Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.6
№ 780, 2007, с.105-120

Применение метода граничных элементов для решения задач фильтрации с подвижной границей

Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, И. И. Ткаченко
Днепропетровский национальный университет, Украина

Boundary element method is applied to moving boundary filtration flow problems. The porous media is assumed as saturated and constant enough small porosity and the mathematical model of filtration flow is formulated as Laplace equation for pressure. Different boundary element algorithms are discussed. The obtained numerical results confirm high effectiveness of the used approach.

1. Введение

Математическое и численное моделирование физико-химических процессов, имеющих место как в производственных технологиях, так и в окружающей природной среде, за последнее время стали неотъемлемой и, зачастую, доминирующей частью проектно-конструкторских работ и естественнонаучных исследований. Особенно важна роль указанных методов исследования для анализа процессов, экспериментальное исследование которых по тем или иным причинам затруднено, а иногда и вообще невозможно. К таким процессам очевидно можно отнести движение грунтовых вод и другие фильтрационные течения в пористых средах.

Исключительное разнообразие видов пористых сред привело к тому, что существует несколько математических моделей, описывающих фильтрационные течения в таких средах, самой простой и распространенной из них является модель фильтрационного течения в насыщенной пористой среде с относительно малой пористостью [1 - 4], которая сводит описание течения к решению краевых задач для уравнения Лапласа. Но даже в рамках этой наиболее простой математической модели решение задачи о фильтрационных течениях с подвижными или неизвестными границами представляет значительные трудности из-за специфической формы нелинейности, связанной с подвижностью или неизвестностью границы. Подобные задачи требуют создания специальных методов численного анализа, чему и посвящена данная работа. Хотелось бы отметить определенную аналогию между рассматриваемым классом задач и течениями идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, что позволяет надеяться на успешное применение в задачах фильтрации с неизвестными или подвижными границами численных подходов, разработанных для указанных классов задач гидромеханики идеальной жидкости [5 - 7].

2. Актуальность работы, ее связь с важнейшими научно-техническими задачами

Фильтрационные течения жидкости с неизвестными или подвижными границами в пористых средах достаточно широко распространены, и, более того, они играют существенную роль как в ряде технологических процессов, так и в природных явлениях. В качестве примеров таких течений назвать интрузию соленых или загрязненных вод в водоносные горизонты (проблема имеет ключевое значение для исследования подземных вод в быту и народном хозяйстве), ряд технологий добычи нефти и газа (проблема добычи нефти и газа из обедненных горизонтов особо актуальна в связи с энергетическим кризисом), технологии сушки вытеснением (эффективная и иногда единственно возможная технология обработки пористых сред), процессы пропитки (технология создания эффективной защиты изделий из пористых материалов). Можно привести еще множество подобных примеров, но даже приведенных достаточно, чтобы показать важность рассматриваемого класса процессов для науки и техники и, следовательно, актуальность разработки методов их численного исследования. Ограниченные рамки настоящей работы не дают возможности привести подробный анализ перечисленных выше задач, но авторы надеются сделать это в последующих работах.

С другой стороны, решение задач, поставленных в данной работе требует развития вычислительной теории потенциала и метода граничных элементов в частности, это, безусловно, актуально для развития теории и методологии численного моделирования.

3. Обзор публикаций по тематике и анализ современного состояния вопроса

С момента возникновения в 50-е годы XIX теории фильтрации этому разделу гидромеханики было посвящено громадное количество научных работ. Как отмечалось выше, большое разнообразие пористых сред, обладающих совершенно разными свойствами, а также разнообразие жидкостей, в них фильтрующихся, привели к появлению большого числа разнообразных моделей фильтрации жидкостей и газов. В зависимости от сложности моделей разнится и степень их проработки, однако простейшая из моделей – фильтрация ньютоновской жидкости в однородной, изотропной, насыщенной пористой среде – в настоящее время разработана хорошо [1, 2]. Благодаря очевидной аналогии между фильтрационным течением и потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости весь аппарат теории потенциальных течений был с успехом применен к указанному классу задач теории фильтрации. Хотелось бы отметить, что, если теория потенциальных течений в современной гидродинамике рассматривается как достаточно грубое приближение, то модель фильтрации в насыщенной пористой среде оказывается достаточно обоснованной с физической точки зрения для очень широкого спектра фильтрационных течений.

Среди численных методов, используемых для расчета потенциальных течений идеальной жидкости, высокой эффективностью и точностью отличаются численные методы теории потенциала (метод граничных элементов, метод дискретных особенностей), а поскольку методы решения задач гидродинамики идеальной жидкости полностью переносятся на фильтрационные течения в насыщенной среде, следует ожидать, что и для соответствующих течений в пористой среде указанные методы окажутся наиболее действенными. Метод граничных элементов [8, 9] возник как естественный результат применения к граничным интегральным уравнениям теории потенциала достаточно широкого спектра численных алгоритмов: метода коллокации, метода механических квадратур, метода Бубнова-Галеркина, метода конечных элементов. Таким образом, метод граничных элементов изначально обладал достаточно широкой алгоритмической базой, поэтому он без труда был применен к широкому спектру различных классов задач вычислительной механики и тепломассообмена. Вопрос применения метода граничных элементов к задачам фильтрации нашел отражение как в обзорных монографиях [8, 9], так и в специализированных монографиях [10]. Метод дискретных особенностей, конечно, можно трактовать как предельно упрощенный вариант метода граничных элементов, но специфика данного подхода столь велика, что, как правило, он рассматривается как отдельный численный метод. Уступая методу граничных элементов в точности и часто в эффективности, метод дискретных особенностей намного проще метода граничных элементов и, соответственно, быстрее считает. В работах [11 - 12] метод дискретных особенностей был успешно применен к задачам фильтрации.

Задачи с неизвестными или подвижными границами всегда относились к наиболее сложным задачам, как гидромеханики идеальной жидкости, так и теории фильтрации. Данный класс задач содержит специфическую нелинейность, связанную с изменением формы границы области решения в процессе решения. Соответственно, и объединение этих физически различных задач в один класс сделано на основе математической аналогии, основанной на общем виде нелинейности. В ряде работ [10] метод граничных элементов успешно применяется к этому классу задач, характеризуемому линейным дифференциальным оператором, линейными граничными условиями и изменением формы границы. Именно эволюция формы границы вызывает наибольшие вычислительные трудности при решении данного класса задач. В работах Лью и Лиджета [10] для определения формы границы на следующем шаге по времени использовался итерационный процесс. Однако, несмотря на меры, принятые для ускорения сходимости итерационного процесса, общая погрешность расчета оказывалась достаточно большой, поскольку использовались большие шаги по времени и грубые граничноэлементные сетки. Прогресс вычислительной техники и совершенствование алгоритмов метода граничных элементов в настоящее время дают возможность значительно уменьшить шаг по времени и сгустить граничноэлементную сетку, то есть, речь идет о новом алгоритмичном решении, которое основано на явных (эйлеровых) схемах интегрирования по времени без дополнительного итерационного уточнения. Качественный анализ подобных алгоритмов показывает, что они могут оказаться проще, точнее и, в конечном итоге, эффективнее существующих.

4. Цель работы

Основываясь на вышесказанном, цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом: разработка эффективных алгоритмов метода граничных элементов для расчета фильтрационных течений в однородных, изотропных, насыщенных пористых средах с подвижными внешними границами или границами раздела двух несмешивающихся жидкостей. Ввиду наличия упоминавшейся выше аналогии между методами решения задач теории фильтрации с подвижными и неизвестными границами, разработанная алгоритмическая база окажется полезной и для задач с неизвестной границей, хотя их непосредственное рассмотрение не входит в цели настоящей работы. Развитые в настоящей работе алгоритмы и отчасти, программное обеспечение могут быть использованы в практике расчетов в гидрогеологии и нефтедобыче.

5. Постановка задачи

Ограничим рассмотрение плоскими фильтрационными течениями. Классическая теория фильтрации предполагает несколько формулировок плоских задач: при помощи потенциала скоростей, при помощи функции тока и в терминах давления [1]. Выберем последнюю формулировку как наиболее универсальную, тогда для i-ой жидкости, занимающей область D_i с границей Γ_i, в которую входят как составная часть граница с j-ой областью (D_j) – Γ_{ij}, можно записать следующую постановку задачи

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_i}{\partial y^2} = 0\,, \tag{5.1}$$

граничные условия на внешних неподвижных границах заданы в одном из следующих видов

$$p_i\big|_{\Gamma_{ia}} = p_{ia}\,, \tag{5.2}$$

$$k_i \left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Gamma_{ia}} = q_{ia}\,, \tag{5.3}$$

$$k_i \left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Gamma_{ia}} = \beta_i \left(p_i\big|_{\Gamma_{ia}} - p_{ia} \right). \tag{5.4}$$

Внутренние границы между областями D_i и D_j, обозначенные Γ_{ij}, предположим подвижными, на них заданы следующие условия сопряжения

$$p_i\big|_{\Gamma_{ij}} = p_j\big|_{\Gamma_{ij}}\,, \tag{5.5}$$

$$k_i \left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Gamma_{ij}} = k_i \left.\frac{\partial p_j}{\partial n}\right|_{\Gamma_{ij}} = \sigma \frac{\partial n_{ij}}{\partial \tau}, \qquad (5.6)$$

где k_i – коэффициент фильтрации i-ой жидкости, p_{ia} – давление в окружающей среде, q_{ia} – поток жидкости из окружающей среды (в окружающую среду), β_i – коэффициент, отражающий наличие на поверхности гидроизолирующих покрытий, σ – пористость среды, n_{ij} – координата границы раздела, отсчитываемая по нормали к последней.

В уравнении (5.6) помимо сопряжения фильтрационных потоков включен еще и закон движения границы. При формулировки условия (5.5) предполагалось, что высоты капиллярного поднятия у рассматриваемых жидкостей различаются мало, то есть, разрыв давления на границе раздела отсутствует.

Случай подвижной внешней границы, соответствующий задачам пропитки, обводнения пористой среды или сушки вытеснением, назван задачей Н.Н. Веригина. В этом случае постановка должна быть дополнена законом движения внешней границы

$$k_i \left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Gamma_{ia}} = \sigma_i \frac{\partial n_i}{\partial \tau}, \qquad (5.7)$$

и граничное условие (5.2) может быть обобщено в следующем виде

$$p_i\big|_{\Gamma_{ia}} = p_{ia} - \Delta p_i, \qquad (5.8)$$

где Δp_i – определяется капиллярными эффектами. Поскольку задача Н.Н. Веригина предполагает, что внешняя граница является границей „жидкость – газ”, величины Δp_i могут быть достаточно существенными.

6. Алгоритм решения

Применим к сформулированной задаче метод граничных элементов, для чего заменим уравнение (5.1) его интегральным аналогом [8, 9, 13]

$$\begin{aligned}
&\chi_i(x_0, y_0)\, p_i(x_0, y_0) = \\
&= \int_{\Gamma_i} \varphi(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial p_i(x, y)}{\partial n} dS(x, y) - , \\
&- \int_{\Gamma_i} p_i(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y, x_0, y_0)}{\partial n} dS(x, y)
\end{aligned} \qquad (6.1)$$

где χ_i является функцией расположения точки наблюдения (точки коллокации) (x_0, y_0) и определяется как

$$\chi_i(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, (x_0, y_0) \in D_i, \\ 1/2, (x_0, y_0) \in \Gamma_i, \\ 0, (x_0, y_0) \notin D_i, (x_0, y_0) \notin \Gamma_i, \end{cases} \tag{6.2}$$

функция φ – фундаментальное решение уравнения Лапласа (вообще говоря, это может быть и соответствующая функция Грина, но далее будут использованы только фундаментальные решения), которое для плоского случая имеет вид:

$$\varphi(x, y, x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} . \tag{6.3}$$

Разобьем совокупность границ $\bigcup_E \Gamma_i$ на части, называемые граничными элементами, таким образом, чтобы на каждом граничном элементе заданы граничные условия одного типа. Переходя во внутреннюю систему координат кривой Γ_i (например, отсчитываемой по длине кривой), получим

$$\begin{aligned} &\chi_i(x_0, y_0)\, p_i(x_0, y_0) = \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int_{S_k}^{S_{k+1}} \varphi(S, x_0, y_0) \frac{\partial p_i(S)}{\partial n} h_k(S)\, dS - \\ &- \sum_{k=1}^{N} \int_{S_k}^{S_{k+1}} p_i(S) \frac{\partial \varphi(S, x_0, y_0)}{\partial n} h_k(S)\, dS \end{aligned} \tag{6.4}$$

где S_k, S_{k+1} – координаты концов k-го элемента во внутренней системе координат, h_k – функция формы k-го элемента. Аппроксимируем функции h_k функциями h_k^* таким образом, чтобы, с одной стороны, величина $\left\| h_k(S) - h_k^*(S) \right\|$ была достаточно мала, а с другой стороны обеспечивалось бы достаточно удобное вычисление интегралов, особенно в сингулярном случае. С той же целью аппроксимируем известные значения p_i и $\frac{\partial p_i}{\partial n}$ на границе Γ_i (вообще говоря, можно этого и не делать, особенно если используется регулярный вариант метода граничных элементов, что подробно рассмотрено в [14, 15], однако такая аппроксимация значительно улучшает алгоритмичность метода, хотя и вносит дополнительную погрешность). Аппроксимируем неизвестные значения p_i и $\frac{\partial p_i}{\partial n}$ на границе Γ_i (как правило, для аппроксимации неизвестных используется та же самая схема и те же аппроксимирующие функции, что и для известных функций, хотя, в принципе, последние можно аппроксимировать и с большей точностью).

$$p_i\Big|_{\Gamma_i} = \psi_{1i}\left(S, \alpha_{1i}, ..., \alpha_{mi}\right), \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial n}\Big|_{\Gamma_i} = \psi_{2i}\left(S, \beta_{1i}, ..., \beta_{mi}\right), \tag{6.6}$$

где ψ_{1i}, ψ_{2i} – аппроксимирующие функции, $\alpha_1, ..., \alpha_m$, $\beta_i, ..., \beta_m$ – наборы произволов, подлежащие определению в результате аппроксимации известных функций, либо в результате численного решения задачи. Подлежащие определению произволы могут входить в аппроксимирующие функции линейным или нелинейным образом, однако, поскольку в рассматриваемом случае дифференциальный оператор в (5.1) и граничные условия на Γ_i линейны, то нет никакой необходимости использовать нелинейную аппроксимацию.

Есть два основных способа перехода от уравнений (6.4) к системе линейных алгебраических уравнений – метод Галеркина и метод коллокации, но поскольку метод Галеркина налагает дополнительные ограничения на аппроксимирующие функции, в данной работе использован метод коллокации. Согласно методу коллокации выберем на каждом граничном элементе M точек наблюдения (вообще говоря, их можно выбрать вблизи элемента, внутри или вне области и получить в результате регулярный метод граничных элементов, но здесь и далее в настоящей работе ограничимся рассмотрением только сингулярного случая). Подставив сделанные аппроксимации в (6.4) и записав соотношения (6.4) для всего множества точек наблюдения, получим:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} p_{ilm} = \sum_{k=1}^{N} \int_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} \varphi\left(S, x_{lm}, y_{lm}\right) \psi_{2k}\left(S, \beta_{1k}, ..., \beta_{mk}\right) h_k^*\left(S\right) dS - \\ -\sum_{k=1}^{N} \int_{S_k^*}^{S_{k+1}^*} \psi_{1k}\left(S, \alpha_{1k}, ..., \alpha_{mk}\right) \frac{\partial \varphi\left(S, x_{lm}, y_{lm}\right)}{\partial n} h_k^*\left(S\right) dS\end{gathered}. \tag{6.7}$$

Дополнив линейные алгебраические уравнения (6.7) соотношениями (5.5) и (5.6) (первое равенство) получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений.

В зависимости от предполагаемого метода решения системы (6.6) возникает проблема нумерации неизвестных и порядка уравнений в системе. Дело в том, что по величине определителя матрицы системы линейных алгебраических уравнений в методе граничных элементов близки к вырожденным, но в то же время они хорошо обусловлены благодаря явно выраженному диагональному преобладанию и имеют относительно небольшие числа обусловленности. При решении задач в сопряженных областях, к которым относятся и рассматриваемые в данной работе задачи о совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, диагональное преобладание, вообще говоря, нарушается, в результате чего погрешность расчета существенно возрастает. Но, другой стороны, если условия (5.5), (5.6) (первое равенство) для каждой сложной границы выделить в отдельный блок, то матрица будет состоять из прямоугольных блоков, расположенных вдоль главной диагонали, что при применении специальных алгоритмов дает возможность сократить время расчета. Если же специальные алгоритмы не используются, то условия (5.5) и (5.6) (первое равенство) целесообразно разделить, и, например, первое из них использовать для i-го контура ($i < j$), а второе для $j-$го. Такой подход позволяет в определенной мере сохранить диагональное преобладание в матрице системы. Наконец, укажем еще один подход, позволяющий улучшить свойство матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Возьмем точку $(x_0, y_0) \in D_i$ и запишем для нее интегральные соотношения (6.1) для i-ой и j-ой подобласти ($i \neq j$)

$$\begin{aligned} p_l(x_0,y_0) = \int_{\Gamma_i} \varphi(x,y,x_0,y_0) \frac{\partial p_i(x,y)}{\partial n} dS(x,y) - \\ - \int_{\Gamma_i} p_i(x,y) \frac{\partial \varphi(x,y,x_0,y_0)}{\partial n} dS(x,y) \end{aligned}, \qquad (6.8)$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Gamma_i} \varphi(x,y,x_0,y_0) \frac{\partial p_j(x,y)}{\partial n} dS(x,y) - \\ - \int_{\Gamma_i} p_j(x,y) \frac{\partial \varphi(x,y,x_0,y_0)}{\partial n} dS(x,y) \end{aligned}. \qquad (6.9)$$

Просуммируем соотношения (6.9) и (6.8), учтем при этом, что интегрирование по общей границе Γ_{ij} в (6.8) и (6.9) производится в разных направлениях, при суммировании переменим направление интегрирования в одном из интегралов, в результате чего изменится направление нормали, тогда

$$\begin{aligned} p_i(x_0,y_0) = \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{ij}} \varphi \frac{\partial p_i}{\partial n} dS - \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{ij}} p_i \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \\ + \int_{\Gamma_j \setminus \Gamma_{ij}} \varphi \frac{\partial p_j}{\partial n} dS - \int_{\Gamma_j \setminus \Gamma_{ij}} p_j \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \int_{\Gamma_{ij}} \left(\frac{\partial p_i}{\partial n} - \frac{\partial p_j}{\partial n} \right) \varphi \, dS \end{aligned}, \qquad (6.10)$$

где в качестве новой неизвестной на границе раздела является разница нормальных производных давления на этой границе. В силу соотношений (5.6) (первое равенство) указанная разница нормальных производных давления на границе легко выражается через нормальную производную давления по любую из сторон границы и, следовательно, в силу соотношений (5.6) (второе равенство) через скорость движения границы раздела несмешивающихся фильтрующихся жидкостей. Последний вывод имеет принципиальное значение, поскольку утверждает, что поле давления явным образом зависит не только от формы, но и от скорости движения границы. Если алгоритм метода граничных элементов применить к граничному интегральному уравнению, построенному на основе (6.10), полученная система линейных алгебраических уравнений будет иметь матрицу меньших размеров, чем у описанных выше вариантов метода и будет иметь явно выраженное диагональное преобладание, но матрица оказывается полностью заполненной. Отличительной особенностью применения метода граничных элементов в этом случае является необходимость для точек границы раздела использовать не уравнение (6.10), а уравнение, полученное из последнего дифференцированием по нормали (в этом случае оно содержит только одну переменную на подвижной границе – нормальную производную давления).

Если в классическом варианте метода граничных элементов порядок и вид аппроксимации (6.5), (6.6) определяется формой области и видом граничных условий, которые находят отражение в структуре матрицы системы линейных алгебраических уравнений, то для рассматриваемого класса задач основную роль при выборе способа аппроксимации играет расчет движения границы. Рассматривая условия (5.6) (второе равенство) как задачу Коши, описывающую продвижение точек границы (начальное условие определяется начальной формой области D_i), построим алгоритм расчета движения границы. Простейший алгоритм основан на схеме Эйлера

$$n_{ij}\left(t+\Delta t\right)=n_{ij}\left(t\right)+\Delta t V_{n_{ij}}(t), \qquad (6.11)$$

где через $V_{n_{ij}}$ обозначена левая часть равенств (5.6), Δt – шаг по времени. Использование схемы (6.11) предполагает достаточно малый шаг по времени. В монографии [10] на текущем шаге по времени использовалось итерационное уточнение вида

$$n_{ij}^{''}\left(t+\Delta t\right)=n_{ij}^{'}\left(t\right)+\Delta t V_{n_{ij}}\left(r\cdot n_{ij}^{''}+\left(1-r\right)n_{ij}^{'}\right), \qquad (6.12)$$

то есть, скорость продвижения подвижной границы определяется не в конце шага по времени, а в некоторый промежуточный момент. По мнению авторов настоящей работы использование схемы (6.12), как и алгоритмов более высокого порядка точности, чем схема (6.11), не всегда целесообразно, поскольку предполагает „большие” шаги по времени, и это накладывает ограничения на аппроксимацию зависимости от времени других граничных условий, кроме того, алгоритм решения при этом существенно усложняется, а решение задач фильтрации на промежуточных шагах по времени (итерациях) не имеют ясного физического смысла. С другой стороны, итерационный процесс (6.12) является основой решения задачи с неизвестной границей. Учитывая большое разнообразие задач о фильтрационных течениях с подвижной границей, проблема совершенствования методов интегрирования по времени рассмотренной задачи Коши остается актуальной и требует специальных исследований.

Выше было указанно, что для рассматриваемого класса задач в качестве аппроксимирующих функций (6.5), (6.6) целесообразно использовать линейные соотношения. Общее правило выбора порядка аппроксимации можно сформулировать следующим образом: повышение порядка аппроксимации уменьшает внутренние погрешности метода граничных элементов [16], но существенно «портит» свойства матрицы, поскольку общая погрешность метода существенно зависит от формы области решения, то вопрос о выборе порядка аппроксимации целесообразно решать путем численного эксперимента на тестовых задачах [16]. Для задач с подвижными границами дополнительные ограничения накладывает необходимость построения новой формы границы и новых точек коллокации. Трудность заключается в том, что, как схему (6.11), так и схему (6.12), напрямую можно применить только в точках коллокации, именно в тех точках, где решение системы (6.7) дает значение скорости $V_{n_{ij}}$, значение скорости в других точках границы, конечно, может быть получено методами интерполяции, но эта процедура может оказаться сложной и вносит дополнительную погрешность. Таким образом, желательно использовать такие схемы аппроксимации, которые не предполагают интерполяции, либо основаны на простейших интерполяциях. Поэтому большинство задач с подвижными границами решаются при помощи простейших схем аппроксимации: прямолинейные граничные элементы с аппроксимацией нулевого (постоянными) или первого (линейными функциями) порядка. При этом смещение границы откладывается в концах элементов по направлению биссектрисы нормалей соединяющихся элементов, и, кроме того, при использовании аппроксимации нулевого порядка смещение границы в концах граничных элементов определяется как среднеарифметическое смещений в серединах граничных элементов, что вносит дополнительные сглаживание в процедуру решения. Именно такие схемы аппроксимации и были использованы в настоящей работе, поскольку в круг интересов данной работы не входят сложные случаи движения поверхности раздела в тонких горизонтах и случаи неустойчивости границ раздела, где могут понадобиться более сложные схемы аппроксимации.

7. Результаты расчетов

Для иллюстрации разработанных выше алгоритмов было решено несколько прикладных задач теории фильтрации:

1) задача о фильтрации жидкости в сухую пористую среду (задача Н.Н. Веригина) вследствие истечения через дефекты трубы подземного трубопровода (рис. 7.1), течение происходит в горизонтальной плоскости, поэтому сила веса фильтрующейся жидкости не оказывает влияния на поле течения, на рисунке показана последовательность положений границы влажной области;

2) дренажная труба в пористой среде (рис. 7.2), задача аналогична предыдущей за исключением направления фильтрационного течения;

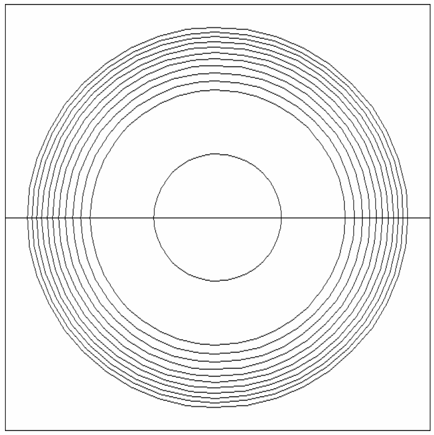


Рис. 7.1. Труба, протекающая в пористую среду (последовательность положения границы жидкость-газ – влагонасыщенная область растет)

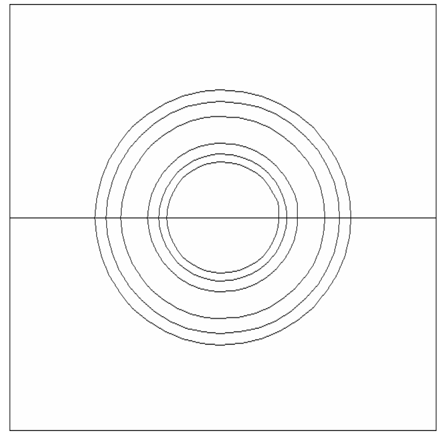


Рис. 7.2. Дренажная труба (последовательность положения границы жидкость-газ – влагонасыщенная область уменьшается)

3) случай фильтрации из двух труб трубопровода (рис. 7.3);

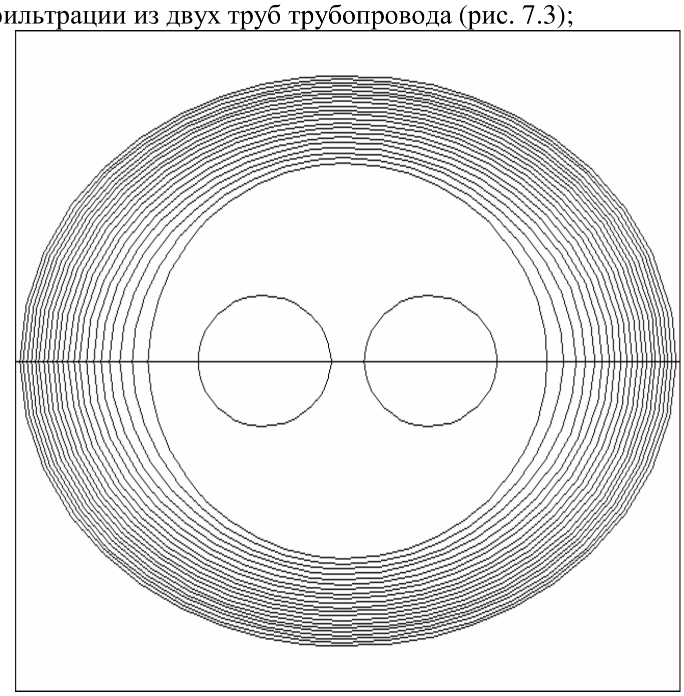


Рис. 7.3. Два "протекающих" трубопровода (последовательность положения границы жидкость-газ – влагонасыщенная область растет)

4) аналогичный случай для пары дренажных труб (рис. 7.4);

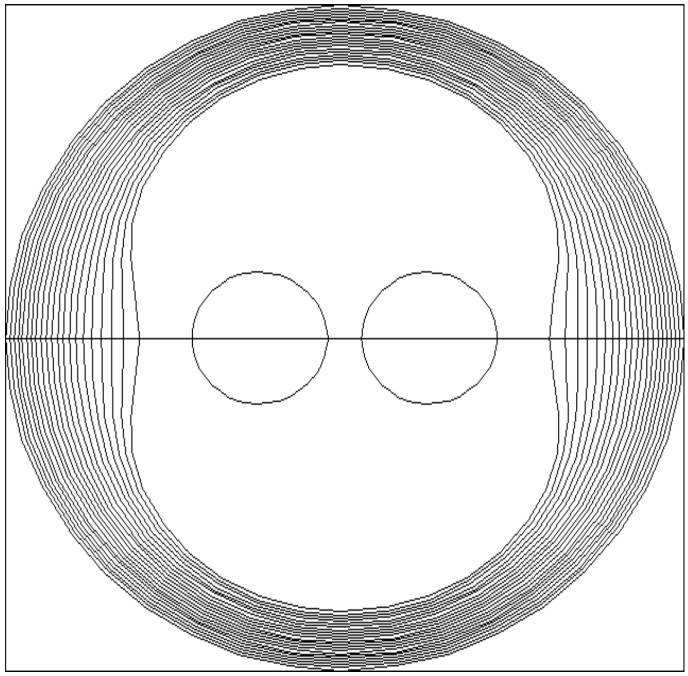


Рис. 7.4. Пара дренажных труб(последовательность положения границы жидкость-газ – влагонасыщенная область уменьшается)

5) труба, которая протекает, и дренажная труба (рис. 7.5);

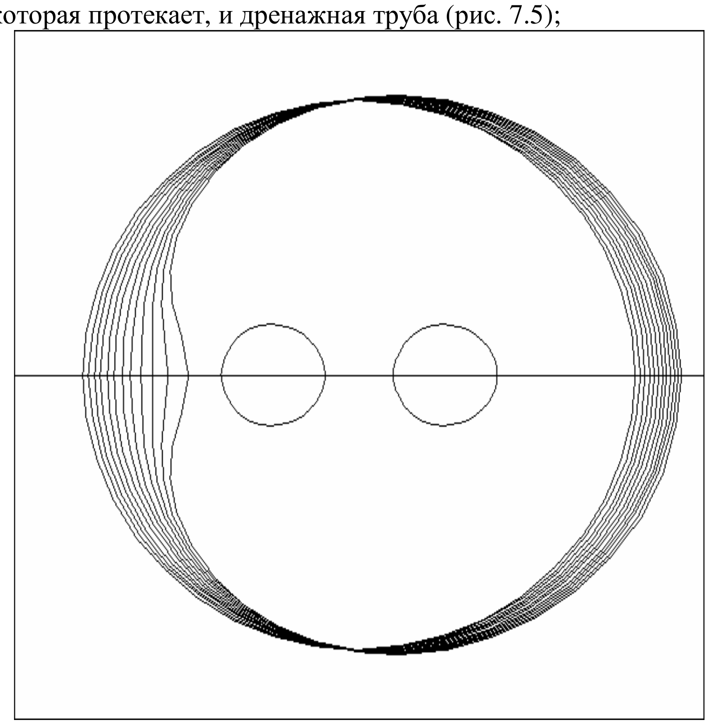


Рис. 7.5. Протекающая и дренажная трубы

6) труба, которая протекает, с учетом гравитационных сил (рис. 7.6);

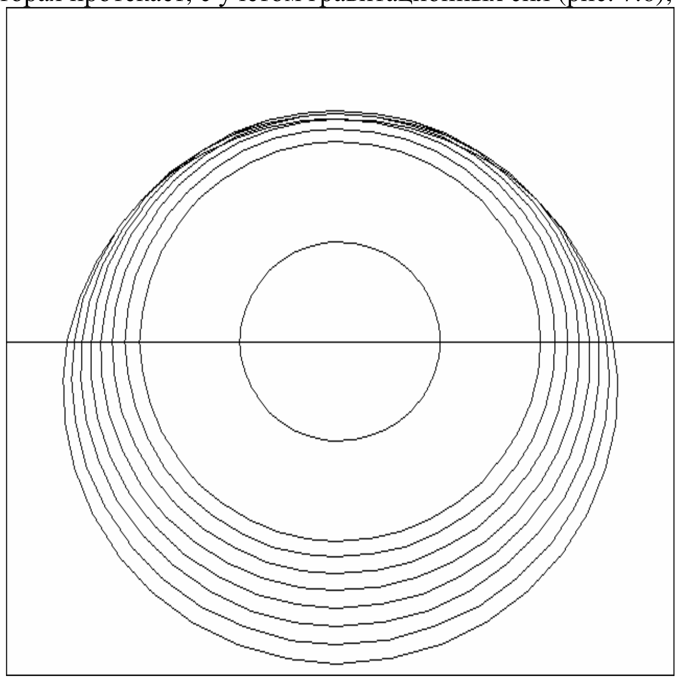
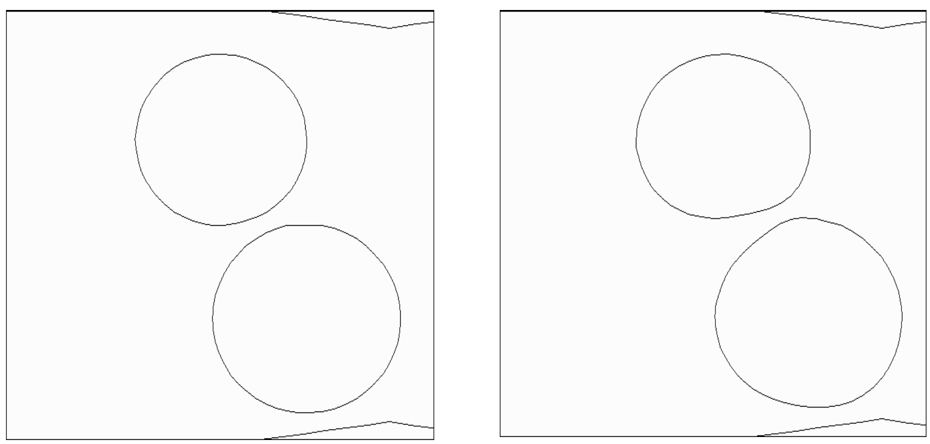
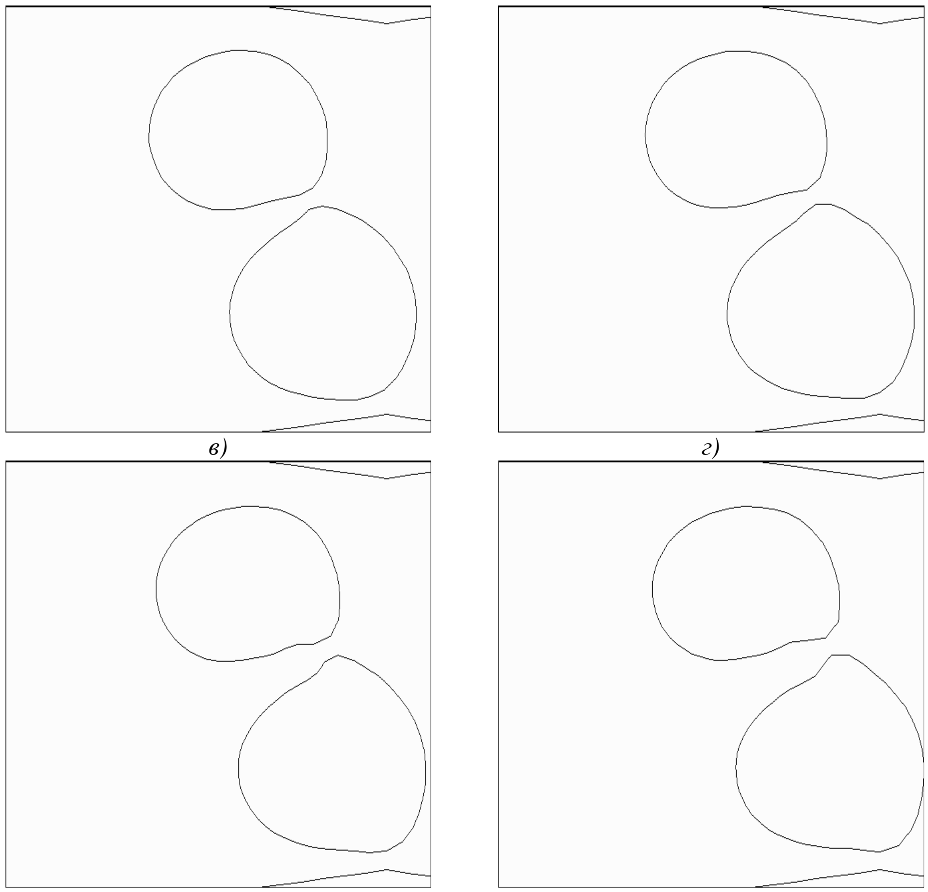


Рис. 7.6. Протекающая горизонтальная труба с учетом влияния силы тяжести

7) также рассмотрена задача о фильтрационном течении в канале с сужением двух несмешивающихся жидкостей (рис. 7.7 а – е).



а)　　　　*б)*



в) *г)* *д)* *е)*

Рис. 7.7. Движение пятен несмешивающейся жидкости в основном фильтрационном потоке

8. Выводы

Приведенный выше анализ алгоритмов и численные решения задач фильтрации, иллюстрирующие применение рассматриваемого подхода, свидетельствуют об эффективности описанных выше алгоритмов для решения задач фильтрации в областях с подвижными границами. Хотя в данной работе и не проводилось прямое сравнение точности численного решения и затрат ресурсов вычислительной техники для рассмотренных алгоритмов и общеизвестных вычислительных подходов, основанных на методах конечных разностей или конечных элементов, отсутствие необходимости построения внутренних сеток, традиционно более высокая точность метода граничных элементов по сравнению с конечными разностями и элементами, позволяет полагать, что рассмотренный выше подход будет, по крайней мере, конкурентоспособен по сравнению с иными численными подходами, и его достоинства будут сказываться все сильнее по мере усложнения формы области решения. Отметим, что первые две задачи, рассмотренные в предыдущем параграфе, допускают достаточно простое построение аналитических решений и могут быть использованы как тестовые для анализа точности предложенных алгоритмов путем численного эксперимента. Проведенное сравнение с аналитическим решением подтвердило высокую точность подхода (в большинстве расчетов относительная погрешность определения положения границы влагонасыщенной области не превышала 0,1%).

К основным результатам настоящей работы следует отнести, прежде всего, использование современных достижений метода граничных элементов в области аппроксимаций и схем интегрирования по времени в алгоритмах, предложенных для решения задач фильтрации в областях с подвижными границами. Значение полученных результатов достаточно очевидно – с одной стороны, они развивают теорию методов численного решения краевых задач с нелинейностью, вызванной подвижностью границ, относящихся к одним из наиболее сложных в современной вычислительной механике. С другой стороны, полученные результаты могут стать теоретической основой для создания высокоэффективного специализированного прикладного программного обеспечения для решения актуальных задач гидрогеологии, добычи нефти и газа. Последнее обстоятельство определяет как прикладное значение настоящей работы, так и одно из основных направлений развития самой тематики исследования – создание прикладного программного обеспечения для решения актуальных технических задач. Помимо этого, естественным развитием теоретических аспектов настоящей работы является поиск более эффективных алгоритмов решения задач фильтрации с подвижными границами, особенно для случая неустойчивости границ.

Отдельно хотелось бы остановиться на значении настоящей работы для теории фильтрации и основывающихся на ней прикладных технических дисциплинах. Создание эффективных алгоритмов решения соответствующих задач, конечно, не является прямым развитием соответствующих дисциплин, но существенно расширяя классы задач, поддающихся эффективному решению, способствует практическому прогрессу соответствующих теоретических и прикладных дисциплин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 386 с.
3. Баренблатт Г. И. , Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкости и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
5. Поляков М. В. Вибрані задачі механіки суцільного середовища. Обчислювально-аналітичні методи розв‘язання: Монографія. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – 320 с.

6. Евдокимов Д. В., Поляков Н. В. Применение граничных интегральных уравнений для расчета течения в слое конечной глубины со свободной поверхностью // "Метод дискретных особенностей в задачах аэродинамики, электродинамики и теории дифракции", тр. VII Международ. симп. Метод дискретных особенностей в задачах математической физики, 26-29 июня 1997, Феодосия, с. 66-69.
7. Поляков Н. В. Методы решения нелинейных краевых задач. Задачи проникания. – Днепропетровск, 2005. 356с.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
10. Liu P. L.-F., Liggett J. A. Boundary Solutions to Two Problems in Porous Media. // Jnl. Hydraulics Div., ASCE, 1979, v. 105. – p. 171-183.
11. Пивень В.Ф. Интегральные и интегродифференциальные уравнения двумернойзадачи сопряжения поля скоростей на нестационарной границе // Дифференциальные уравнения. – 2002. – т. 38, № 12. – С. 1705-1710.
12. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. – Орел: Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет», 2006. – 508 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
14. Поляков Н.В., Евдокимов Д.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. /Часть 1. Линейные задачи/. Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 7 - 25.
15. Поляков Н.В., Евдокимов Д.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. /Часть 2. Нелинейные задачи/. Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 25 - 42.
16. Бразалук Ю.В., Евдокимов Д.В., Поляков Н.В. Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями. – Вісник ХНУ, № 703. – Харків, 2005. – С. 50-66.