Delta x = 0{,}1 h_1$, $\Delta y = 0{,}1 h_2$; угол ориентации сетки $\theta = 42^0$; приращение изменения ориентации сетки $\Delta\theta = 3^0$; коэффициент отношения занятой части области к общей – $0{,}964$; не занятая площадь – $6{,}21$ га, последнее составляет 3,565 % от общей площади поля. Остальные результаты численного решения задачи разбиения сведены в Табл.1.

Затраты времени на ПЭВМ не превосходят 6 минут. Основное машинное время (до 70 %) расходуется на реализацию операции размещения прямоугольных объектов в области граничных ячеек (внутренний цикл на Рис.1: шаг 6, шаг 7, шаг 8).

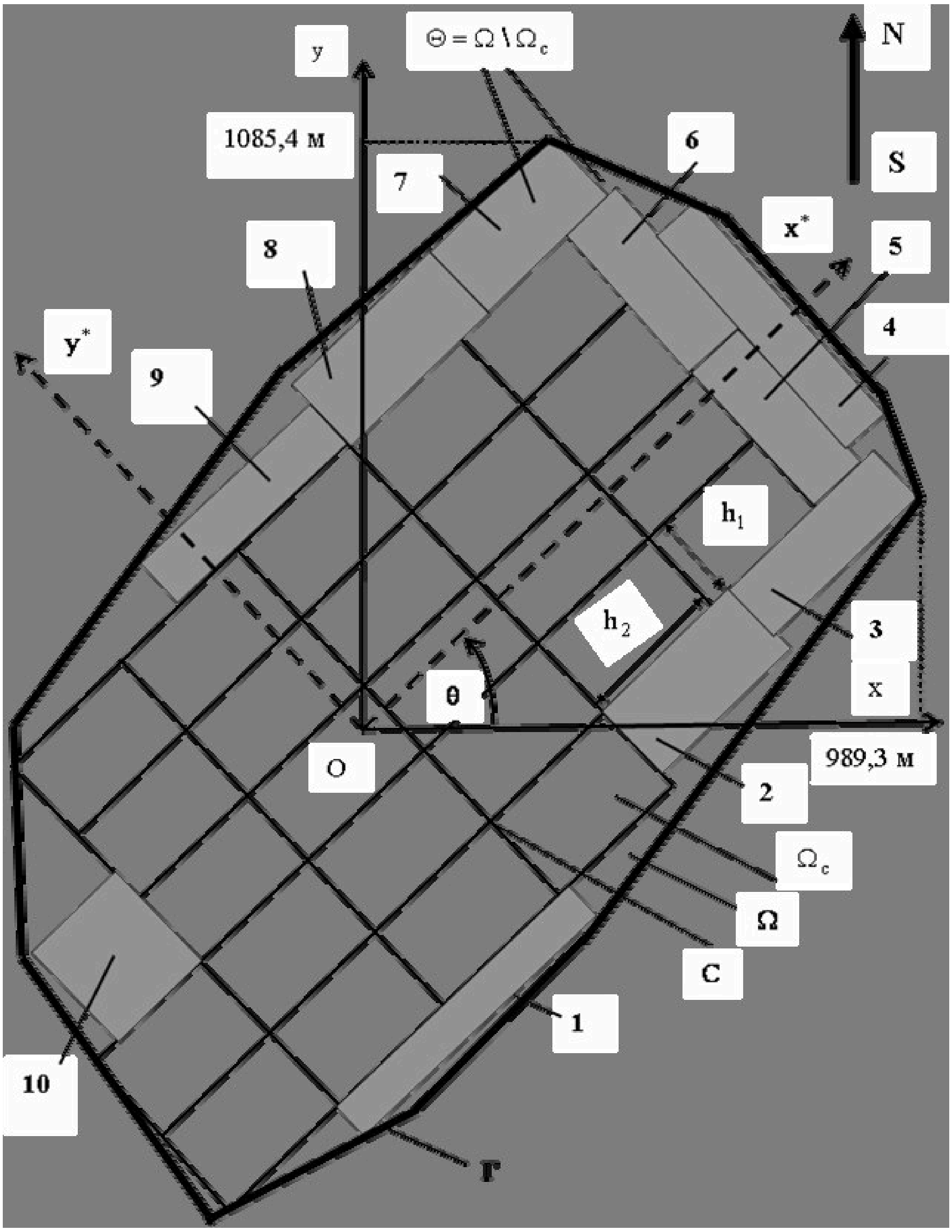

Рис. 2. Разбиение области на подобласти равной площади.
Поле № 7 ФХ «Александровское» Изюмского района Харьковской области.
Масштаб: 1 см : 100 м.

Таблица 1. Результаты разбиения области $\Theta = \Omega \setminus \Omega_c$ *граничных ячеек на прямоугольники*

Номера прямоугольников в области $\Theta = \Omega \setminus \Omega_c$	Координаты (м) полюсов прямоугольников (точек пересечения диагоналей) в системе координат xOy		Размеры a, b (м) прямоугольников в области $\Theta = \Omega \setminus \Omega_c$	
	x	y	a	b
1	174,5	-515,7	549,0	87,4
2	598,3	98,3	312,7	153,5
3	823,2	313,8	349,2	137,4
4	746,1	681,2	500,1	96,0
5	720,7	543,9	311,6	154,0
6	511,5	798,1	319,4	150,0
7	271,4	882,4	289,3	165,9
8	45,7	672,3	291,1	164,8
9	-198,1	392,4	411,7	116,6
10	-431,7	-410,7	210,7	227,8

9. Выводы и рекомендации

Предложена математическая модель задачи разбиения области сложной пространственной формы на подобласти равной площади. Исследованы особенности математической модели: проанализированы возможные функции цели и система ограничений; получены условия разрешимости задачи (совместности системы ограничений); дана оценка размерности пространства искомых параметров; оценивается число возможных ограничений; обосновывается принадлежность задач такого класса к задачам нелинейного программирования.

Предложена двухэтапная процедура решения задач разбиения. На первом этапе оптимизируются параметры сеточной модели области, а на втором – определяются размеры прямоугольных объектов равной площади и осуществляется их рациональное размещение в области граничных ячеек.

Рекомендуется применение рассмотренной математической модели для решения задач разбиения в АПК (паевание земли), в легкой промышленности (рациональное использование материала), в приборостроении (рациональная резка искусственных монокристаллов) и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элементы теории геометрического проектирования / Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др. – К.: Наукова думка, 1995. – 248 с.
2. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
3. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования. – Х.: ИПМаш АН УССР, Препринт №181. – 1983. – 36 с.
4. Путятин В.П., Элькин А.Б. Комбинаторные аппаратные модели задач геометрического проектирования // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС ім. І. Кожедуба, 2007. – Вип. 3 (61). – С. 86-91.

5. Элькин А.Б. Модель задачи оптимизации разбиения области по заданному критерию // Управління розвитком: Зб. наукових статей. – Х.: ХНЕУ, 2007. – Вип. 3’2007. – С. 121-122.
6. Елькін О.Б. Реалізація математичних моделей задач призначення об’єктів та прокладки трас між ними // Материалы II Международной научно-практической конференции «Современные научные достижения – '2007» (1-14 февраля 2007 г.). – Том 6, естественные науки. – Днепропетровск: «Наука и образование», 2007. – С. 40-42.
7. Элькин А.Б. Аппаратурная реализация математических моделей задач геометрического проектирования // XXI Международный молодежный форум «Радиоэлектроника и молодежь в XXI в.»: Сбор. материалов форума. – Х.: ХНУРЭ, 2007. – С. 119.
8. Элькин А.Б. Модели задач разбиений и трассировки в АПК // Матеріали Міжнародного Форуму молодих вчених «Ринкова трансформація економіки: стан, проблеми, перспективи». – Х.: ХНТУСГ ім. П. Василенко, 2007. – С. 219-220.
9. Патент. № 22708. Україна, МПК (2006) G 06 F 5/06. Пристрій для моделювання та оптимізації трас / В.П. Путятін, О.Б. Елькін (Україна). – № u200613268; Заявл. 15.12.2006; Опубл. 25.04.2007. Бюл. № 5 – 4 с.
10. Патент. № 22623. Україна, МПК (2006) G 06 F 17/00. Пристрій для комбінаторної оптимізації розміщення об'єктів та трасування / В.П. Путятін, О.Б. Елькін (Україна). – № u200612839; Заявл. 05.12.2006; Опубл. 25.04.2007. Бюл. № 5 – 4 с.
11. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – К.: Наукова думка, 1976. – 245 с.
12. Про землеустрій: Закон України від 22 травня 2003 року // Відомості Верховної Ради. – 2003. – № 36. – с. 282.
13. Про порядок виділення в натурі (на місцевості) земельних ділянок власникам земельних часток (паїв): Закон України від 5 червня 2003 року // Відомості Верховної Ради. – 2003. – № 38. – с. 314.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
15. Мельник В.И., Чигирин А.Г., Миронов П.А. Анализ задачи выбора оптимального направления сплошной обработки поля с учетом его рельефа // Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. – 2003. – Вип. 20. – С. 285-296.
16. Мельник В.И., Золотухин А.Е. Выбор оптимального направления сплошной обработки поля // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1997. – № 3. – С. 27-28.