Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517. 95
№ 780, 2007, с.49-60

Псевдодифференциальные уравнения в канонических негладких областях: асимптотический анализ особенностей

В. Б. Васильев
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, Беларусь

Some distributions related to pseudo differential equations in multidimensional domains with cuts are considered. The concrete calculations are done for certain canonical domains, which will lead in future to theory of pseudo differential equations and boundary value problems in domains with low dimensional singularities.

1. Теория псевдодифференциальных операторов насчитывает не более полувека [3, 4, 7-10, 17-22], однако молодой ее не назовешь, поскольку основные достижения приходятся на 60-70 годы прошлого столетия. Главные успехи ”псевдодифференциальной теории” заключены в построении символического исчисления псевдодифференциальных операторов и краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с гладким краем.

На многообразиях с негладким краем единой точки зрения на эти вопросы, похоже, нет, и автор предложил и предлагает свою точку зрения (пока для эллиптических уравнений, хотя затрагиваются уже и параболические [26], [28]), связанную с понятием волновой факторизации символа [5, 11,23]. Наличие волновой факторизации символа эллиптического оператора в особой точке (типа конуса или ребра) позволяло дать общую картину разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения, на основе которой можно было выделить корректные постановки краевых задач. Аналогичные вопросы возникают и в том случае, когда граница содержит негладкие компоненты меньшей размерности (см., например, [22] в случае гладких компонент и дифференциальных операторов), и настоящая работа – первый шаг в этом направлении.

2. Начнем с двумерного случая. Задача заключается в выяснении того, что представляет собой в образах Фурье оператор умножения на характеристическую функцию, например, положительной части оси y. Аналитическая запись этого мультипликатора

$$m(x,y)=\begin{cases}1, & x=0,\ y>0,\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

Априори ясно, что такой мультипликатор в образах Фурье – это свертка с обобщенной функцией, причем однородной степени – 2, коль скоро функция $m(x,y)$ однородна степени нуль (по этому поводу см.[6-10]), и, следовательно, ее можно считать определенной на единичной окружности, которую упомянутая полуось прокалывает в единственной точке – ”северном полюсе”.

Прием применяется стандартный – мультипликатор $m(x,y)$ ”размазывается” по углу раствора α, находится соответствующая обобщенная функция (вообщето, она уже найдена; см. ядра Бохнера, например, в [12, 13]), а затем – переход к пределу при $\alpha \to 0$.

Замечание. В работе автора [11] был введен оператор Гахова G, который определялся с выходом в комплексную плоскость. Конечно, было бы желательно дать определение в действительных переменных, и для этого придется особенность вырезать специальным образом. Так, если вспомнить двумерное преобразование Гильберта, то там особенность вырезается ”крестом”. В случае двумерного оператора Гахова, вероятно, это надо делать с помощью каких-то ”гиперболических” вырезов. Не хочется останавливаться на этом подробнее (оператор Гахова работает хорошо); однако см. по этому поводу [14].

Угол раствора α – это множество $\{(x,y): y > a|x|\}, a = ctg\alpha$, и, таким образом, нужная асимптотика $(\alpha \to 0)$ – это $a \to \infty$. Обобщенная функция, соответствующая угловому мультипликатору – это функция

$$\frac{1}{2}\delta(\xi) + K_a(\xi_1,\xi_2),$$
$$K_a(\xi_1,\xi_2) = \frac{a}{2\pi^2}\frac{1}{\xi_1^2 - a^2(\xi_2 + i0)^2}, \tag{1}$$

где $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака.

Остается найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{2\pi^2}\frac{1}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2}$ (пишу так для краткости) в смысле обобщенных функций. Пусть $\varphi(\xi) \in S(R^2)$ (класс Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций),

$$\frac{a}{2\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{\varphi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2} = \frac{a}{2\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{\varphi(\xi_1,t/a)}{\xi_1^2 - t^2}d\xi_1 dt$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{\varphi(\xi_1,t/a)}{\xi_1^2 - t^2}d\xi_1 dt = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{\varphi(\xi_1,0)}{\xi_1^2 - t^2}d\xi_1 dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi_1,0)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\xi_1^2 - t^2}\right)d\xi_1 \tag{2}$$

Вычислим внутренний интеграл. Подынтегральная функция четная

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\xi_1^2 - t^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\xi_1^2 - t^2} = \frac{1}{\xi_1}\left(\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\xi_1 - t} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\xi_1 + t}\right) =$$
$$= \frac{1}{\xi_1}\ln\frac{\xi_1 + t}{\xi_1 - t}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{\xi_1}\ln(-1) = \frac{\pi i}{\xi_1}.$$

Учитывая это в (2), получаем

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{2\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{\varphi(\xi_1,\xi_2)}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2}d\xi_1 d\xi_2 = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{\varphi(\xi_1,0)}{\xi_1}d\xi_1 \tag{3}$$

Соотношение (3) для обобщенных функций означает, что

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{2\pi^2}\frac{1}{\xi_1^2-a^2\xi_2^2}=\frac{i}{2\pi}\mathrm{P}\frac{1}{\xi_1}\otimes\delta(\xi_2), \tag{4}$$

где обозначение функционала P заимствовано из книг В. С. Владимирова [1,2], а $\otimes$ обозначает прямое произведение обобщенных функций.

Итак, обобщенная функция (4) – это то, что в образах Фурье соответствует полубесконечной трещине (разумеется, с добавкой $\frac{1}{2}\delta(\xi)$). Чтобы проконтролировать себя, найдем другую асимптотику функции (1) – при $a\to 0$. То, что получится, должно соответствовать полуплоскости $y>0$ (вместо ”точки” – ”верхняя полуокружность”); этот результат есть с чем сравнивать.

Нетрудно сообразить, что положив $b=1/2$, вопрос можно свести к следующему счету:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi^2}\int_{R^2}\frac{\varphi(t/b,\xi_2)dt\,d\xi_2}{t^2-\xi_2^2}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(0,\xi_2)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-\xi_2^2}\right)d\xi_2$$

или, в обобщенных функциях,

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a}{2\pi^2}\frac{1}{\xi_1^2-a^2\xi_2^2}=\frac{1}{2\pi i}\delta(\xi_1)\otimes\mathrm{P}\frac{1}{\xi_2}, \tag{5}$$

что полностью совпадает с тем, что было известно для полуплоскости (см. [3,4]).

Теперь о трещине в многомерном пространстве. Нас интересует асимптотика функции (см. [11])

$$\frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\frac{1}{\left(|\xi'|^2-a^2(\xi_m+i0)^2\right)^{m/2}}, \tag{6}$$

где $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1})$, Γ – гамма-функция Эйлера.

Трещина – это когда $a\to+\infty$, полупространство $x_m>0$, когда $a\to 0$.

Трещина:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1},\xi_m)d\xi}{\left(|\xi'|^2-a^2\xi_m^2\right)^{m/2}}=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi(\xi',t/a)d\xi'\,dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^{m/2}}=$$

$$=\frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^{m-1}}\varphi(\xi',0)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^{m/2}}\right)d\xi'$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^{m/2}}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^{m/2}}.$$

Здесь следует различать случаи четных и нечетных m. Начнем с нечетной серии $m=3,5,7,...$. С помощью соответствующей формулы из [15] можно написать

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^{m/2}} = \frac{1}{|\xi'|^{m-1}} \sum_{л=0}^{(m-3)/2} \frac{C^k_{(m-3)/2} t^{2k+1}}{(2k+1)\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^{\frac{2k+1}{2}}} \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{i|\xi'|^{m-1}} \sum_{k=0}^{(m-3)/2} \frac{1}{2k+1} C^k_{(m-3)/2}.$$

Для удобства обозначим

$$\sum_{k=0}^{(m-3)/2} \frac{1}{2k+1} C^k_{(m-3)/2} \overset{\text{об.}}{\equiv} b_m \quad (m=3,5,7,...),$$

($b_3 = 1, b_5 = 4/3, b_7 = 6/5$ и т. д.).

Таким образом, для нечетных номеров m

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}} \int\limits_{R^m} \frac{\varphi(\xi',\xi_m)d\xi}{\left(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2\right)^{m/2}} = \frac{\Gamma(m/2)b_m}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}} \int\limits_{R^m} \frac{\varphi(\xi',0)}{|\xi'|^{-1}} d\xi' \tag{7}$$

В обобщенных функциях соотношение (7) будет выглядеть так:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}} \frac{1}{\left(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2\right)^{m/2}} =$$

$$= \frac{\Gamma(m/2)b_m}{i\pi^{\frac{m+2}{2}}} \mathrm{P}\frac{1}{|\xi'|^{m-1}} \otimes \delta(\xi_m), m=3,5,7,.... \tag{8}$$

Смысл обозначения $\mathrm{P}\dfrac{1}{|\xi'|^{m-1}}$ я разберу позднее.

Четная серия $m=2,4,6,...$. Воспользовавшись формулой [15] и обозначив $m/2=k$, имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^k} = \frac{t}{2(k-1)|\xi'|^2\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^{k-1}} \Bigg|_0^{+\infty} +$$

$$\frac{2(k-1)-1}{2(k-1)|\xi'|^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^{k-1}}, \quad k=2,3,...,$$

или, произведя вычисления,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^k} = \frac{2k-3}{2(k-1)|\xi'|^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(|\xi'|^2 - t^2\right)^{k-1}}, \quad k=2,3,...,$$

получим рекуррентную формулу.

В плоском случае ($m=2$) согласно уже произведенным вычислениям имеем:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{|\xi'|^2-t^2}=\frac{\pi i}{2|\xi'|}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^2}=\frac{2\cdot 2-3}{2(2-1)|\xi'|^3}\cdot\frac{\pi i}{2}=\frac{\pi}{4|\xi'|^3};$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^3}=\frac{(2\cdot 3-3)(2\cdot 2-3)}{2(3-1)2(2-1)}\cdot\frac{1}{|\xi'|^5}\cdot\frac{\pi i}{2};$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^4}=\frac{(2\cdot 4-3)(2\cdot 3-3)(2\cdot 2-3)}{2(4-1)2(3-1)2(2-1)}\cdot\frac{1}{|\xi'|^7}\cdot\frac{\pi i}{2},$$

что, в конце концов, позволяет написать общую формулу

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^k}=\frac{\pi i}{2^k|\xi'|^{2k-1}}\prod_{l=2}^{k}\frac{2l-3}{l-1},\tag{9}$$

или, вспомнив, что $k=m/2$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(|\xi'|^2-t^2\right)^{m/2}}=\frac{\pi i}{2^{m/2}|\xi'|^{m-1}}\prod_{l=2}^{m/2}\frac{2l-3}{l-1}.\tag{10}$$

Обозначим для краткости и удобства

$$\prod_{l=2}^{m/2}\frac{2l-3}{l-1}=c_m\quad(m=4,6,8,...),$$

($c_4=1, c_6=3/2, c_8=5/2,$ и т. д.) и запишем для четных номеров

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi(\xi',\xi_m)d\xi}{\left(|\xi'|^2-a^2\xi_m^2\right)^{m/2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)c_m i}{(2\pi)^{m/2}}\int_{R^{m-1}}\frac{\varphi(\xi',0)d\xi'}{|\xi'|^{m-1}}\tag{11}$$

или в обобщенных функциях

$$\lim_{a\to\infty}\frac{a\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\frac{1}{\left(|\xi'|^2-a^2\xi_m^2\right)^{m/2}}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)c_m i}{(2\pi)^{m/2}}\mathrm{P}\frac{1}{|\xi'|^{m-1}}\otimes\delta(\xi_m),\quad m=4,6,8,\ldots.\tag{12}$$

Наконец, желательно проконтролировать себя и просчитать обобщенную функцию для полупространства $x_m>0\,(a\to 0)$

$$\lim_{a\to 0}\frac{a\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi(\xi',\xi_m)d\xi'd\xi_m}{\left(|\xi'|^2-a^2\xi_m^2\right)^{m/2}}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)b^{m-1}}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\left(|b\xi'|^2-\xi_m^2\right)^{m/2}}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi\left(\frac{t_1}{b},...,\frac{t_{m-1}}{b},\xi_m\right)dt_1...dt_{m-1}d\xi_m}{\left(|t'|^2-\xi_m^2\right)^{m/2}}=$$

($t'=(t_1,...,t_{m-1})$)

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(0,...,0,\xi_m)\left(\int_{R^{m-1}}\frac{dt'}{\left(|t'|^2-\xi_m^2\right)^{m/2}}\right)d\xi_m .$$

Вычислим внутренний интеграл, переходя к сферическим координатам:

$$\int_{R^{m-1}}\frac{dt'}{\left(|t'|^2-\xi_m^2\right)^{m/2}}=\omega_{m-1}\int_0^{+\infty}\frac{r^{m-2}}{\left(r^2-\xi_m^2\right)^{m/2}}dr,$$

где ω_{m-1} – площадь поверхности единичной сферы в $(m-1)$- мерном пространстве; $\omega_{m-1}=\dfrac{2\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}$ (см., например, [16]).

С помощью соответствующей формулы из [15] получим ($m\geq 4$)

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{m-2}\,d\,r}{\left(r^2-\xi_m^2\right)^{m/2}}=\frac{1}{i^m}\int_0^{+\infty}\frac{r^{m-2}\,d\,r}{\left(\xi_m^2-r^2\right)^{m/2}}=$$

$$=i^{-m}\left(\left.\frac{r^{m-3}}{(m-2)\left(\xi_m^2-r^2\right)^{\frac{m-2}{3}}}\right|_0^{+\infty}-\frac{m-3}{m-2}\int_0^{+\infty}\frac{r^{m-4}\,d\,r}{\left(\xi_m^2-r^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}-\right)=$$

$$=i^{-m}\frac{m-3}{m-2}\int_0^{+\infty}\frac{r^{m-4}\,d\,r}{\left(\xi_m^2-r^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Таким образом, если обозначить

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{m-2}\,d\,r}{\left(\xi_m^2-r^2\right)^{\frac{m-2}{2}}}\overset{\text{об.}}{\equiv}\mathrm{I}_m(\xi_m),$$

то

$$\mathrm{I}_m(\xi_m)=-\frac{m-3}{m-2}\mathrm{I}_{m-2}(\xi_m). \tag{13}$$

Вычисляем: $m=3$

$$\int_0^{+\infty} \frac{r\,d\,r}{\left(r^2-c^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\left(r^2-c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_0^{+\infty} = \left(-c^2\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{ic} = -\frac{i}{c};\ \mathrm{I}_3(c) = \frac{1}{c}$$

(на самом деле c – это $c+i0!$); $m=4$; применяем рекуррентную формулу (13),

$$\mathrm{I}_4(c) = \int_0^{+\infty} \frac{r^2 d\,r}{\left(r^2-c^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{I}_2(c) = -\frac{\pi i}{2c},$$

(напомним, $\mathrm{I}_2(c) = \int_0^{+\infty} \frac{r^2 d\,r}{c^2-r^2} = \frac{\pi i}{2c}$); далее по рекуррентной формуле (13)

$$\mathrm{I}_5(c) = -\frac{2}{3}\mathrm{I}_3(c) = -\frac{2}{3}\frac{1}{c};$$

$$\mathrm{I}_6(c) = -\frac{3}{4}\mathrm{I}_4(c) = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{\pi i}{4c}\right) = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)i\frac{\pi}{c};$$

$$\mathrm{I}_7(c) = -\frac{4}{5}\mathrm{I}_5(c) = -\frac{4}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{c};$$

$$\mathrm{I}_8(c) = -\frac{5}{6}\mathrm{I}_6(c) = -\frac{5}{6}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{\pi i}{4c}\right).$$

Следовательно, можно написать $(m \geq 5)$

$$\begin{cases} \mathrm{I}_m(c) = \left(-\dfrac{m-3}{m-2}\right)\left(-\dfrac{m-5}{m-4}\right)\ldots\left(-\dfrac{2}{3}\right)\dfrac{1}{c}, & m-\text{нечетное}, \\ \mathrm{I}_m(c) = \left(-\dfrac{m-3}{m-2}\right)\left(-\dfrac{m-5}{m-4}\right)\ldots\left(-\dfrac{3}{4}\right)\left(-\dfrac{\pi i}{4c}\right), & m-\text{четное}. \end{cases}$$

С учетом всего этого

$$\lim_{a\to 0}\frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\int_{R^m}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\left(|\xi'|^2-a^2\xi_m^2\right)^{m/2}} = \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}}\frac{\omega_{m-1}}{t^m}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(0,\ldots,0,\xi_m)\mathrm{I}_m(\xi_m)d\xi_m$$

$$= \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{3/2}\,i^m\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}d_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(0,\ldots,0,\xi_m)\,d\,\xi_m}{\xi_m}, \tag{14}$$

где

$$d_m = \begin{cases} -1, & m = 3, \\ -\dfrac{\pi i}{2}, & m = 4, \\ \left(-\dfrac{m-3}{m-2}\right)\left(-\dfrac{m-5}{m-4}\right)\ldots\left(-\dfrac{2}{3}\right), & m \geq 5 \text{ нечетное}, \\ \left(-\dfrac{m-3}{m-2}\right)\left(-\dfrac{m-5}{m-4}\right)\ldots\left(-\dfrac{3}{4}\right)\left(-\dfrac{\pi i}{4}\right), & m > 5 \text{ четное}. \end{cases}$$

Формула (14) в обобщенных функциях будет выглядеть так:

$$\lim_{a \to 0} \frac{a\,\Gamma(m/2)}{2\pi^{\frac{m+2}{2}}} \frac{1}{\left(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2\right)^{m/2}} = \frac{\Gamma(m/2)\,d_m}{\pi^{3/2}\, i^m\, \Gamma\left(\dfrac{m-1}{2}\right)} \delta(\xi') \otimes \mathrm{P}\frac{1}{\xi_m}. \tag{15}$$

Отсюда уже видно, что (15), с точностью до постоянной, дает известную формулу для полупространства. Следовательно,

$$\frac{\Gamma(m/2)\,d_m}{\pi^{3/2}\, i^m\, \Gamma\left(\dfrac{m-1}{2}\right)} = \frac{1}{2\pi i}. \tag{16}$$

Соотношение (16) легко проверяется для $m = 3, 4, 5, 6$.

3. Здесь речь пойдет об асимптотиках, связанных с многогранным углом, точнее, с его простейшим вариантом – пирамидой.

Область, связанная с такой пирамидой, определяется неравенством $x_3 > a|x_1| + b|x_2|$, содержащим два параметра a, b, которые отвечают за длину соответствующих осей. Если эти параметры устремлять к 0 или к ∞, можно получить другие типы особенностей.

Обобщенная функция, соответствующая такой пирамиде, – это [11]

$$K_{a,b}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)}.$$

1) $a = \mathrm{const}, b \to \infty$ (интуитивно ясно, что должна получиться особенность типа бесконечной трещины в отличие от полубесконечной из п. 2):

$$\lim_{b\to\infty} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\left(\xi_1 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$a_1 = 1/a$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{4ia_1 b}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\left(a\xi_1 - \xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$ab\xi_1 = t$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{4i}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi\left(\dfrac{t}{a_1 b}, \xi_2, \xi_3\right) dt d\xi_2 d\xi_3}{\left(\dfrac{t^2}{b^2} - \xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{4ib^2}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi\left(\dfrac{t}{a_1 b}, \xi_2, \xi_3\right) dt d\xi_2 d\xi_3}{\left(t^2 - b^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{4i}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\tau\, \varphi\left(\dfrac{t}{a_1 b}, \xi_2, \dfrac{\tau}{b}\right) dt d\xi_2 d\tau}{\left(t^2 - \tau^2\right)\left(\xi_2^2 - \tau^2\right)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, \xi_2, 0) \left(\int_{R^2} \frac{\tau\, dt d\tau}{\left(t^2 - \tau^2\right)\left(\xi_2^2 - \tau^2\right)} \right) d\xi_2 .$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_{R^2} \frac{\tau\, dt d\tau}{\left(t^2 - \tau^2\right)\left(\xi_2^2 - \tau^2\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \tau^2} \right) \frac{\tau\, d\tau}{\xi_2^2 - \tau^2} .$$

Выражение в скобках справа вычислялось в п. 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,t}{t^2 - \tau^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{d\,t}{t^2 - \tau^2} = -\frac{\pi\, i}{\tau} .$$

Тогда

$$\int_{R^2} \frac{\tau\, dt d\tau}{\left(t^2 - \tau^2\right)\left(\xi_2^2 - \tau^2\right)} = -\pi\, i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\xi_2^2 - \tau^2} = -\pi\, i \cdot \frac{\pi\, i}{\xi_2} = \frac{\pi^2}{\xi_2} ,$$

и, таким образом,

$$\lim_{b\to\infty} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{x} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0, \xi_2, 0)}{\xi_2} d\xi_2 .$$

В обобщенных функциях

$$\lim_{b\to\infty} \frac{4iab\xi_3}{(2\pi)^3 \left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \delta(\xi_1) \otimes \mathrm{P}\frac{1}{\xi_2} \otimes \delta(\xi_3) .$$

2) $a \to \infty, b = \mathrm{const}$.

Проведя аналогичные вычисления, можно получить формулу (напишу ее только в обобщенных функциях):

$$\lim_{a\to\infty} \frac{4iab\xi_3}{(2\pi)^3 \left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \mathrm{P}\frac{1}{\xi_1} \otimes \delta(\xi_2) \otimes \delta(\xi_3) .$$

3) $a = \mathrm{cost}, b = 0$ (двугранный угол).

$$\lim_{a\to\infty} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\left(\xi_1 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{4iac}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(c^2\xi_2^2 - \xi_3^2\right)} =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{4ia}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{\xi_3 \varphi\left(\xi_1, \dfrac{t_1}{c}, \xi_3\right) d\xi_1 dt d\xi_3}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(t^2 - \xi_3^2\right)} =$$

$$= \frac{4ia}{(2\pi)^3} \int_{R^2} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, 0, \xi_3)}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t^2 - \xi_3^2\right)} \right) d\xi_1 d\xi_3 =$$

$$= \frac{4ia}{(2\pi)^3} \int_{R^2} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, 0, \xi_3)}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)} \left(\frac{-\pi i}{\xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_3 =$$

$$= \frac{a}{2\pi^2} \int_{R^2} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, 0, \xi_3)}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)} d\xi_1 d\xi_3,$$

т.е.

$$\lim_{b\to\infty} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} = \delta(\xi_2) \otimes K_a(\xi_1, \xi_3).$$

(см. формулу (1)).

Аналогично, ($a \to 0, b = \mathrm{const}$),

$$\lim_{a\to 0} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} = \delta(\xi_1) \otimes K_b(\xi_2, \xi_3).$$

Кроме этого, с учетом проделанных вычислений и результатов п. 2 следует

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{\left(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2\right)\left(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \delta(\xi') \otimes \mathrm{P}\frac{1}{\xi_3}, \qquad \xi' = (\xi_1, \xi_2).$$

Последний результат соответствует полупространству $x_3 > 0$.

В заключение хотелось бы отметить следующее. Из приведенных вычислений и полученного вида обобщенных функций с учетом более ранних результатов автора [5, 23] вполне реально просматривается возможность построения теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений и краевых задач в многомерных областях с «тонкими» особенностями, причем и в этом случае концепция волновой факторизации будет играть ключевую роль. Некоторые варианты использования такого подхода приведены в [24, 25, 31,32]. Анонс результатов этой работы есть в [29, 30].

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физики. М.: Наука, 1979.
3. Вишик М. И., Эскин Г. И. Уравнения в свертках в ограниченной области // УМН.1965. Т. 20, N 3. С. 89-152.
4. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
5. Vasil'ev V. B. Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Dordrecht-Boston-London, Kluwer Academic Publishers, 2000.
6. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
7. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
8. Mikhlin S. G., Prössdorf S. Singular integral operators. Berlin, Akademie-Verlag, 1986.
9. Мальгранж Б. Сингулярные интегральные операторы и единственность задачи Коши // Математика. 1962. Т. 6, N 5. С. 87-129.
10. Calderon A. P., Zygmund A. Singular integral operators and differential equations // Amer J. Math. 1957. V. 79, N 4. P. 901-921.
11. Васильев В. Б. Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях // Труды Моск. матем. о-ва. 1998. Т. 59. С. 73-105.
12. Бохнер С., Мартин У. Т. Функции многих комплексных переменных. М.: ИИЛ, 1951.
13. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
14. Касумов Н. М. Теория Кальдерона-Зигмунда для ядер с неточечными множествами особенностей // Матем. сборник. 1992. Т. 183, N 9. С. 89-104.
15. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
16. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1968.
17. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1-4. Мир, 1986-1988.
18. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1,2 М.: Мир, 1984.
19. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
20. Ремпель Ш., Шульце Б.-В. Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.
21. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudodifferential operators. Acta Math. 1971. V. 126, N 1-2. P. 11-51.

22. Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности. Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 346-382.
23. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М: УРСС, КомКнига, 2006. 136 с.
24. Васильев В.Б. Псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация и краевые задачи. Вестник Брянского гос. ун-та. 2005. №4. С. 268-273.
25. Васильев В.Б., Щербенко И.В. Сингулярные интегральные уравнения, связанные с многомерными сложными особенностями. Вестник ХНУ. Сер. Матем. моделирование. Информ. технологии. Авт. сист. управл. 2005. Вып.4, №661. С. 61-68.
26. Васильев В.Б., Кузьмичев А.Ю. Параболические псевдодифференциальные уравнения. Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №3. С. 423-424.
27. Васильев В.Б., Кулешов Ю.В. Эллиптические задачи и разностные уравнения. Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №5. С. 701-702.
28. Васильев В.Б. Параболические уравнения и краевые задачи. Труды международной научной конференции "Современные методы физико-математических наук", Орел, 9-14 октября 2006 г. Т.1. С. 17-21.
29. Vasilyev V.B. Some distributions related to boundary value problems in domains with thin non-smooth singularities. Abstracts of SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations. Boston, Massachusetts, USA, July 10-12, 2006. P. 257.
30. Vasilyev V.B. Asymptotics arising in the theory of pseudo differential equations in non-smooth domains. Proc. Lyapunov Memorial Conference, June 24-30, 2007. Kharkiv, Ukraine. P. 170.
31. Vasilyev V.B. Systems of multidimensional singular integral equations in non-smooth domains: a Noetherian property and index. Abstracts of 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Zurich, Switzerland, 16-20 July 2007. P. 360.
32. Васильев В. Б. Волновая факторизация и почти тригонометрические ряды. Труды IV Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 29-31 мая, 2007. Ч.3. С. 50-53.