Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.95
№ 780, 2007, с.174-185

Термоупругость и линейные уравнения в частных производных высшего порядка

Т. З. Чочиев
Владикавказский научный центр Академии наук РФ и РСО-Алания, Россия

Question study related tasks thermoelasticity at high temperature perturbations leading to the solution of linear partial differential equations fourth order. Here investigated the case when the order is three. Using the method of bringing to a system of linear equations of the first order, we have built an exact solution that meets the boundary value condition, and initial data Cauchy. This result provides for the construction a temperature function and temperature stresses.

1. Обзор проблемы и ее актуальность

Настоящая статья развивает исследование работы [20], где связанная задача при высоких температурных возмущениях приведена к линейному уравнению в частных производных четвертого порядка. Реализуемый ниже метод понижения порядка производной приводит к уравнению третьего порядка, решения которого ранее не были построены. Это наложило вынужденные ограничения на рассмотрение работы [20] (см. допускается $h_0 = h_0(t)$, тогда (3.1) приводилось к виду (3.3)). Имея дальнейшую цель создать математический аппарат для полного решения поставленной в [20] задачи о распространении температурного возмущения, положим изучить общее уравнение третьего порядка вида

$$A_1^*\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+B_1^*\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}+C_1^*\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+D_1^*\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+E_1^*\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F_1^*\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+G_1^*\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+L_1^*\frac{\partial u}{\partial t}+ \\ +H_1^*\frac{\partial u}{\partial x}+I_1^*u=f_1^*(x,t)\,, \tag{1.1}$$

где коэффициенты суть заданны функции. Его тоже будем решать способом понижения порядка производной, ибо классические методы часто не применимы ко всем уравнениям, порядка выше второго. В то же время нам хорошо известно как решаются линейные уравнения в частных производных второго порядка [17,18,20].

Для линейных уравнений второго порядка характерны следующие приемы:

а) приведение к системе уравнений первого порядка;
б) решение такой системы, или, если это невозможно, то
в) составление другой, упрощенной системы, эквивалентной данной;
г) составление характеристического уравнения [18] и нахождением для него хотя бы частного решения.

Этот «арсенал» гарантирует эффективное решение при удовлетворении начальных и краевого условий за счет появляющихся неизвестных функций. Имеются интересные работы [14,15,16] по приведению уравнения в частных производных высшего порядка к системе уравнений первого порядка. Однако в них удается обобщить только прием а) и частично б). Поэтому указанные методы позволяют охватить ограниченный класс уравнений порядка, выше второго.

Наше исследование уравнения (1.1) позволит построить эффективное решение $u(x,t)$. Это обеспечит нахождение функции σ_{xx}^{*} из основного уравнения (3.3) работы [20], через которую определяются нелинейное температурное поле (см. [20], формулы (1.18а), (1.18)) и температурные напряжения (см. [20], формулы (2.6) и (1.5)) в случае высоких температурных напряжениях.

Изучение уравнения (1.1) актуально не только в отношении работы [20], но и работ ряда других научных направлений, в основе которых лежат уравнения порядка выше второго. К примеру, задачи теории оболочек [4,5,7,12], аэродинамики сверхзвуковых течений [13], теории упругости и термоупругости [2,7,11], но особенно – связанные задачи термоупругости при высоких температурных возмущениях [20,21]. С задачами, которые подобны постановкам [20,21], встречаемся при разработке современных конструкций паровых и газовых турбин, реактивных и ракетных двигателей, высокоскоростных самолетов, ядерных реакторов [6,9,10].

2. Способ понижения порядка для рассматриваемых уравнений

Если $A_1^{*}(x,t)\neq 0\;(D_1^{*}(x,t)\neq 0)$, то (1.1) будем задавать в форме

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+A\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}+B\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+C\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+D\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+E\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+K\frac{\partial u}{\partial t}+H\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+Iu=f(x,t), \tag{2.1}$$

где коэффициенты $A(x,t),B(x,t),C(x,t)$ допускают: частные производные третьего порядка; $D(x,t)$, $E(x,t)$, $F(x,t)$ – частные производные второго порядка; $K(x,t)$, $H(x,t)$ – частные производные первого порядка; а $I(x,t)$ и $f(x,t)$ – непрерывные функции. Требуется построить $u(x,t)$, удовлетворяющее уравнению (2.1) и начальным и краевому условиям:

$$u(x,0)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\,;\; u(0,t)=0\,. \tag{2.2}$$

(см. [18], эти условия следуют из (1.3) и (1.4) согласно формулам (2.5), (2.8) и (2.10) этой работы)

Об эффективных способах решения нашего уравнения (2.1) практически не известно. Поэтому к нему будем применять метод понижения порядка производной, или приведение к системе уравнений первого порядка [18]. В частности, если в соотношении

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+B_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_1\frac{\partial u}{\partial t}+D_1\frac{\partial u}{\partial x}+E_1 u\right)+$$
$$+\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+B_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_1\frac{\partial u}{\partial t}+D_1\frac{\partial u}{\partial x}+F_1 u\right)+$$
$$+\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+B_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_1\frac{\partial u}{\partial t}+D_1\frac{\partial u}{\partial x}+K_1 u\right)=f(x,t) \tag{2.3}$$

выполнить указанную операцию, сгруппировать, допустить, что многочлен

$$\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0$$

имеет по крайней мере один действительный корень $\lambda = \lambda_1 \neq 0$; принять во внимание значения коэффициентов

$$A_1 = A - \lambda_1;\ B_1 = \frac{C}{\lambda_1};\ D_1 = \left\{(2\lambda_1 - A)\left(\lambda_1\left[F - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{C}{\lambda_1}\right) - \lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{\lambda_1}\right)\right] - CD\right) + \right.$$

$$\left. + C\left(E - D(A-\lambda_1) - \frac{\partial(A-\lambda_1)}{\partial t} - \lambda_1\frac{\partial(A-\lambda_1)}{\partial x}\right)\right\}\Big/ R;\ R = \lambda_1{}^2(2\lambda_1 - A) + C;$$

$$K_1 = \frac{1}{\gamma}\left(I - \frac{\partial E_1}{\partial t} - \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}\right);\ F_1 = \frac{1}{\lambda_1}\left(H - \gamma D_1 - \frac{\partial D_1}{\partial t} - \lambda_1\frac{\partial D_1}{\partial x}\right); \tag{2.3а}$$

$$C_1 = \left[\lambda_1{}^2\left(E - D(A-\lambda_1) - \frac{\partial(A-\lambda_1)}{\partial t} - \lambda_1\frac{\partial(A-\lambda_1)}{\partial x}\right) - \lambda_1\left(F + CD - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{C}{\lambda_1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{\lambda_1}\right)\right)\right]\Big/ R;\ \gamma = D - C_1;\ E_1 = \frac{\partial C_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial C_1}{\partial x} + C_1(D - C_1) - K,$$

то придем к уравнению (2.1).

С другой стороны, (2.3) не что иное как система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + B_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_1\dfrac{\partial u}{\partial t} + D_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + E_1 u = V, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1\dfrac{\partial V}{\partial x} + \gamma V = \lambda_1(E_1 - F_1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left[\lambda_1\dfrac{\partial(E_1 - F_1)}{\partial x} + \gamma(E_1 - K_1)\right]u + f, \end{cases} \tag{2.4}$$

эквивалентная другой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + B_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_1\dfrac{\partial u}{\partial t} + \left[D_1 - l_1\lambda_1(E_1 - F_1)\right]\dfrac{\partial u}{\partial x} + \\ + \left[E_1 - \left(\lambda_1\dfrac{\partial(E_1 - F_1)}{\partial x} + \gamma(E_1 - K_1)\right)l_1\right]u = \rho_1; \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1\dfrac{\partial V}{\partial x} + \left(\gamma - \dfrac{1}{l_1}\right)V = f - \dfrac{\rho_1}{l_1}; \\ l_1\lambda_1(E_1 - F_1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left[\lambda_1\dfrac{\partial(E_1 - F_1)}{\partial x} + \gamma(E_1 - K_1)\right]l_1 u - V = -\rho_1, \end{cases} \tag{2.5}$$

если ρ_1 удовлетворяет третьему уравнению; l_1 – линейному уравнению

$$\frac{\partial l_1}{\partial x} + \left[\frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + \frac{1}{C_1}\left(D_2 - \frac{1}{l_2}\right) - \frac{1}{C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\gamma}{\lambda_1}\right]l_1 + \frac{1}{\lambda_1} = 0, \tag{2.5а}$$

а l_2 – некоторое частное решение нелинейного уравнения [16]

$$\frac{\partial l_2}{\partial x} - \frac{D_2(B_2 - E_2)}{A_2}l_2^2 + \left(\frac{B_2}{A_2} - \frac{D_2}{C_2} + \frac{1}{C_2}\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)l_2 + \frac{1}{C_2} = 0, \tag{2.5б}$$

Пусть $D_0 = D_1 - l_1\lambda_1(E_1 - F_1)$; $E_0 = E_1 - \left[\lambda_1 \dfrac{\partial(E_1 - F_1)}{\partial x} + \gamma(E_1 - K_1)\right] l_1$.

Так как все коэффициенты первого уравнения системы (2.5),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} + D_0 \frac{\partial u}{\partial x} + E_0 u = \rho\,, \qquad (2.6)$$

суть заданные функции (см.(2.3)), то остается привести его к системе [15]. Если в соотношении:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 u\right) + C_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 u\right) + D_2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 u\right) =$$
$$= D_2(B_2 - E_2)u + \rho_1, \qquad (2.7)$$

выполнить указанную операцию, сгруппировать и принять во внимание, что

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(A_1 + \sqrt{A_1{}^2 - 4B_1}\right);\ C_2 = \frac{1}{2}(A_1 - \sqrt{A_1{}^2 - 4B_1});$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{A_1{}^2 - 4B_1}}\left(A_2 C_1 - D_0 + \frac{\partial A_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial A_2}{\partial x}\right);$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{A_1{}^2 - 4B_1}}\left(D_0 - C_1 C_2 - \frac{\partial A_2}{\partial t} - C_2 \frac{\partial A_2}{\partial x}\right);\ E_2 = \frac{1}{A_2}\left(E_0 - \frac{\partial B_2}{\partial t} - C_2 \frac{\partial B_2}{\partial x}\right),$$

$$A_1{}^2 - 4B_1 = \frac{1}{\lambda_1}\left(\left(A^2 - B\right)\lambda_1 - A\lambda_1{}^2 - 3C\right) \neq 0\,,$$

получим уравнение (2.6). С другой стороны, из (2.7) следует система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + B_2 u = V_1, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + C_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial x} + D_2 V_1 = D_2(B_2 - E_2)u + \rho_1, \end{cases} \qquad (2.8)$$

эквивалентная другой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \left[B_2 - l_2 D_2(B_2 - E_2)\right]u = \rho_2, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + C_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial x} + \left(D_2 - \dfrac{1}{l_2}\right)V_1 = \rho_1 - \dfrac{\rho_2}{l_2}, \\ l_2 D_2\left(B_2 - E_2\right)u + \rho_2 = V_1, \end{cases} \qquad (2.9)$$

если ρ_2 – решение третьего уравнения, а l_2 – решение (2.5б) (см. [16]).

Первые два уравнения и второе уравнение (2.5) сгруппируем в одну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A_2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left[B_2-l_2D_2(B_2-E_2)\right]u=\rho_2, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t}+\lambda_1\dfrac{\partial V}{\partial x}+\left(\gamma-\dfrac{1}{l_1}\right)V=f-\dfrac{\rho_1}{l_1}, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t}+C_2\dfrac{\partial V_1}{\partial x}+\left(D_2-\dfrac{1}{l_2}\right)V_1=\rho_1-\dfrac{\rho_2}{l_2}, \end{cases} \tag{2.10}$$

а третье уравнение (2.9) и последнее уравнение (2.5) сгруппируем отдельной системой:

$$\begin{cases} \lambda_1 l_1(E_1-F_1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+l_1\left[\lambda_1\dfrac{\partial(E_1-F_1)}{\partial x}+\gamma(E_1-K_1)\right]u-V=-\rho_1, \\ l_2D_2(B_2-E_2)u+\rho_2=V_1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Из (2.10) замечаем, что

$$u(x,\sigma_2)=e^{-\int_0^x \frac{B_2-l_2D_2(B_2-E_2)}{A_2}dx}\left[u_0(\sigma_2)+\int_0^x\frac{\rho_2}{A_2}e^{\int_0^x \frac{B_2-l_2D_2(B_2-E_2)}{A_2}dx}dx\right],$$

$$V(x,\sigma_1)=e^{-\int_0^x \frac{1}{\lambda_1}\left(\gamma-\frac{1}{l_1}\right)dx}\left[V_0(\sigma_1)+\int_0^x\frac{1}{\lambda_1}\left(f-\frac{\rho_1}{l_1}\right)e^{\int_0^x \frac{1}{\lambda_1}\left(\gamma-\frac{1}{l_1}\right)dx}dx\right], \tag{2.12}$$

$$V_1(x,\sigma_3)=e^{-\int_0^x \frac{1}{C_2}\left(D_2-\frac{1}{l_2}\right)dx}\left[V_{10}(\sigma_3)+\int_0^x\frac{1}{C_2}\left(\rho_1-\frac{\rho_2}{l_2}\right)e^{\int_0^x \frac{1}{C_2}\left(D_2-\frac{1}{l_2}\right)dx}dx\right],$$

где $u_0(\sigma_2)$, $V_0(\sigma_1)$ и $V_{10}(\sigma_3)$ – произвольные функции.

$$d\sigma_1=\mu_1(dx-\lambda_1dt);\;\; d\sigma_2=\mu_2(dx-A_2dt);\;\; d\sigma_3=\mu_3(dx-C_2dt),$$

μ_1,μ_2,μ_3 – интегрирующие множители соответственно правых частей дифференциалов $d\sigma_1,d\sigma_2,d\sigma_3$. Формулы (2.12) соответственно удовлетворяют группе уравнений (2.10). За счет ρ_1 и ρ_2 удовлетворим второй группе равенств (2.11).

С целью удобства записи введем обозначения:

$$\Phi_2=\int_0^x\frac{\rho_2}{A_2}e^{\int_0^x\frac{1}{A_2}[B_2-l_2D_2(B_2-E_2)]dx}dx;\;\; \Phi_1=\int_0^x\frac{\rho_1}{C_2}e^{\int_0^x\frac{1}{C_2}\left(D_2-\frac{1}{l_2}\right)dx}dx \tag{2.13}$$

причем, если l_2 – решение уравнения (2.5), то будет выполняться

$$\frac{1}{C_2l_2}e^{\int_0^x\frac{1}{C_2}\left(D_2-\frac{1}{l_2}\right)dx}=\frac{1}{A_2}e^{\int_0^x\frac{B_2-l_2D_2(B_2-E_2)}{A_2}dx},\;\left(l_2=\frac{A_2}{C_2}\right)_{x=0}; \tag{2.14}$$

а из удовлетворения (2.5а) следует выполнимость аналогичного соотношения

$$\frac{1}{\lambda_1 l_1} e^{\int_0^x \frac{1}{\lambda_1}\left(\gamma - \frac{1}{l_1}\right)dx} = \frac{1}{C_2} e^{\int_0^x \frac{1}{C_2}\left(D_2 - \frac{1}{l_2}\right)dx} \qquad \left(l_1 = \frac{C_2}{\lambda_1}\right)_{x=0}. \tag{2.15}$$

Внесение формул (2.12) в (2.11), с учетом (2.14) и (2.15), приведет к системе уравнений относительно Φ_1 и Φ_2,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \mu_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_2} + D^* \Phi_2 + A^* \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + B^* \Phi_1 = M^*, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} + C^* \Phi_2 + E^* \Phi_1 = N^*, \end{cases} \tag{2.16}$$

где $$A^* = \frac{A_2}{l_1 \lambda_1 l_2 (E_1 - F_1)}; \; B^* = \frac{A_2}{l_1^2 \lambda_1^2 l_2 (E_1 - F_1)};$$

$$C^* = \frac{1}{A_2}\left(l_2 D_2 (B_2 - E_2) + \frac{A_2}{l_2 C_2}\right); \; E^* = -\frac{1}{l_2 C_2}; \tag{2.16a}$$

$$N^* = -\frac{E^*}{A_2} V_{10}(\sigma_3) - \frac{l_2 D_2 (B_2 - A_2)}{A_2} u_0(\sigma_2);$$

$$M^* = \frac{A_2}{l_1^2 \lambda_1^2 l_2 (E_1 - F_1)} \left(V_0(\sigma_1) + \int_0^x \frac{f}{\lambda_1} e^{\int_0^x \frac{1}{\lambda_1}\left(\gamma - \frac{1}{\lambda_1}\right)dx} dx \right) - D^* u_0(\sigma_2) - \mu_2 u_0{}'(\sigma_2);$$

$$D^* = -\left(\frac{B_2 - l_2 D_2 (B_2 - E_2)}{A_2} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \int_0^x \frac{B_2 - l_2 D_2 (B_2 - E_2)}{A_2} dx \right) +$$

$$+ \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial (E_1 - F_1)}{\partial x} + \gamma (E_1 - K_1)}{\lambda_1 (E_1 - F_1)},$$

которая в свою очередь эквивалентна другой системе:

$$\begin{cases} (1 + l_3) \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \mu_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_2} + (D^* + l_3 C^*) \Phi_2 = \rho_3, \\ A^* \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + (B^* + l_3 E^*) \Phi_1 = M^* + l_3 N^* - \rho_3, \\ A^* \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + B^* \Phi_1 + \rho_3 - l_3 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} - l_3 C^* \Phi_2 = M^*, \end{cases} \tag{2.17}$$

если ρ_3 – решение третьего уравнения, а l_3 удовлетворяет:

$$\frac{\partial l_3}{\partial x} + \frac{E^*}{A^*} l_3^2 + \left(\frac{E^*}{A^*} - C^* - \frac{1}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial x} + \frac{B^*}{A^*} \right) l_3 = D^* + \frac{1}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial x} - \frac{B^*}{A^*}. \tag{2.18}$$

Из первых двух уравнений для Φ_2 и Φ_1 следует:

$$\begin{cases} \Phi_2(x,\tau_1)=e^{-\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}\left(\Phi_{20}(\tau_1{}^*)+\int\limits_0^x \frac{\rho_3}{1+l_3}e^{\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}dx\right), \\ \Phi_1(x,t)=e^{-\int\limits_0^x \frac{B^*+l_3E^*}{A^*}dx}\left(\Phi_{10}(t)+\int\limits_0^x \frac{M^*+l_3N^*-\rho_3}{A^*}e^{\int\limits_0^x \frac{B^*+l_3E^*}{A^*}dx}dx\right), \end{cases} \quad (2.19)$$

где $\Phi_{20}(\tau_1^*)$ и $\Phi_{10}(t)$ – произвольные функции, $d\tau_1^*=\mu^*(\mu_2^* dx-(1+l_3)d\sigma_2)$, причем, если l_3 – решение (2.18), то всегда имеет место

$$(1+l_3)e^{\int\limits_0^x \frac{B^*+l_3E^*}{A^*}dx}=A^*e^{\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx} \quad (l_3=A^*-1,\ l_3>0). \quad (2.20)$$

Отсюда (2.19) переписывается вкратце:

$$\begin{cases} \Phi_2(x,\tau_1^*)=e^{-\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}\left(\Phi_{20}(\tau_1^*)+\Phi_3\right) \\ \Phi_1(x,t)=\frac{1+l_3}{A^*}e^{-\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}\left(\Phi_{10}(t)-\Phi_3+\int\limits_0^x \frac{M^*+l_3N^*}{A^*}e^{\int\limits_0^x \frac{B^*+l_3E^*}{A^*}dx}dx\right) \end{cases} \quad (2.20a)$$

где

$$\Phi_3(x,t)=\int\limits_0^x \frac{\rho_3}{1+l_3}e^{\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C*}{1+l_3}dx}dx, \quad (2.21)$$

а третье соотношение (2.17) представляем как дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}+\mu^*\mu_2\frac{\partial\Phi_3}{\partial\tau}-M_2{}^*\Phi_3=-N_2{}^*, \quad (2.22)$$

где

$$\begin{cases} M_2{}^*=-\frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}-\mu^*\mu_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx-C^*\left(\frac{1+l_3}{A^*}-1\right), \\ N_2{}^*=N^*e^{\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}-\mu^*\mu_2\Phi'_{20}(\tau_1^*)-C^*\frac{1+l_3}{A^*}\left(\Phi_{10}(t)+\int\limits_0^x \frac{M^*+l_3N^*}{A^*}e^{\int\limits_0^x \frac{B^*+l_3E^*}{A^*}dx}dx\right)+ \\ +\left(C^*-\frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}-\mu^*\mu_2\frac{\partial}{\partial\tau_1^*}\int\limits_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx\right)\Phi_{20}(\tau_1^*)\ , \end{cases} \quad (2.22a)$$

решением которого служит функция вида:

$$\Phi_3(x,\tau_2^*)=e^{\int_0^x M_2^* dx}\left(\Phi_{30}(\tau_2^*)-\int_0^x N_2^* e^{-\int_0^x M_2^* dx}dx\right);\ d\tau_2^*=\mu_4(d\tau_1^*-\mu^*\mu_2 dx)\quad(2.23)$$

причем, поскольку $\Phi_{30}(0,\tau_2^*)=0$, то $\Phi_{30}(\tau_2^*)\equiv 0$. Сравнение (2.21) с обозначением (2.23), (2.13) с (2.22а) позволяет определить ρ_3 и ρ_2 соответственно,

$$\rho_3=(1+l_3)e^{-\int_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}\frac{\partial\Phi_3}{\partial x};\ \rho_2=A_2 e^{-\int_0^x \frac{B_2-l_2D_2(B_2-E_2)}{A_2}dx}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}.\qquad(2.24)$$

В силу (2.13) $\Phi_1\big|_{x=0}=0$, но тогда согласно (2.20а) $\Phi_{10}(t)\equiv 0$. Из (2.13) и из второй формулы (2.20а) сразу замечаем, что

$$\rho_1=C_2 e^{-\int_0^x \frac{1}{C_2}\left(D_2-\frac{1}{l_2}\right)dx}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x},\qquad(2.24)$$

Построением ρ_1,ρ_2 и ρ_3 соответственно обоснована эквивалентность систем: (2.4) и (2.5); (2.8) и (2.9); (2.16) и (2.17) и, естественно, выполнимость системы (2.11).

Таким образом, законность приведения (2.1) к системе уравнений (2.10) удостоверяется удовлетворением (2.11) и формулами (2.24) и (2.25). Формулы (2.19) или (2.20а) обеспечивают выполнимость (2.16) или (2.11), а формулы (2.12) обеспечивают выполнимость (2.10). Однако, если (2.10) и (2.11) удовлетворяют, то и удовлетворяют (2.4) и (2.5), что равносильно выполнению (2.1).

Что касается нелинейных уравнений (2.5б) и (2.18), то подобный класс исследован в [15,14].

3. Начальные данные и краевое условие. Нахождение неизвестных функций.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что второе условие (2.2): $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ при $t=0$ удовлетворяет, если (см. (2.12), (2.13) и (2.20а))

$$u_0(\sigma_2)+e^{-\int_0^x \frac{D^*+l_3C^*}{1+l_3}dx}\left(\Phi_{20}(\tau_1^*)+\Phi_3\right)=0\qquad\left(\frac{\partial u}{\partial t}=-A_2\mu_2\frac{\partial u}{\partial\sigma_2}\right)\qquad(3.1)$$

Заодно будет выполняться и первое условие $u\big|_{t=0}=0$.

Так как $d\tau_1^*=\mu^*(\mu_2dx-(1+l_3)dt)$; $d\sigma_2=\mu_2(dx-A_2dt)$, то при $t=0$ τ_1^* и σ_2 связаны: $d\tau_1^*=\mu^*d\sigma_2\Rightarrow\tau_1^*=\int_0^{\sigma_2}\mu^*dz=\tau_1^*(\sigma_2)$; $x=\int_0^{\sigma_2}\frac{d\sigma_2}{\mu_2}=x(\sigma_2)$;

$x=\int_0^{\tau_1^*}\frac{d\tau_1^*}{\mu^*\mu_2}=\ x(\tau_1^*)$. В силу чего $\Phi_{20}(\tau_1^*)$ как произвольную функцию можем допустить равной: $\Phi_{20}(\tau_1^*)\big|_{t=0} = \Phi_{20}[\tau_1^*(\sigma_2)] = u_0(\sigma_2)$. Тогда $u(x,t)$ будет удовлетворять обоим условиям (2.2), если $u_0(\sigma_2)$ зададим следующим образом:

$$u_0(\sigma_2) = -\frac{\Phi_3[x(\sigma_2), \tau_2^*(\sigma_2)]}{1 + e^{\int\limits_0^{x(\sigma_2)} \frac{D^* + l_2 C^*}{(1+l_3)\mu_2} dz}}; \left(\Phi_{20}(\tau_1^*) = -\frac{\Phi_3(x(\tau_1^*), \tau_2^*(\tau_1^*))}{1 + e^{\int\limits_0^{x(\tau_1^*)} \frac{D^* + l_2 C^*}{\mu^* \mu_2 (1+l_3)} dz}} \right). \qquad (3.2)$$

Краевое условие (2.2), $u(0,t) = 0$, выполняется всегда, ибо $u_0(\sigma_2)_{x=0} = 0$. Итак, первые два условия всегда выполняются, если (3.1) имеет место, то есть $u(\sigma_2) = \Phi_{20}[\tau_1^*(\sigma_2)] \left(d\tau_2^* = \mu_4 (d\tau_1^* - \mu^* \mu_2 dx) \right)$.

Осталось еще уточнить функции $V_0(\sigma_1)$ и $V_{10}(\sigma_3)$, содержащиеся в последних двух формулах (2.12). Если в (2.11) допустить $x = 0$ и принять во внимание второе условие (2.2), формул (2.12), (2.24) и (2.25), то придем к следующим выражениям относительно $V_0(\sigma_1)$ и $V_{10}(\sigma_3)$:

$$\begin{cases} V_0(\sigma_1) = C_2 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + l_1 \lambda_1 (E_1 - F_1) \left[\mu_2 u_0'(\sigma_2) + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \mu_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_2} \right] \ (x = 0), \\ V_{10}(\sigma_3) = A_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} \qquad (x = 0). \end{cases} \qquad (3.3)$$

Или, произведя замену в правых частях (3.3) частных производных их соответствующими значениями, согласно (2.20а) и (2.23), с учетом (2.16а) и (2.22а) и допустить $x = 0$,

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu_2 \mu^* \Phi_{20}'(\tau_1^*) - N_2^*; \ \left.\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = -N_2^* + \dfrac{M^* + l_3 N^*}{A^*}; \ \left.\dfrac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right|_{x=0} = -N_2^*; \\ \left.\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_2}\right|_{x=0} = \dfrac{3\mu_4 \mu^*}{2}(1 + l_3) \dfrac{\partial}{\partial \tau_2^*} \int\limits_0^x N_2^* e^{-\int\limits_0^x M_2^* dx} dx; \ N_2^*\big|_{x=0} = -\dfrac{E^* + 1}{2A_2} V_{10}(\sigma_3); \ \Phi_{30}(\tau_0^*) \equiv 0; \\ u_0'(\sigma_2) = -\dfrac{\mu_4 \mu^* (1 + l_3)}{2} \dfrac{\partial}{\partial \tau_2^*} \int\limits_0^x N_2^* e^{\int\limits_0^x M_2^* dx} dx; \ N^*\big|_{x=0} = -\dfrac{E^*}{A_2} V_{10}(\sigma_3): \qquad (3.4а) \\ M^*\big|_{x=0} = \dfrac{A_2 V_0(\sigma_1)}{l_1^2 \lambda_1^2 l_2 (E_1 - F_1)} - \mu_2 u_0'(\sigma_2); \ \Phi_{20}'(\tau_1^*)_{x=0} = -\dfrac{\mu_4}{2} \dfrac{\partial}{\partial \tau_2^*} \int\limits_0^x N_2^* e^{-\int\limits_0^x M_2^* dx} dx, \end{cases}$$

после группировки приходим к системе равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{l_1^2\lambda_1^2 l_2 A^*(E_1-F_1)-A_2C_2}{l_1^2\lambda_1^2 l_2 A^*(E_1-F_1)}V_0(\sigma_1)=C_2\,\dfrac{(E^*+1)A^*-2l_3}{2A^*A_2}V_{10}(\sigma_3)+\dfrac{\mu_2\mu_4\mu^*}{2A^*}\times \\ \times\left[C_2(1+l_3)+2A^*l_1\lambda_1(E_1-F_1)(l_3+\dfrac{1}{2})\right]\dfrac{\partial}{\partial\tau_2^*}\displaystyle\int_0^x N_2^* e^{-\int_0^x M_2^* dx}dx; \\ \dfrac{E^*-1}{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}V_{10}(\sigma_3)=\dfrac{\partial}{\partial\tau_2^*}\displaystyle\int_0^x N_2^* e^{-\int_0^x M_2^* dx}dx. \quad (x=0). \end{cases} \tag{3.5}$$

Если второе уравнение проинтегрировать по τ_2^*, то его правая часть обратится в ноль. Но при известном $\dfrac{E^*-1}{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}$ и неизвестной $V_{10}(\sigma_3)$ определенный интеграл может равняться нулю.

$$\int_0^{\tau_2^*}\frac{E^*-1}{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}V_{10}(\sigma_3)d\tau_2^*=0\,, \tag{3.6}$$

если подинтегральная функция есть:

$$\frac{E^*-1}{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}\big(V_{10}(\sigma_3)\big)_n=\cos\frac{\pi n}{r}\tau_2^*,\quad (0\le\tau_2^*\le r,\ n\in Z)\,.$$

где связь между σ_3 и τ_2^* сразу устанавливается, если вспомнить, что

$$d\tau_2^*=\mu_4(d\tau_1^*-\mu^*\mu_3dx);\, d\tau_1^*=\mu^*(\mu_2dx-(1+l_3)d\sigma_2);\, d\sigma_2=\mu_2(dx-A_2dt)\,;$$
$$d\sigma_1=\mu_1(dx-\lambda_1dt)\,;\ \ d\sigma_3=\mu_3(dx-C_2dt)$$

при $x=0$. Следовательно,

$$\begin{gathered} V_{10}(\sigma_3)=\frac{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}{E^*-1}\cos\frac{\pi n}{r}\tau_2^*(\sigma_3)\,; \\ \left(\tau_2^*=-\int_0^{\sigma_3}\frac{\mu^*\mu_2\mu_4A_2}{\mu_3C_2}(1+l_3)d\sigma_3=\tau_2^*(\sigma_3)\right) \end{gathered} \tag{3.5a}$$

В системе (3.5) вторая искомая функция зависит от σ_1, поэтому целесообразно установить зависимость между σ_3 и σ_1 при $x=0$. Замечая, что $d\sigma_3=-\mu_3C_2dt;\, d\sigma_1=\mu_1\lambda_1dt$

$$\frac{d\sigma_3}{d\sigma_1}=\frac{\mu_3C_2}{\lambda_1\mu_1}\Rightarrow\sigma_3=\int_0^{\sigma_1}\frac{C_2\mu_3}{\lambda_1\mu_1}d\sigma_1=\sigma_3(\sigma_1);$$

то есть

$$\int_0^{\sigma_3}\frac{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}{\mu_3C_2}(1+l_3)d\sigma_3=\int_0^{\sigma_3(\sigma_1)}\frac{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}{\lambda_1\mu_1}(1+l_3)d\sigma_1,$$

поэтому

$$\cos\frac{\pi n}{r}\int_0^{\sigma_3}\frac{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}{\mu_3C_2}(1+l_3)d\sigma_3=\cos\frac{\pi n}{r}\int_0^{\sigma_3(\sigma_1)}\frac{\mu_2\mu_4\mu^*A_2}{\lambda_1\mu_1}(1+l_3)d\sigma_1. \tag{3.6a}$$

Таким образом,

$$V_{10}(\sigma_3) = \frac{\mu_2\mu_4\mu^*}{E^{\cdot} - 1} A_2 \cos\frac{\pi n}{r} \int_0^{\sigma_3} \frac{\mu_2\mu_4\mu^* A_2}{\mu_3 C_2}(1 + l_3)\, d\sigma_3\,, \tag{3.7}$$

а из первого уравнения (3.5) для $V_0(\sigma_1)$ имеем (см. $(3.6)_1$):

$$V_0(\sigma_1) = \frac{l_1^2\lambda_1^2 l_2 A_2 \mu_2\mu_4\mu^*(E_1 - F_1)}{[l_1^2\lambda_1^2 l_2 A^*(E_1 - F_1) - A_2C_2](E^* - 1)} \cos\frac{\pi n}{r} \int_0^{\sigma_3(\sigma_1)} \frac{\mu_2\mu_4\mu^* A_2}{\lambda_1\mu_1}\, d\sigma_1 \times$$

$$\left(C_2\,\frac{A^*(E^* + 1) - 2l_3}{2A_2} + \frac{E^* - 1}{2A_2}[C_2(1 + l_2) + 2A^* l_1\lambda_1(E_1 - F_1)(l_3 + \frac{1}{2})] \right); \tag{3.8}$$

Эти две функции и удовлетворяют системе (3.5). Тем самым, окончательное уточнение получили: $N^*, N_2^*, u_0(\sigma_2), \Phi_{20}(\tau_1), M^*, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ (функции и их частные производные) и функция $u(x,t)$. Последняя полностью определенная формулой (3.2) и удовлетворяет общему уравнению (2.1), начальным данным и краевому условию (2.3). Возвращаясь к основному уравнению (3.3) работы [20], которое относится к частному случаю (2.1), заключаем, что построенное σ_{xx}^* служит его решением. Тогда δ найдем из соотношения (2.8) работы [20]. В итоге, по-прежнему используя обозначения [20], получим

$$\Delta_1 = \frac{1}{l_1}\int_0^x \frac{\delta}{\sqrt{a_1}} e^{\int_0^x (d_1^* - \frac{1}{l_1})dx} dx = \sqrt{a_1}\, e^{\int_0^x \frac{l_1^2 d_1^2 (c_1^* - e_1^*) + 1}{l_1\sqrt{a_1}} dx} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\,. \tag{3.9}$$

Следовательно, искомое нелинейное температурное поле определяется формулой (1.18), (см. (1.16)),

$$T - T_0 = k_0 \int_0^t \frac{1}{k}\left(\frac{\partial F^*}{\partial t} + F^{**}\right) dt \quad \left(F^{**} = e^{\int_0^x g^* dx} \int_0^x \frac{\delta}{\gamma p} e^{-\int_0^x g^* dx} dx \right), \tag{3.10}$$

а температурные напряжения определяются

$$\sigma_{xx} = e^{\int_0^x \frac{C^{*\,1 + \frac{1}{l_1}}}{\sqrt{a_1}} dx}\, \sigma_{xx}^* + \Phi^*, \tag{3.11}$$

где Φ^* дается формулой (2.8) работы [20]. Напомним, что δ, входящая в (3.9), называется связывающей функцией двух полей.

Таким образом, результаты данной работы позволяют получить полное аналитическое решение поставленной в [20] задачи математического моделирования распространения высокотемпературных возмущений в упругой среде.

Можно предполагать, что возможны аналогичные приложения развитой теории решений уравнения (1.1) к некоторым из прикладных задач, перечисленных в разделе 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. Госиздат. М., 1961. 384 с.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518 с.
3. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его поверхности // ПММ, (1950) 14.3. С.316-318.
4. Векуа И.Н. Теория упругих оболочек. ДАН СССР. Т.68. Вып.3. 1949.
5. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, 1948. 554 с.
6. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. К.: Наука Думка, 1970. 302 с.
7. Королев В.И. Упруго-пластические деформации оболочек. М.: Машиностроение, 1971. 304 с.
8. Коздоба А.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 228 с.
9. Карслау Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
10. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
11. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
12. Тимошенко С.П. Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966, 636 с.
13. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.: Гостехиздат, 1953. 464 с.
14. Чочиев Ф.З. Об одном классе уравнений в частных производных гиперболического типа // Труды пед.ин-та. Сталинир. 2 (1955). С.17-19.
15. Чочиев Ф.З. О приведении волнового уравнения от 4-х переменных к системе линейных уравнений в частных производных первого порядка // Труды пед.ин-та. Сталинир. 2 (1955). С.353-357.
16. Чочиев Ф.З. О некоторых классах уравнений в частных производных второго порядка. // Труды пед.ин-та. Сталинир. 3(1956). С.505-514.
17. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч.II. Владикавказ: Из-во. СОГУ, 2004. С.116.
18. Чочиев Т.З. Температурные напряжения в однородном упругом полупространстве и соответствующее характеристическое уравнение. // Тр. ИПММ НАН Украины, 2004. Вып. 9. С.209-220.
19. Чочиев Т.З. О фундаментальной функции нелинейного температурного поля // Влад. мат. журнал. Т.2. Вып.I, 2000. С.30-43.
20. Чочиев Т.З. Взаимодействие полей деформации и температуры при распространении температурного возмущения // Вестник Харьковского национального университета №775. Вып.7, 2007. С.246-257.
21. Чочиев Т.З. Температурные возмущения с учетом взаимодействия полей деформации и температуры // Труды XIII международного симпозиума МДОЗМФ-2007. Харьков, 2007. С.327-330.