

Численное исследование рассеяния скалярных волн плоским экраном на границе слоя в полупространстве над жесткой плоскостью

А. В. Гахов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The problem of the diffraction's process was formulated in the article of the previous issue of the Bulletin. The mathematical model constructed in the form of a hypersingular integral equation. In the paper, we investigate the 'additional' term of the equation's kernel that exerts influence on features of the numerical calculations on a computer. On this basis, the application has been developed and carried out calculation experiments to investigate diffractive properties of some flatness structures in processes of reflection and scattering acoustic waves.

1. Актуальность данной задачи

Математические модели дифракции на экранах в свободном пространстве (как для скалярных, акустических, так и для электромагнитных волн) построенные в форме гиперсингулярных интегральных уравнений (ГСИУ) [1-4], могут быть использованы в вычислительных экспериментах на основе дискретизации методами дискретных особенностей (МДО) [2]. Подобный аппарат позволяет также проводить численное исследование дифракции на телах, в материале которых волны должны распространяться с другой скоростью, чем в пространстве (см. [5], где исследуется дифракция на диэлектриках)

Задачи, в которых жесткий отражающий экран расположен на поверхности слоя из иного материала, существенно сложнее и их решение даже при дополнительных ограничениях весьма актуально. В последнее время, такие задачи получили свое решение [3-4,6] для ряда случаев, в которых применим метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов [1].

В частности, ГСИУ и соответствующая алгоритмическая схема МДО применимы к задачам рассеяния скалярных волн на конечных экранах, которые лежат на поверхности слоя, который, в свою очередь, с противоположной стороны экранирован жесткой плоскостью [8,9]. Однако, попытка реализовать теоретическое решение [8] в форме программного обеспечения (ПО) вычислительных экспериментов, как это было сделано для аналогичных задач [6,7] в более простых двумерных или трехмерных случаях, сталкивается с дополнительными трудностями численной реализации, особенно при некоторых специальных соотношениях для параметров задачи. В настоящей работе эти проблемы решаются за счет дополнительного разложения ядра ГСИУ на составляющие, что позволило выделить часть, «ответственную» за указанные трудности, и в частности, указать объективно трудный для реализации случай. Для «общего» случая обоснована и осуществлена реализация расчетов на

компьютере, которая по порядку затрат времени на численное решение не уступает решению рассмотренных ранее задач на аналогичной аппаратно-программной базе.

2. Описание используемой математической модели физического процесса

Рассматривается трехмерная задача рассеяния плоской скалярной волны на плоском экране, расположенном над жесткой плоскостью (рис. 1)

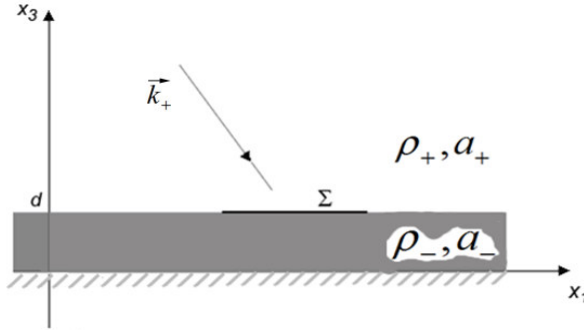


Рис.1 Падение плоской волны на экран. Физические среды над и под плоскостью экрана $x_3 = d$ различны, область под экраном ограничена снизу жесткой плоскостью ($x_3 = 0$)

В полупространстве над плоскостью экрана

$$D_+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3 \mid x_3 > d\} \quad (1)$$

плотность среды принимается постоянной и равной $\rho_+ > 0$, а в области под экраном

$$D_- = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3 \mid 0 < x_3 < d\} \quad (2)$$

плотность принимается также постоянной и равной другой величине $\rho_- > 0$.

Падающая волна и рассеянное поле считаются имеющими постоянную частоту $\omega > 0$, так что волновые числа имеют вид:

$$k_+ = \frac{\omega}{a_+} > 0 \quad x \in D_+, \quad (3)$$

$$k_- = \frac{\omega}{a_-} > 0 \quad x \in D_-, \quad (4)$$

где a_+ и a_- - постоянные скорости распространения волны соответственно в полупространстве D_+ и слое D_- .

В плоскости раздела

$$D_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3 \mid x_3 = d\} \quad (5)$$

рассматривается бесконечно тонкий экран $\Sigma \subset D_0$, жестко отражающий падающую волну. В плоскости D_0 экран Σ представляет собой область (не

обязательно односвязную), границу которой для простоты принимаем в данном изложении составленной из отрезков, параллельных осям координат OX_1 и OX_2 , как на рис. 2.

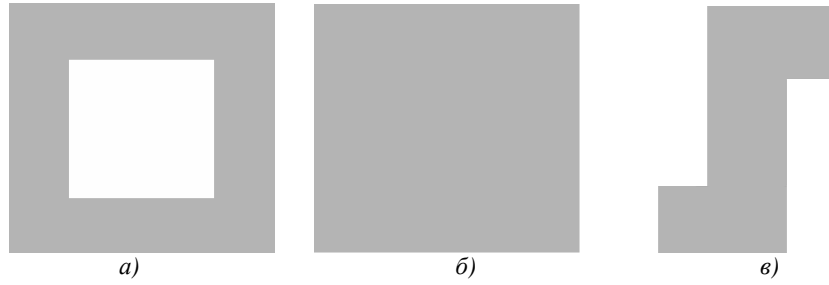


Рис. 2. Примеры простейших форм рассматриваемых экранов : «рамка» (а), «квадрат» (б), «зигзаг» (в)

D_- ограничивает снизу плоскость

$$D_* = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3 \mid x_3 = 0\}, \quad (6)$$

которая рассматривается в качестве жесткой стенки, так что

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x_3} \right|_{x \in D_*} = 0 \quad (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2, x_3 = 0) \quad (7)$$

где $v(x) = v(x_1, x_2, x_3)$ - есть фактически наблюдаемое в присутствии рассеивающего экрана Σ поле.

Его мы ищем в виде [13]:

$$v(x) = p(x) + w(x), \quad (x \in \mathfrak{R}^3) \quad (8)$$

где $p(x)$ - плоская волна, $w(x)$ - т.н. рассеянное (экраном) поле, которое достаточно построить, чтобы решить задачу дифракции волны $p(x)$ на экране Σ .

Задача определения рассеянного поле w в дифференциальной форме содержит следующие условия [9]:

1. Выполнение уравнений Гельмгольца вне экрана:

$$\Delta w + k_+^2 w = 0 \quad (x \in D_+) \quad \text{и} \quad \Delta w + k_-^2 w = 0 \quad (x \in D_-) \quad (9)$$

2. Краевые условия для w , определяемые необходимым поведением поля:

а) жесткое рассеяние на экране Σ , в смысле (7)

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d-0} = \left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=d-0} \quad (\tilde{x} \in \Sigma) \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d+0} = \left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=d+0}$$

И, как следствие,

$$\frac{1}{\rho_-} \left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d-0} = \frac{1}{\rho_+} \left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=d+0} \quad (\tilde{x} \in \Sigma) \quad (11)$$

б) непрерывность поля v при переходе через плоскость экрана:

$$w|_{x_3=d-0} = w|_{x_3=d+0} \quad (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2 \setminus \bar{\Sigma}) \quad (12)$$

в) жесткое рассеивание на стенке D_*

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=+0} = 0 \quad (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2) \quad (13)$$

3. Условие на бесконечности для выделения уходящей сферической волны:

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ik_+ w(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (14)$$

(равномерно по направлениям $\frac{x}{|x|}$)

4. Условие конечности энергии поля в окрестности $U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)$ края экрана $\partial\Sigma$

$$\int_{U_{\partial\Sigma}(\varepsilon)} (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (15)$$

Дискретизация задачи для численного решения использует интегральную форму её постановки, полученную в [9] Для этого нужно положить:

$$w(x) = \begin{cases} F^{-1}\{c_+(\lambda)e^{-(x_3-d)\gamma_+}\}(\tilde{x}) & , \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, x_3 > d \\ F^{-1}\{c_-^1(\lambda)e^{-x_3\gamma_-} + c_-^2(\lambda)e^{x_3\gamma_-}\}(\tilde{x}), \tilde{x} = (x_1, x_2) \notin \Sigma, 0 < x_3 < d \end{cases} \quad (16)$$

где $c_+(\lambda), c_-^1(\lambda), c_-^2(\lambda) \in \wp$ - неизвестные функции, из которых независимой, как показано в [9], является только одна. Поэтому будем искать, например, функцию $c_+(\lambda)$. Пусть

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{R}^2, \quad |\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

$$\gamma_{\pm}(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k_{\pm}^2}.$$

Действие оператора F^{-1} (обратного оператора Фурье) будем рассматривать на пространстве обобщенных функций:

$$(F^{-1}\{g\}(\tilde{x}), \psi(\tilde{x})) = \left(g(\tilde{x}), \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{R}^2} \psi(\tilde{x}) e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\tilde{x} \right), \quad (g(\lambda) \in \wp', \psi(\tilde{x}) \in \wp) \quad (17)$$

Для новой неизвестной функции (через которую согласно [9] целесообразно выразить $c_+(\lambda)$)

$$u(\tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}\left\{c_+(\lambda) \left(1 + \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{\gamma_+}{\gamma_-} \frac{e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}}\right)\right\}, \quad (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2) \quad (18)$$

имеет место псевдодифференциальное уравнение [9]:

$$u * K = f(\tilde{x}), \quad (\tilde{x} \in \mathfrak{R}^2) \quad (19)$$

$$\text{где } K = F^{-1} \left\{ \frac{-\gamma_+}{\rho_+ \cdot \left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_+ \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)} \right\} \quad (20)$$

3. Исследование ядра ГСИУ

Преобразуем, введенный в [8], символ ядра псевдодифференциального уравнения (19) следующим образом:

$$\begin{aligned} F\{K\}(\lambda) &= \frac{-\gamma_+}{\rho_+ \cdot \left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_+ \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}} \right)} = \\ &= \frac{-\gamma_+ \cdot \gamma_-}{\left(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+ + \rho_- \gamma_+ \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1} \right)} = \frac{-\gamma_+ \cdot \gamma_-}{(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+)} + \\ &+ \frac{\rho_- \cdot \gamma_+^2 \cdot \gamma_- \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1}}{(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+) \cdot \left(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+ + \rho_- \gamma_+ \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1} \right)} \end{aligned}$$

Первое слагаемое также как в [6] представляется в виде:

$$\frac{-\gamma_+ \cdot \gamma_-}{(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+)} = -\frac{1}{\rho_+ + \rho_-} \cdot \gamma_+ - \frac{\rho_- \cdot (k_+^2 - k_-^2)}{2(\rho_+ + \rho_-)^2} \cdot \frac{1}{\gamma_+} + S(|\lambda|)$$

где $S(\tau) = O(\tau^{-3})$, $\tau \rightarrow \infty$

Рассмотрим поведение на бесконечности второго слагаемого:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_- \cdot \gamma_+^2 \cdot \gamma_- \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1}}{(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+) \cdot \left(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+ + \rho_- \gamma_+ \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1} \right)} \sim \\ &\sim \frac{\rho_- \cdot |\lambda| \cdot \frac{2}{(e^{2|\lambda|^d} - 1)}}{(\rho_+ + \rho_-) \left(\rho_+ + \rho_- \cdot \left(1 + \frac{2}{e^{2|\lambda|^d} - 1} \right) \right)} = o(|\lambda|^n), \forall n \end{aligned}$$

$$F\{K\}(\lambda) = -\frac{1}{\rho_+ + \rho_-} \cdot \gamma_+ - \frac{\rho_- \cdot (k_+^2 - k_-^2)}{2(\rho_+ + \rho_-)^2} \cdot \frac{1}{\gamma_+} + S(|\lambda|) + L(|\lambda|) \quad (21)$$

где $S(\tau) + L(\tau) = O(\tau^{-3})$, $\tau \rightarrow \infty$. Но у $L(\tau)$ не исключается наличие особенностей при $|\lambda| < \infty$, что вызывает необходимость более подробного изучения этого слагаемого в разделе 4.

Как установлено в [8] с использованием результатов [6] ядру уравнения (19) можно придать форму:

$$K(\tilde{x}) = \frac{1}{\rho_+ + \rho_-} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \frac{e^{ik_+|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} + \frac{k_+^2 \rho_+ + k_-^2 \bar{\rho}}{2(\rho_+ + \rho_-)^2} \cdot \frac{e^{ik_+|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} + H(|\tilde{x}|), \quad (22)$$

где $H(\xi) \in C^{2-\varepsilon}(\mathfrak{R}^2)$, $(\forall \varepsilon > 0)$,

т.е. было показано, что это ядро – сумма гиперсингулярной, сингулярной и гладкой части.

4. Исследование добавленных интегралов, возникающих в алгоритме численного решения

Для численного решения ГСИУ (19) со смешанным ядром построим модификацию известного обобщенного метода замкнутых дискретных вихревых рамок [2]. Согласно данному методу приближение к решению (18) уравнения (19) в классе кусочно-постоянных функций:

$$u(\tilde{x}) = \sum_{\mu \in M} u_\mu \cdot I_\mu(\tilde{x}), \quad (23)$$

где $|M| < \infty$,

$$\Sigma = \bigcup_{\mu \in M} \Sigma_\mu, \quad \Sigma_\mu \cap \Sigma_\eta = \emptyset \quad (\mu \neq \eta),$$

сеть $\{\Sigma_\mu\}_{\mu \in M}$ образуется путем равномерного разбиения Σ на квадраты,

$u_\mu = u(\tilde{x}_\mu)$, где \tilde{x}_μ - центр квадрата Σ_μ (точка коллокации),

$$I_\mu(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_\mu \\ 0, & \tilde{x} \notin \bar{\Sigma}_\mu \end{cases} \text{ - индикаторная функция квадрата } \Sigma_\mu.$$

Подставляя вид (29) в уравнение (19) и, используя вид ядра (22), получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$u(\tilde{x}) * K(\tilde{x}) = \sum_{\mu \in M} u_\mu \cdot \text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_\mu} K(|\tilde{x} - \tilde{x}_\nu|) d\tilde{x} = f(\tilde{x}_\nu), \quad \forall \nu \in M: \tilde{x}_\nu \in \Sigma_\nu \quad (24)$$

Как видим, в полученной СЛАУ число неизвестных и уравнений в точности совпадают. В [2] показано, что дискретизация МДО определенных ГСИУ, аналогичных нашему (но для однородного пространства), приводит к совместности СЛАУ. Как показывают многочисленные вычислительные эксперименты, в т.ч. настоящей работы, это свойство дискретизации МДО сохраняется для широкого класса задач.

$$\begin{aligned} \text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_\mu} K(\tilde{x}) d\tilde{x} = \text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_\mu} & - \frac{1}{\rho_+ + \rho_-} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \frac{e^{ik_+|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} - \\ & - \frac{k_+^2 \rho_+ + k_-^2 \bar{\rho}}{2(\rho_+ + \rho_-)^2} \cdot \frac{e^{ik_+|\tilde{x}|}}{|\tilde{x}|} + H(|\tilde{x}|) d\tilde{x} \end{aligned} \quad (25)$$

где $H(\xi) = P(\xi) + F^{-1}\{L\}(\xi)$.

Особенностью данной работы является необходимость анализа быстрого вычисления на ПК следующего интеграла

$$F^{-1}\{L\}(\tilde{x} - \tilde{x}_v) = \int_0^{\infty} D(|\tilde{x} - \tilde{x}_v|, |\lambda|) d(|\lambda|), \quad (26)$$

$$\text{где } D(r, |\lambda|) \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda| \cdot j_0(r|\lambda|) \frac{\rho_- \cdot \gamma_+^2 \cdot \gamma_- \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1}}{(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+) \left(\rho_+ \gamma_- + \rho_- \gamma_+ + \rho_- \gamma_+ \cdot \frac{2}{e^{2d\gamma_-} - 1} \right)} \quad (27)$$

Интеграл (26) является частью ядра (25), в ядрах ГСИУ работ [6,10] такой или аналогичный интеграл не встречался.

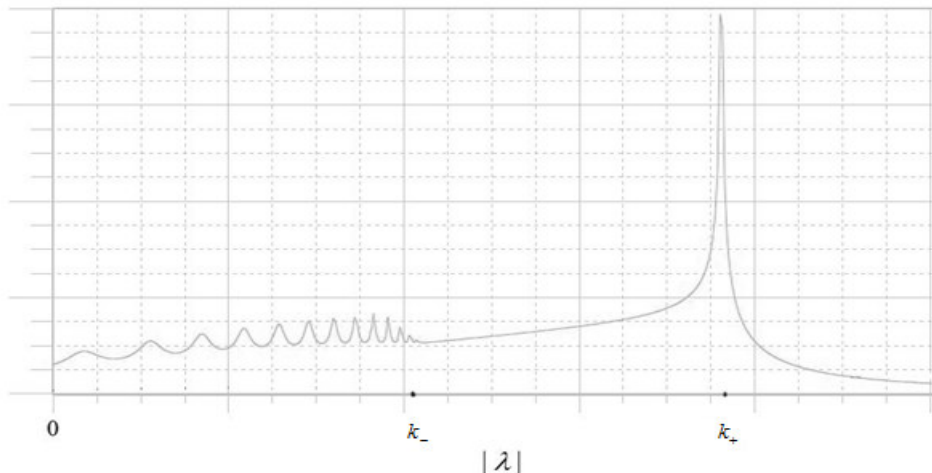


Рис. 2. Пример поведения функции $\text{abs}(D(r, |\lambda|))$ при $k_- = 2\pi, k_+ = 3\pi$

Вычисление интеграла (26) удобно разбить и проводить по отдельности на интервалах, для которых подынтегральное выражение имеет характерное поведение (см. рис. 2)

$$I = \int_0^{\infty} D(|\tilde{x} - \tilde{x}_v|, |\lambda|) d(|\lambda|) = \int_0^{\min(k_-, k_+)} D(|\tilde{x} - \tilde{x}_v|, |\lambda|) d(|\lambda|) + \int_{\min(k_-, k_+)}^{\max(k_-, k_+)} D(|\tilde{x} - \tilde{x}_v|, |\lambda|) d(|\lambda|) + \int_{\max(k_-, k_+)}^{\infty} D(|\tilde{x} - \tilde{x}_v|, |\lambda|) d(|\lambda|) \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3 \quad (28)$$

Вспомогательные вычислительные эксперименты показали, что для вычисления осциллирующего интеграла I_1 целесообразно применить стандартную процедуру IMSL DQDAG с IRULE=6 (30-61 узел). Обращение к данной процедуре для осциллирующих интегралов было подсказано опытом работы [12].

Для вычисления интеграла I_3 можно воспользоваться той же процедурой DQDAG, если использовать режим IRULE=2 (10-21 узел). При этом функция $D(r, |\lambda|)$ затухает и экспериментально подобрано такое соотношение между

$\max(k_-, k_+)$ и границей усеченного интервала, при котором ошибка усечения не превосходит по порядку погрешности вычисления интеграла по усеченному интервалу.

Представляется естественным, что в приложениях плоская волна падает в пространстве из бесконечности на экран, лежащий на слое из более плотного материала (чем в пространстве). Обычно это случай $k_- < k_+$.

Несложно проверить, что особенность у функции $D(r, |\lambda|)$ если и есть, то лежит на $[\min(k_-, k_+), \max(k_-, k_+)]$, но при $k_- < k_+$ подынтегральная функция не имеет особенностей и интеграл I_2 может быть вычислен с использованием простейших квадратур.

Поэтому программная реализация решения задачи дифракции осуществлена для этого практически важного случая $k_- < k_+$. Отдельные эксперименты для альтернативного случая ($k_- > k_+$) демонстрируют затягивание и неустойчивость вычислений (не смотря на попытки использования при вычислении I_2 специальных подпрограмм стандартных библиотек)

После получения решения СЛАУ, для вычисления рассеянного поля (например, в области $x_3 > d$) необходимо воспользоваться формулой восстановления рассеянного поля в заданной точке:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} u(y) \int_{\mathfrak{R}^2} \frac{e^{-\gamma_+ x_3}}{\left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_+ \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}}\right)} e^{-i(\tilde{x} - \tilde{y}, \lambda)} d\lambda dy \quad (29)$$

Для непосредственного вычисления воспользуемся полученным при численном решении СЛАУ (23) кусочно-постоянным приближением решения (18) уравнения (19):

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu \in M} u_{\mu} \cdot \int_{\mathfrak{R}^2} \frac{e^{-\gamma_+ x_3}}{\left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_+ \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}}\right)} e^{-i(\tilde{x} - \tilde{x}_{\mu}, \lambda)} d\lambda \quad (30)$$

Преобразование Фурье в (30) имеет ядро, зависящее только от $|\lambda| = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, что позволяет представить его в виде интеграла Фурье-Бесселя:

$$\int_0^{\infty} G(\tilde{x} - \tilde{x}_{\mu}, |\lambda|) d(|\lambda|), \quad (31)$$

где $G(r, |\lambda|) \stackrel{def}{=} |\lambda| \cdot j_0(r|\lambda|) \frac{e^{-\gamma_+ x_3}}{\left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+ e^{d\gamma_-} + e^{-d\gamma_-}}{\rho_+ \gamma_- e^{d\gamma_-} - e^{-d\gamma_-}}\right)}$

Как видно, интеграл (31) имеет подобную структуру с интегралом (27). Поэтому необходимо учесть опыт исследования структуры $D(r, |\lambda|)$ и интеграла (26).

При этом функция $G(r, |\lambda|)$ затухает быстрее, чем $D(r, |\lambda|)$, и экспериментально подобрано такое соотношение между $\max(k_-, k_+)$ и границей усеченного интервала, при котором ошибка усечения не превосходит по порядку погрешности вычисления интеграла по усеченному интервалу.

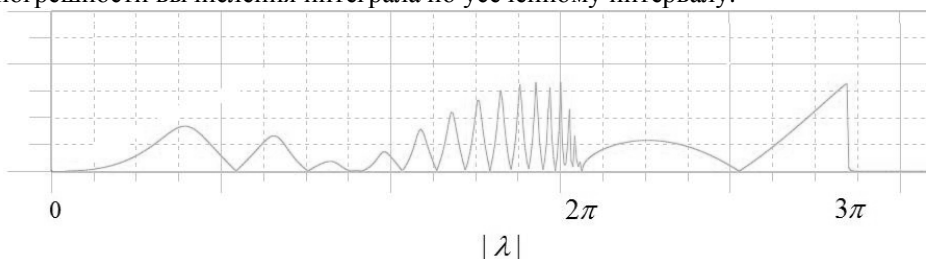


Рис. 3. Пример поведения функции $\text{abs } G(r, |\lambda|)$ при $k_- = 2\pi, k_+ = 3\pi$

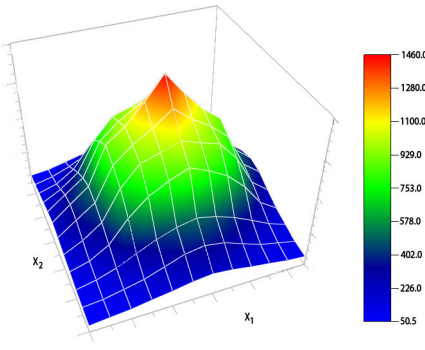
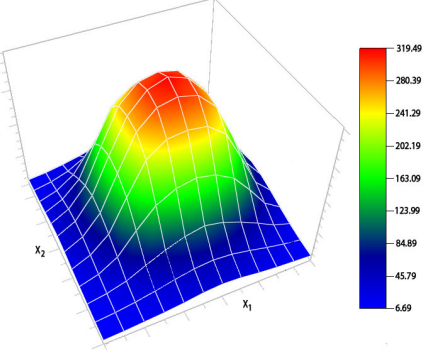
5. Результаты численных экспериментов

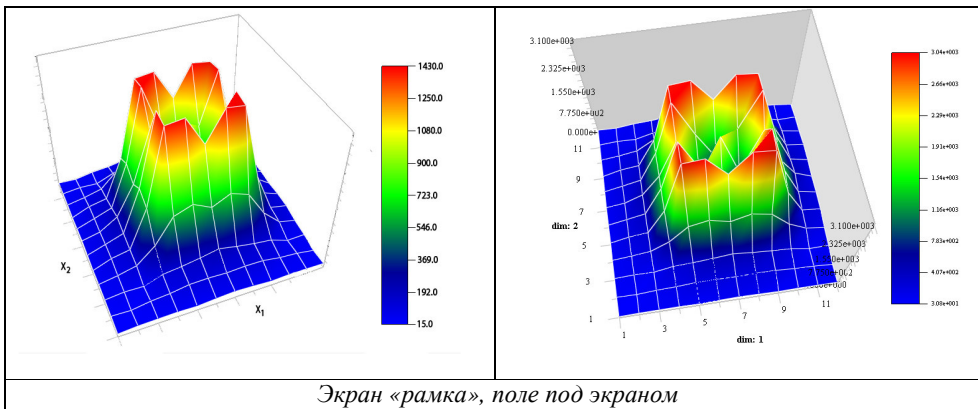
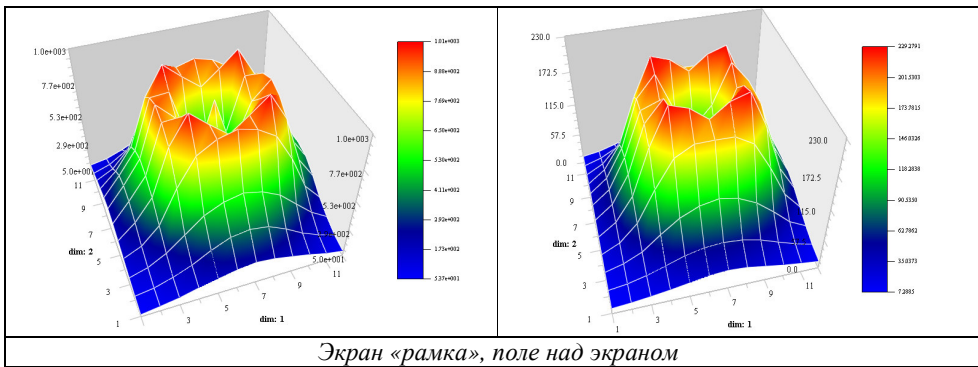
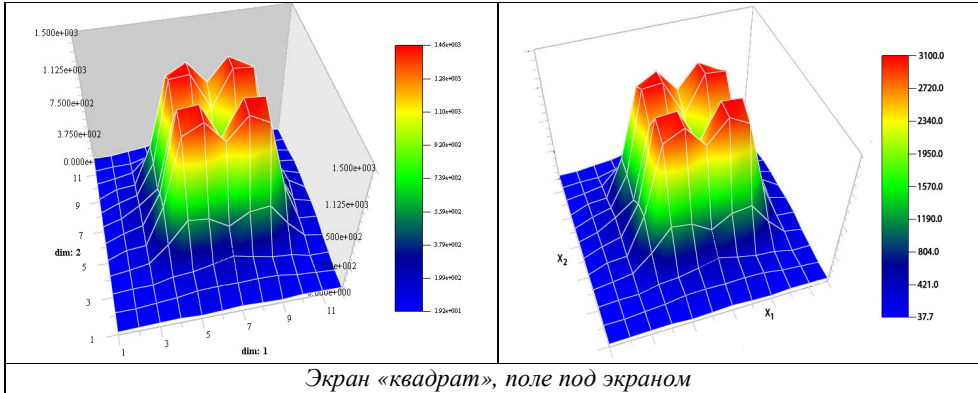
В качестве иллюстративного примера мы рассмотрели задачу рассеяния акустических волн (9)-(15) для сред со следующими характеристиками:

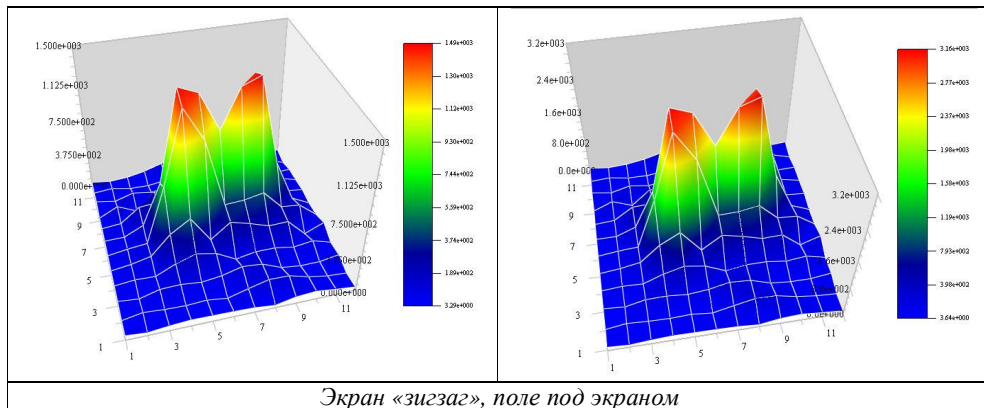
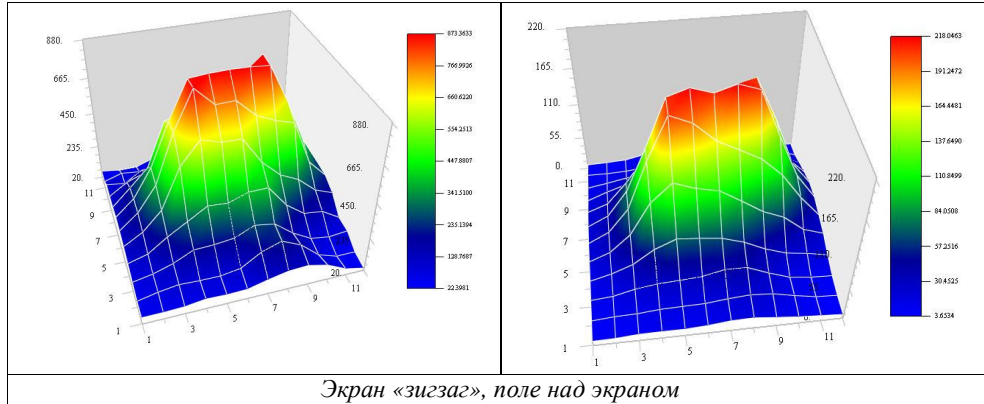
Вода $\rho_+ = 1000 \text{ кг/м}^3, k_+ = 4.14\pi \text{ 1/м} (v = 3\text{кГц})$

Жидкий грунт $\rho_- = 2200 \text{ кг/м}^3, k_- = 4\pi \text{ 1/м} (v = 3\text{кГц}) \quad d = 0.01\text{м}$

Табл.1 Сравнение модуля рассеянного поля над и под экраном

Случай отсутствия жесткой плоскости	Случай присутствия жесткой плоскости (слой конечной толщины d)
	
<p>Экран «квадрат», поле над экраном</p>	





Для анализа зависимости времени вычислений от степени различия плотностей сред над и под экраном были проведены эксперименты для $d=0.27$, разбиение экрана 30×30 и разных параметров сред.

Табл.2 Исходные данные и продолжительность вычислительных экспериментов (на примере области «рамка» с разбиением 30×30 , см. рис. 2)

<i>Среды над и под экраном</i>	<i>Волновые числа</i>	<i>Общее время счета</i>
<i>Вода $\rho_+ = 1000 \text{ кг/м}^3$</i>	$k_+ = 4.14\pi \text{ 1/м}, k_- = 4\pi \text{ 1/м}$	<i>699.7 сек</i>
<i>Грунт $\rho_- = 2200 \text{ кг/м}^3$</i>	$k_+ = 1.38\pi \text{ 1/м}, k_- = 1.33\pi \text{ 1/м}$	<i>594.0 сек</i>
<i>Воздух $\rho_+ = 1,29 \text{ кг/м}^3$</i>	$k_+ = 4.14\pi \text{ 1/м}, k_- = 4\pi \text{ 1/м}$	<i>875.3 сек</i>
<i>Вода $\rho_- = 1000 \text{ кг/м}^3$</i>	$k_+ = 5.88\pi \text{ 1/м}, k_- = 1.35\pi \text{ 1/м}$	<i>1112.0 сек</i>
<i>Воздух $\rho_+ = 1,29 \text{ кг/м}^3$</i>	$k_+ = 4.14\pi \text{ 1/м}, k_- = 4\pi \text{ 1/м}$	<i>899.4 сек</i>
<i>Кирпич $\rho_- = 1700 \text{ кг/м}^3$</i>	$k_+ = 5.88\pi \text{ 1/м}, k_- = 0.575\pi \text{ 1/м}$	<i>1097.5 сек</i>

Вычисления проводились на ПК со следующими характеристиками: Intel Core 2 Duo 1.7GHz, ОЗУ 1Гб (холостая загрузка 49%), OS Windows Vista HE.

Как и следовало ожидать, существенный вклад в скорость вычисления делают параметры скорости распространения волн (волновые числа, частота), а не физические свойства сред. Это объясняется тем, что от волновых чисел зависит осцилляционный характер ядер вычисляемых интегралов.

Проведенные эксперименты позволили заметить и, по мере накопления их результатов, обосновать, что решающее влияние на продолжительность вычислений оказывает максимальное из двух волновых чисел задачи. Это не удивительно, поскольку такое число определяет степень осцилляционности данных, а значит, и степень дискретизации (размерность дискретной модели). Однако численные эксперименты устанавливают неочевидный факт: при неизменном максимуме волнового числа, максимальные практически возможные вариации прочих данных приводят к мало существенным (не свыше 2%) вариациям времени счёта.

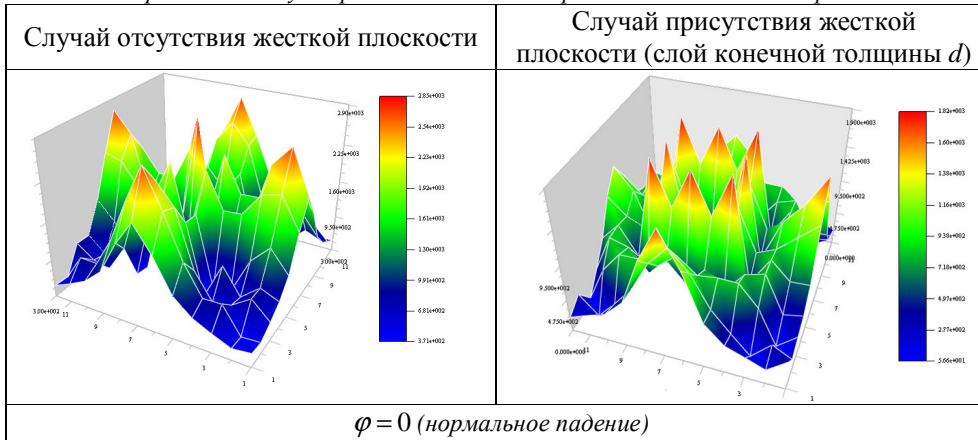
Так же как и в предыдущих работах [10-12] для более простых задач, здесь мы также провели серию вычислительных экспериментов по исследованию поведения рассеянного поля при изменении угла падения плоской волны.

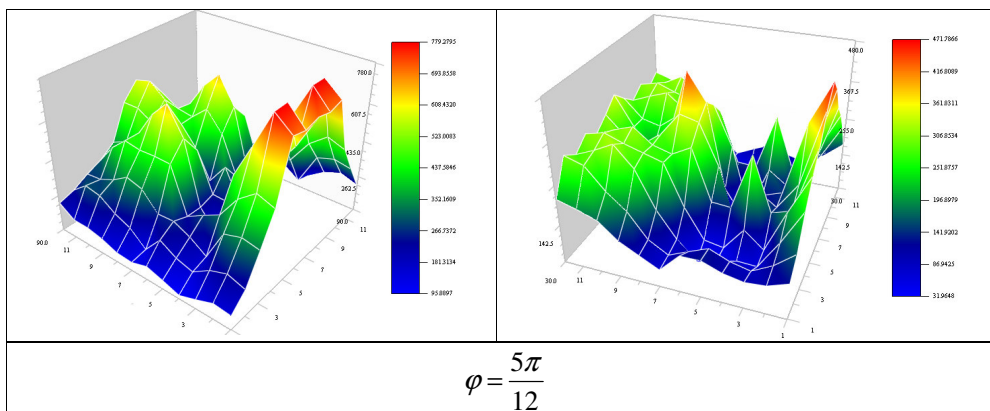
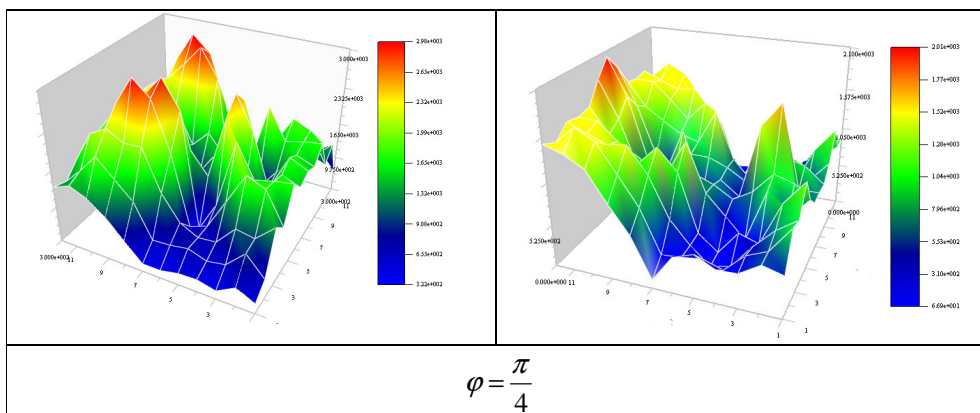
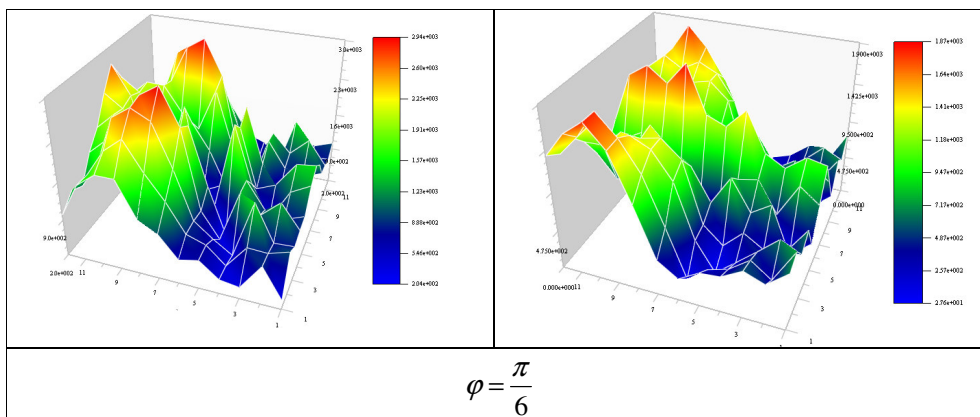
Пример сравнения рассеянного поля с задачей в полупространстве (случай отсутствия жесткой плоскости) для экрана типа «рамка», расположенного в плоскости раздела сред со следующими характеристиками:

$$\text{Воздух } \rho_- = 1,29 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k_+ = 5.88\pi \frac{1}{\text{м}} (\nu = 1\text{кГц})$$

$$\text{Вода } \rho_+ = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k_- = 1.35\pi \frac{1}{\text{м}} (\nu = 1\text{кГц}) \quad d=0.27\text{м}$$

Табл.3 Сравнение модулей рассеянного поля на расстоянии 0.3м над экраном





Как и следовало ожидать, в данной задаче сохранилось влияние угла падения плоской волны, как на визуальные, так и на числовые характеристики рассеянного поля, например, на его максимальное значение в рассмотренных сечениях. Так же следует отметить, что в сравнении со случаем отсутствия жесткой плоскости наблюдается одинаковые тенденции изменения максимума

рассматриваемых значений при изменении угла. В частности, наименьшее значение максимума наблюдается при падении под острым углом к экрану (в нашем случае это φ , близкие к $\frac{\pi}{2}$)

6. Заключительные выводы

В гладкой части ядра построенного ранее ГСИУ рассматриваемой задачи дифракции выделена часть, ответственная за дополнительные трудности при численной реализации МДО, по сравнению с задачами в близкой постановке [6]. На основе этого разработано эффективное ПО на базе Compaq Visual Fortran 6 и библиотек IMSL и БЧА НИВЦ МГУ. Проведены вычислительные эксперименты сравнительного характера по численному изучению поля в ближней зоне при варьировании форм экрана и углов падения плоской волны.

В недавних работах по близкой тематике [3,7] авторы демонстрируют численные решения задач примерами диаграмм направленности поля. Это особенно важно в случае рассеяния электромагнитных волн. Но, как видно из классических монографий по акустике [14,15], в этой прикладной области принято делать акцент на возможности расчёта поля давлений в ближней зоне. Следуя этой традиции, в данной статье результаты расчётов демонстрируются путём визуализации рассчитанного рассеянного поля в ближней зоне экрана со стороны свободного пространства.

Позитивные результаты данной работы позволяют также рассчитывать на решение задачи рассеяния электромагнитных волн на экранах, которые находятся на поверхности экранированного диэлектрического слоя в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003. – Харьков-Херсон, 2003. – С.53-58
2. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения, М: Янус-К, 2001. – 508с.
3. Антоненко А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 9-14.
4. Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2006. – № 733. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 6. – С. 58-75

5. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Об использовании гиперсингулярных интегральных уравнений для численного анализа задач дифракции электромагнитных волн на магнитодиэлектрических телах // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). - Харьков-Херсон, 2005. - С 114-117.
6. Гахов А. В., Мищенко В.О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник ХНТУ.-2006.-№2(25)С.135-140
7. Антоненко А. В. Математическая модель на базе МДО полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2005. – № 703. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 5. – С. 25-35.
8. Гахов А. В. Математическое моделирование рассеяния акустических волн на жестком экране в слоисто-неоднородном полупространстве // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", №775, вып. 7, - 2007г. - С.92-98
9. Гахов А. В. Математическая модель рассеяния акустических волн экраном, расположенном на слое конечной толщины // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007). Харьков-Херсон. 2007. – С.93-96
10. Гахов А. В. Численные эксперименты на базе программной реализации 3-мерной акустической задачи дифракции на плоском экране // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). Харьков-Херсон. 2005. – С.93-96
11. Гахов А. В., Мищенко В. О. Вычислительный эксперимент на базе численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для прямоугольной области // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Мат. модел. Информ. Техн. Автом. системы управления": вып. 1, - 2003г. - С.84-91
12. Гахов А. В. Эффективность вычислений МДО в скалярной задаче 3-мерной дифракции на экране, лежащем в плоскости раздела сред // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Мат. модел. Информ. Техн. Автом. системы управления", № 733, 2006, - С.79-93
13. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, М.: Мир, 1987 – 311с.
14. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. — Л.: Судостроение, 1989. — 304 с:
15. Л.М. Бреховских Волны в слоистых средах, М., Наука, 1973, - 343с.