

Анализ численной модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде

Е. В. Белкин, И. В. Гушин

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The mathematical model of modulation instability of the finite-amplitude wave in non-linear medium is considered. The modeling process is described. The stages of the modulation instability spectrum forming and the amplitude modulation of the main wave are illustrated. The possibility of the small-amplitude modes elimination from simulation process is shown

1. Описание модели.

Как известно, монохроматическая волна конечной амплитуды в средах с кубической нелинейностью является неустойчивой с возбуждением боковых спектров вынужденных возмущений [1]. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны (или структуры). Что и определило название этого типа неустойчивостей – модуляционные. В условиях поглощения энергии возмущений в среде инкременты модуляционной неустойчивости уменьшаются и, вообще говоря, существует пороговая амплитуда начальной волны или структуры, при превышении которой неустойчивость развивается [2,3]. Отметим, что для наблюдения модуляционной неустойчивости в поглощающей среде, вообще говоря, должен существовать источник энергии, который поддерживает основную волну или структуру. Вблизи порога спектральная ширина неустойчивости невелика, амплитуды возникающих возмущений даже в режиме насыщения остаются много меньше амплитуды начальной волны (или структуры). Взаимодействие возникающих в результате неустойчивости возмущений между собой в этих условиях ослаблено, они в большей степени взаимодействуют с основной волной (структурой), причем их действие на основную волну (структуру) носит интегральный характер [4]. Именно поэтому можно считать, что такая система может быть определена как квазилинейная [5,6].

В последнее время особый интерес вызывают явления вынужденной (обусловленной накачкой [7]) интерференции мод спектра возбуждаемого в результате развития модуляционной неустойчивости интенсивных монохроматических волн. Такие интенсивные волны генерируют мощные приборы сильноточной электроники [8] и квантовые генераторы [9], они также могут возникать на поверхности океана [10] и во множестве других случаев. Общий подход к описанию неустойчивости таких волн предложен в работе [1] (см, также книгу [11]). Однако ранее на процессы интерференции мод возбуждаемого спектра практически внимания не обращали (см, например, обзор [5]). Однако, как показано в работе [7], вынужденная интерференция плотного спектра мод может быть ответственной за появление интенсивных локальных максимумов огибающей волновых пакетов (всплесков). Причем

максимальная амплитуда всплеска пропорциональна ширине спектра Δk (точнее, имеет верхним пределом величину $\sqrt{D\Delta k / \delta k} = \sqrt{D \cdot N}$, где $D = \frac{2}{u_0^2} \sum_{m>0} u_m^2$ уровень дефектности (u_0 и u_m - действительные амплитуды интенсивной волны и m -той моды спектра), δk - спектральная ширина одной моды и N - число мод в спектре [6,7]). Таким образом, заметные всплески огибающей пакетов волн можно наблюдать в достаточно плотных спектрах даже при относительно небольшом уровне дефектности $D \ll 1$. Эти всплески могут определять глубокую модуляцию распространяющихся в волноводах и средах интенсивных волн и интенсивные волны на поверхности океана.

Для выяснения механизмов и частоты появления локальных максимумов огибающей интенсивных волн необходимо обобщить математическую модель, использованную для анализа модуляционной неустойчивости интенсивной волны в поглощающей среде, поддерживаемой внешними источниками [5]. Следовало значительно увеличить число мод спектра (степеней свободы) для увеличения параметра $\sqrt{D \cdot N}$, найти способы ускорения счета за счет исключения мод малой амплитуды (при этом провести анализ корректности такой процедуры) развить методы селекции импульсов, обеспечить их визуализацию и отслеживание каждого значительного всплеска. Именно эти задачи были поставлены в данной работе. Итак, цель данной работы – провести анализ численной модели развития неустойчивости в волновой среде с кубической нелинейностью и конечным поглощением энергии, используя уравнение Лайтхилла [1] с учетом упрощений, основанных на известной симметрии задачи [4].

Пусть амплитуды волновых возмущения подчиняются уравнению Лайтхилла

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\delta E - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - iE|E|^2 + g \quad (1)$$

где δ - декремент затухания колебаний, g - внешний источник, поддерживающий монохроматическую волну конечной амплитуды.

Представим поле как сумму большого числа мод с разными волновыми числами и одной частотой, тем самым осуществив дискретизацию задачи:

$$E = \sum_k E_k(t) \cdot \exp\{ikx - i\omega_0 t\}, \quad (2)$$

где ω_0 - частота, k - волновое число, t - нормированное время, x - нормированная координата, E_k - комплексная амплитуда волны, соответствующей волновому числу k и содержащей фазу φ_k и вещественную амплитуду u_k :

$$E_k = u_k \cdot \exp\{i\varphi_k\} \quad (3)$$

Основная волна конечной амплитуды имеет волновое число k_0 , амплитуды остальных мод остаются малы (по сравнению с основной). Моды спектра

взаимодействуют с основной волной, причем для взаимодействующих выполняется соотношение

$$k_1 + k_2 = 2k_0, \quad (4)$$

которое обусловлено видом нелинейности. Остальными взаимодействиями мод спектра можно пренебречь, в рассматриваемом случае слабого превышения порога неустойчивости ($\delta \approx 1$) [5].

Принимая во внимание взаимодействие мод спектра, получим например уравнение для возмущения с волновым числом k_1 . Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial E_{k_1}}{\partial t} = -\delta E_{k_1} + ik_1^2 E_{k_1} - i\{E | E|^2\}_{k_1} + g_k \quad (5)$$

где $\{E | E|^2\}_{k_1}$ – определяется с учетом взаимодействия мод k_0, k_1, k_2 как:

$$\begin{aligned} \{E | E|^2\}_{k_1} = & \{(E_{k_2} e^{ik_2 x} + E_{k_1} e^{ik_1 x} + E_{k_0} e^{ik_0 x}) \cdot (E_{k_2} e^{ik_2 x} + E_{k_1} e^{ik_1 x} + E_{k_0} e^{ik_0 x}) \times \\ & \times (E_{k_2}^* e^{-ik_2 x} + E_{k_1}^* e^{-ik_1 x} + E_{k_0}^* e^{-ik_0 x})\}_k = 2E_{k_1} |E_{k_0}|^2 + E_{k_2}^* E_{k_0}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

где E_k^* – комплексное сопряжение к E_k .

Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial E_{k_1}}{\partial t} = -\delta E_{k_1} + ik_1^2 E_{k_1} - i\{2E_{k_1} |E_{k_0}|^2 + E_{k_2}^* E_{k_0}^2\} + g_{k_1} \quad (7)$$

Подставив выражение (3) и рассмотрев отдельно мнимую и вещественную часть получим выражение для изменения значений амплитуды и фазы моды с волновым числом k_1 :

$$\frac{\partial u_{k_1}}{\partial t} = -\delta u_{k_1} + u_{k_2} u_{k_0}^2 \sin(2\varphi_{k_0} - \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) + g_{k_1} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k_1}}{\partial t} = k_1^2 - 2u_{k_0}^2 - \frac{u_{k_2}}{u_{k_1}} u_{k_0}^2 \cos(2\varphi_{k_0} - \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) \quad (9)$$

Заметим, что из всех источников накачки g_k отличен от нуля только g_0 , поддерживающий основную волну.

Далее получим выражение, определяющее изменение амплитуды и фазы основной волны. С учетом условия взаимодействия (4) уравнение (1) переписывается для основной волны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{k_0}}{\partial t} = & -\delta E_{k_0} + ik_0^2 E_{k_0} - i\{2E_{k_0} \sum_{k_1} |E_{k_1}|^2 + 2E_{k_0} \sum_{k_2} |E_{k_2}|^2 + \\ & + E_{k_0}^* \sum_{k_1, k_2} E_{k_1} E_{k_2} + E_{k_0}^* \sum_{k_1, k_2} E_{k_2} E_{k_1}\} + g_0 \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что суммирование идет по всем k_1, k_2 , удовлетворяющим условию взаимодействия (4).

Принимая во внимание уравнение (3), легко видеть, что

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial t} \cdot \exp(i\varphi_k) + i \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} u_k \cdot \exp(i\varphi_k) \quad (11)$$

Следовательно, из уравнений (3), (10) и (11) получаем:

$$\begin{aligned} & (\partial u_{k_0} / \partial t) \cdot \exp\{i\varphi_{k_0}\} + i(\partial \varphi_{k_0} / \partial t) \cdot u_{k_0} \cdot \exp\{i\varphi_{k_0}\} = \\ & = -\delta u_{k_0} \cdot \exp\{i\varphi_{k_0}\} + ik_0^2 u_{k_0} \cdot \exp\{i\varphi_{k_0}\} - \\ & - i\{2u_{k_0} \cdot \exp\{i\varphi_{k_0}\} \sum_{k_1} u_{k_1}^2 + 2u_{k_0} \cdot \exp\{i\varphi_{k_0}\} \sum_{k_2} u_{k_2}^2 + \\ & + u_{k_0} \cdot \exp\{-i\varphi_{k_0}\} \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \exp\{i\varphi_{k_1} + i\varphi_{k_2}\} + \\ & + u_{k_0} \cdot \exp\{-i\varphi_{k_0}\} \sum_{k_1, k_2} u_{k_2} u_{k_1} \exp\{i\varphi_{k_2} + i\varphi_{k_1}\}\} + g_0 \end{aligned}$$

В работе [4] показана симметрия мод с волновыми числами k_1, k_2 , подчиняющимися условию (4), откуда следует равенство амплитуд u_{k_1}, u_{k_2} . На основании данного факта уравнение упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\partial u_{k_0} / \partial t) + i(\partial \varphi_{k_0} / \partial t) \cdot u_{k_0} = -\delta u_{k_0} + ik_0^2 u_{k_0} - \\ & - i(4u_{k_0} \sum_{k_1} u_{k_1}^2 + 2u_{k_0} \cdot \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \exp\{i\varphi_{k_1} + i\varphi_{k_2} - 2i\varphi_{k_0}\}) + g_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Рассматривая отдельно действительные и мнимые члены, получаем:

$$\frac{\partial u_{k_0}}{\partial t} = -\delta u_{k_0} + 2u_{k_0} \cdot \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \text{Sin}\{\varphi_{k_1} + \varphi_{k_2} - 2\varphi_{k_0}\} + g_0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k_0}}{\partial t} = k_0^2 - (4 \sum_{k_1} u_{k_1}^2 + 2 \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \text{Cos}\{\varphi_{k_1} + \varphi_{k_2} - 2\varphi_{k_0}\}) \quad (14)$$

2. Построение дискретной модели.

Для построения дискретной модели процесса выберем достаточно большое количество разрешенных мод, обозначив его как $2N$. Обозначим разрешенные моды индексами $n \in [-N, N]$, причем индексом $n=0$ будем обозначать моду основной волны. Амплитуду, волновое число и фазу n -ой моды обозначим соответственно u_n, k_n, φ_n .

Запишем условие возникновения неустойчивости основной волны:

$$-\delta + (-\Delta_i^2 - 4\Delta_i u_0^2)^{1/2} / 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -2(1 + \sqrt{1 - \delta^2}) < \Delta_i < -2(1 - \sqrt{1 - \delta^2}),$$

где $\Delta_i = 2k_0^2 - k_m^2 - k_l^2$, а $k_m + k_l = 2k_0$. Тогда волновые числа мод неустойчивости могут быть определены следующим образом:

$$k_{\pm n} = k_0 \pm \left| \sqrt{1 + \left(\frac{2|n| - N}{N}\right) \sqrt{1 - \delta}} \right| \quad (15)$$

Такое определение охватывает интервал возникновения неустойчивости, а также является симметричным относительно волнового числа k_0 , что существенно упрощает дальнейшие расчеты. Так, например, условие (4) записывается для всех мод в виде:

$$k_n + k_{-n} = 2k_0 \quad (16)$$

из чего на основании вышеупомянутой симметрии следует, что $u_n = u_{-n}$, и уравнения (8,9,13,14) переписываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} = -\delta u_0 + 2u_0 \cdot \sum_{m>0}^N u_m \sin \Phi_m + g \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = k_0^2 - u_0^2 - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \cos \Phi_m \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} = u_n \{-\delta + u_0^2 \sin \Phi_n\} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = k_n^2 - 2(u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 - \frac{1}{2} u_n^2) - u_0^2 \cos \Phi_n \end{cases} \quad (17)$$

где $\Phi_n = 2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}$; $n = \mathbf{Z} \cap [-N, N]$, $n \neq 0$

Система (17) представляет собой задачу Коши, состоящую из $2N+1$ нелинейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, определяемыми следующими выражениями (18):

$$\begin{aligned} u_0|_{t=0} &= 1 & u_n|_{t=0} &= 0,01 \frac{1}{N} \sqrt{1-\delta} \\ \varphi_0|_{t=0} &= 0 & \varphi_n|_{t=0} &\in [0; 2\pi) \\ \delta &\in [0,8; 1] & g &\in [0,8; 1] \end{aligned} \quad (18)$$

$\varphi_n|_{t=0}$ выбирается из отрезка случайным образом. Ограничения на уровень поглощения энергии δ и уровень источника внешней силы g накладывается для соблюдения предположения об отсутствии взаимодействия мод неустойчивости, сделанного при построении модели. Волновые числа вычисляются согласно выражению (15).

Решение задачи предлагается методом сеток путем представления производных в виде конечных разностей. Вычисление прибавки значений на i -ом шаге итерации производится исходя из дискретизированной системы уравнений (17), используя значения полученные на $(i-1)$ -ом шаге:

$$\begin{aligned}
\Delta u_0 \Big|_{t_i} &= (-\delta u_0 \Big|_{t_{i-1}} + 2u_0 \Big|_{t_{i-1}} \cdot \sum_{m>0}^N u_m \Big|_{t_{i-1}} \sin \Phi_m \Big|_{t_{i-1}} + g) \Delta t \\
\Delta \varphi_0 \Big|_{t_i} &= (k_0^2 - u_0^2 \Big|_{t_{i-1}} - 4 \sum_{m>0}^N u_m^2 \Big|_{t_{i-1}} - 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \Big|_{t_{i-1}} \cos \Phi_m \Big|_{t_{i-1}}) \Delta t \\
\Delta u_n \Big|_{t_i} &= (u_n \Big|_{t_{i-1}} \{-\delta + u_0^2 \Big|_{t_{i-1}} \sin \Phi_n \Big|_{t_{i-1}}\}) \Delta t \\
\Delta \varphi_n \Big|_{t_i} &= (k_n^2 - 2(u_0^2 \Big|_{t_{i-1}} + 2 \sum_{m>0}^N u_m^2 \Big|_{t_{i-1}} - \frac{1}{2} u_n^2 \Big|_{t_{i-1}}) - u_0^2 \Big|_{t_{i-1}} \cos \Phi_n \Big|_{t_{i-1}}) \Delta t
\end{aligned} \tag{19}$$

Далее осуществляется вычисление значений переменных:

$$\begin{aligned}
\varphi_k \Big|_{t_i} &= \varphi_k \Big|_{t_{i-1}} + \Delta \varphi_k \Big|_{t_i}, \quad u_k \Big|_{t_i} = u_k \Big|_{t_{i-1}} + \Delta u_k \Big|_{t_i}, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t \\
\forall k \in \mathbf{Z} \cap [-N, N]
\end{aligned}$$

и переход на следующий шаг итерации.

Для проверки сходимости решений системы проведем ряд наблюдений за интегральным показателем системы $I = u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N u_m^2$. На рис 1 приведен график

зависимости данного показателя от времени для 20 экспериментов с разными начальными значениями φ_n . Из рис. 1 видно, что разброс показателя не превышает 0.01% начального значения $I \approx 1$, что подтверждает сходимость решения данной системы.

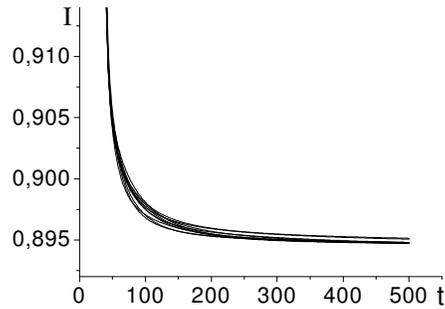


Рис 1. Зависимость интегрального показателя I от параметра t для серии из 20 численных экспериментов

3. Выбор оптимального шага моделирования.

Для повышения эффективности моделирования и ускорения процессов расчета вышеописанной модели, необходимо выбрать оптимальное значение шага, используемого при решении дифференциальных уравнений численными методами. Для выбора значения шага Δt можно руководствоваться графиками точности расчетов, приведенными на рис. 2. Данные графики отображают

относительную погрешность $R_{\Delta t}(t, \Delta t) = \frac{|u_m - u'_m|}{u_m} \cdot 100\%$ амплитуды выбранной моды, где $u_m(t)$ – значение амплитуды возбужденной моды, полученной при шаге $\Delta t = h$, $u'_m(t)$ – значение той же моды, полученные при шаге $\Delta t = 2h$, для $\delta = 0.8, g = 0.8, N = 100$.

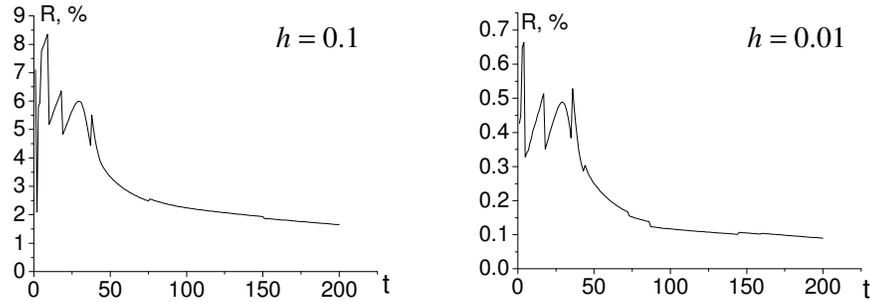


Рис. 2. Графики точности для различных значений шага Δt .

Как видно из графиков, приемлемая точность расчетов достигается при значении шага $\Delta t \leq 0,01$. Учитывая то, что при увеличении значения шага моделирования скорость расчетов также увеличивается, целесообразно взять максимальное значение шага, обеспечивающее требуемую точность. В дальнейших численных экспериментах, упоминающихся в данной работе, используется значения $\Delta t = 0.01$. Для получения более быстрых, но менее точных оценочных решений может применяться большее значение шага.

Из графиков на рис 2 также видно, что значение относительной ошибки убывает со временем. Данный факт позволяет предположить, что модель корректирует накопленную ошибку, приводя систему в долгоживущее состояние, определяемое параметрами, и, следовательно, устойчива к случайным воздействиям малой величины, что будет использовано ниже.

4. Исключение неактивных мод спектра в процессе моделирования для уменьшения ресурсоемкости вычислений.

Ресурсоемкость вычислений описанной выше модели является небольшой и составляет порядка $2N$ вычислений тригонометрических функций и $4N$ операций умножения чисел с плавающей точкой на каждом шаге итерации. Однако планируемая модификация модели, которая учитывает взаимодействие между модами спектра, существенно увеличивает ресурсоемкость, которая может составить порядка $2N^2$ вычислений тригонометрических функций и $8N^2$ операций умножения чисел с плавающей точкой для каждого шага итерации. Для одномерной задачи характерное число мод, обеспечивающее достаточно плотное расположение волновых чисел, составляет $N \approx 200$. В случае рассмотрения двумерной задачи, число мод может достигать $N \approx 1000$ и

более. При такой ресурсоемкости набор достаточного количества статистических данных отнимает существенное время.

В качестве одного из методов уменьшения ресурсоемкости данной задачи предложено исключать из процесса моделирования моды, амплитуда которых приблизилась к нулю и уже не может возрасти.

С этой целью в алгоритм расчетов вводится процедура, определяющая возможность исключения незначительных мод. Процедура применяется при переходе системы в квазилинейную стадию, которая характеризуется слабыми изменениями ширины спектра и амплитуд возбужденных мод.

Анализируя производную амплитуды по времени $\frac{du_n}{dt}$ и значение амплитуды моды u_n начиная с номера $n = N$, двигаясь в сторону уменьшения номеров, до тех пор пока не найдется номер N_{out} , такой что $u_n \geq \varepsilon$ или $\left| \frac{du_{N_{out}}}{dt} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, где ε – малое число, подбираемое исходя из требуемой точности.

Основываясь на том факте, что $u_n = u_{-n}$ можно принять решение об исключении из расчета мод с номерами $n \geq N_{out} + 1$ и $n \leq -(N_{out} + 1)$ (рис. 3)

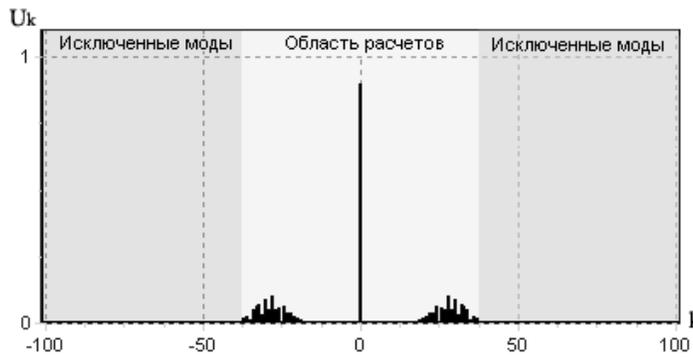


Рис. 3. Исключение неактивных мод

5. Анализ ошибок, вносимых исключением неактивных мод в локальную и интегральную характеристики спектра.

На рис. 4 приведены графики зависимости относительной ошибки, вносимой данным алгоритмом в амплитуду выбранной моды возбужденного спектра u_m

от времени t . Ошибка вычисляется по формуле $R_u(t, \varepsilon) = \frac{|u_m(t) - u'_m(t)|}{u_m(t)} \cdot 100\%$,

где $m = 28$ – номер моды, которая остается возбужденной до конца моделирования, $u_m(t)$ – амплитуда моды, полученная при моделировании без применения алгоритма исключения мод, $u'_m(t)$ – амплитуда той же моды, полученная в результате моделирования с исключением мод. Приведены графики для разных значений порога исключения ε . Аналогичный показатель

для интегрального показателя – интенсивности спектра $I = \sum_m u_m^2$ приведен на рис. 5.

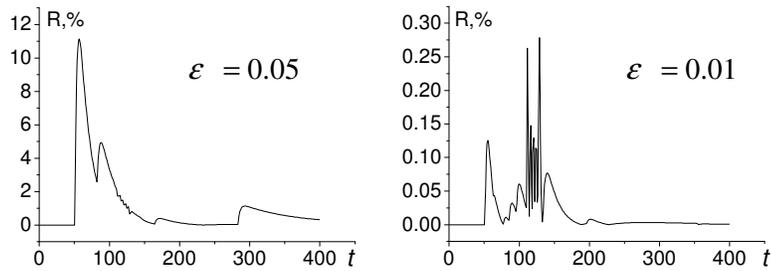


Рис. 4. Графики ошибок $R_u(t, \varepsilon) = \frac{|u_m - u'_m|}{u_m} \cdot 100\%$, вносимых алгоритмом исключения мод для разных значений порога исключения ε

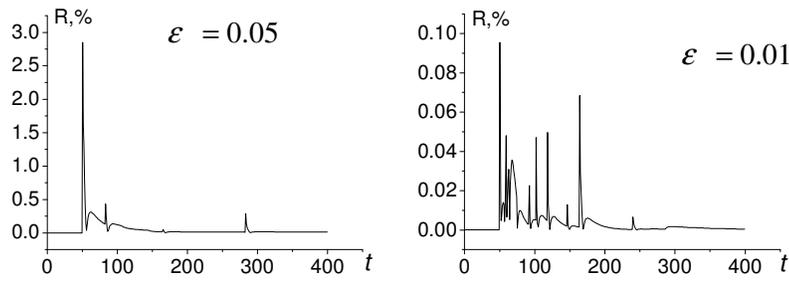


Рис. 5. Графики ошибок $R_I(t, \varepsilon) = \frac{|I - I'|}{I} \cdot 100\%$, вносимых алгоритмом исключения мод для разных значений порога исключения ε в значение интенсивности спектра

Из графиков, приведенных на рисунках 4,5, видно, что ошибка, внесенная в систему исключением неактивных мод, быстро ликвидируется. Самоликвидация малых возмущений говорит о высокой устойчивости расчетной схемы и высокой стабильности сформированной пространственной структуры с физической точки зрения.

Применение данного метода позволяет ускорить процесс моделирования в 1.3 раза для $N=100$, в 1.5 раза для $N=200$ без существенной потери точности. Также, данный метод исключения слабо возбужденных мод может быть с успехом применен в двумерной модификации данной задачи, где его эффективность может быть выше, в связи с большим количеством мод.

6. Результаты численного эксперимента.

При уровне надпороговости $\delta = 0,80$ имеем следующую картину эксперимента. На начальной, линейной стадии процесса в спектре наблюдается одна основная мода и происходит экспоненциальный рост спектров неустойчивости. Значения амплитуд неустойчивых мод на данном этапе малы, поэтому не оказывают существенного влияния на основную волну. Основная волна имеет вид синусоиды, огибающая основной волны имеет вид практически прямой линии, т.к. основная волна не модулирована. При этом малы уровень дефектности структуры $D = \frac{2}{u_0^2} \sum_{m>0} u_m^2$ и уровень интенсивности спектра

$I_s = 2 \sum_{m>0} u_m^2$, а интенсивность основной волны $I_0 = u_0^2$ близка к единице.

При дальнейшем развитии процесса неустойчивости производная амплитуд мод спектра неустойчивости по времени достигает своего максимума, формируется спектр возбужденных мод, амплитуды которых достигают значений, уже достаточных для заметного воздействия на основную волну. Волновые числа возбуждаемых мод симметрично располагаются по обе стороны от значения волнового числа основной волны (рис. 6).

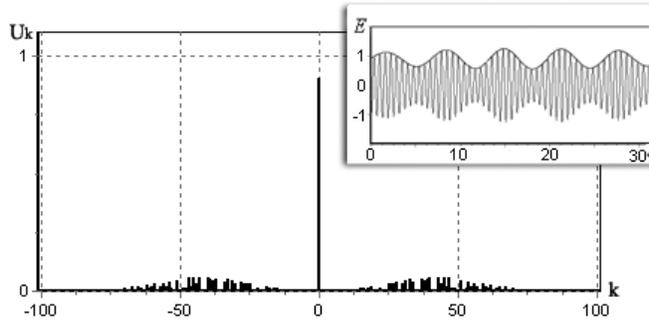


Рис. 6. Возбуждение широкого спектра неустойчивости и слабое изменение амплитуды основной волны ($t \approx 50$, $\delta = 0,80$)

На данном этапе спектр относительно широкий, амплитуда возбужденных мод составляет 1–5 % от амплитуды основной, их суммарное действие приводит к отклонениям вида основной волны на 15–20% от правильной синусоидальной формы. На данном этапе развития процесса неустойчивости наблюдается рост уровня дефектности D

На следующем этапе развития процесса ($t > 100$) наблюдается сужение спектров модуляционной неустойчивости с одновременным увеличением амплитуд мод, расположенных в средней области спектра (рис. 7).

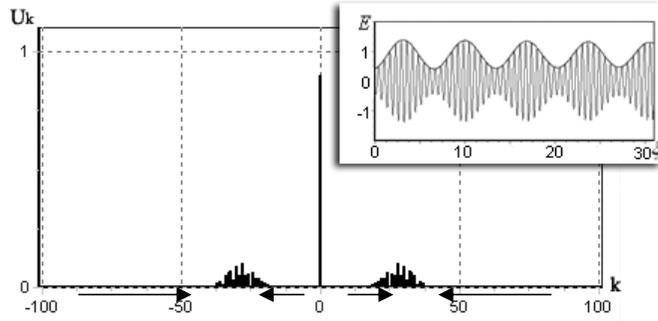


Рис. 7. Спектр развитой неустойчивости и промодулированная основная волна ($t \approx 300$, $\delta = 0,80$).

Производная амплитуд периферийных мод спектров от времени принимает отрицательное значение, спектры как целое смещаются в сторону волнового числа основной моды. Далее скорость изменения амплитуды возбужденных мод уменьшается, и система выходит на квазилинейный режим неустойчивости.

Увеличение амплитуды возбужденных мод приводит к более выраженному воздействию на основную волну. В результате такого воздействия всплески амплитуды последней могут превышать начальную амплитуду в 1,5-1,7 раза. Это механизм взаимодействия мод спектра получил название вынужденной интерференции [7].

В серии из 10 экспериментов (момент фиксации результатов $t = 300$, число мод в системе $N = 200$, уровень линейного поглощения $\delta = 0,80$) максимальная амплитуда составила 1,74 при средних значениях амплитуды основной волны 0,8490 (таким образом, амплитуда всплеска превысила средний уровень в 2 раза). В остальных случаях амплитуда максимального всплеска умирающей находилась в диапазоне от 1,5 до 1,66.

7. Заключение

Таким образом, в работе показано, что с ростом количества мод спектра N и увеличения надпороговости (при этом растет уровень дефектности D), амплитуда всплесков на начальной стадии квазилинейного режима неустойчивости растет. Изучена динамика сужения спектра, процесс которого приводит к снижению эффектов интерференции. Это позволяет выделить важные для практических применений интервалы времени развития процесса неустойчивости, при которых амплитуды всплесков могут достигать максимальных значений. Дальнейшие исследования должны ответить на вопрос об оценке влияния начальных условий на возникновение всплесков большой амплитуды и характере дальнейшей динамики подобного всплеска с течением времени.

Также в работе была подтверждена возможность исключения из расчетной схемы большого числа мод малой амплитуды, что позволило сократить время расчетов. Анализ возникших при таком исключении ошибок показал, что, в частности, данная система интегро-дифференциальных уравнений со временем уменьшает значения отклонений от полномасштабного варианта расчета как для

интегральных (энергия спектра), так и для локальных (энергия отдельных мод в центре спектра) переменных задачи. Этот факт, с определенностью подтвержденный большой серией численных расчетов, не только свидетельствует о высокой надежности расчетной модели, но и позволяет ее существенно упростить. Кроме того, для получения статистических данных о всплесках разработана программа поиска групп локальных максимумов, способная в перспективе обрабатывать большие массивы данных и формировать базы данных о количественных и качественных характеристиках исследуемых структур.

Авторы выражают благодарность Ю. В. Ганделю и В. М. Куклину за конструктивные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system // *J. Inst. Math. Appl.* – 1965. – V.1, N.2. – P. 269-306.
2. Valeo E.J. and Olerman C.R. Model of Parametric Excitation by an Imperfect Pump. // *Phys. Rev. Lett.* – 1973 – V.30, N21. – P.1035-1038.
3. Thomson J.J. and Karush J.I. Effect of finite-bandwidth Driver on the Parametrical Instability. // *The Physics of Fluids.* – 1974 – V.17, N8, – P. 1608-1613.
4. Воробьев В.М., Куклин В.М. О механизме возникновения пространственных структур в диссипативных неравновесных средах. // *Письма в ЖТФ.* – 1987 – Т.13, №22. – С. 1354- 1360.
5. В.М. Куклин. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах. // *Украинский физический журнал, Обзоры* – 2004 – Т.1, №1 – С.49-81
6. Белкин Е.В. Куклин В.М. Моделирование развития модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде. // *Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна.* – 2008. – № 794 . – Сер. Ядра, частинки, поля, вип.1. (37) – С.51-56 .
7. Kuklin V.M. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system. // *VANT* – 2006 – №5 (5). – P. 63-68.
8. Месяц Г.А., Яландин М.И. Пикосекундная электроника больших мощностей. // *УФН* – 2005– Том 175, №3, – С. 225-246.
9. Желтиков А.М. Изолированные моды интенсивных световых полей. // *УФН* – 2004 – том 174, № 12 – С.1302-1318.
10. Dyachenko A.I. Zakharov V.E. Modulation instability of stokes wave- freak wave. // *Pis'ma ZhETP* – 2005 – Vol. 81, iss. 6 – P 318-322.
11. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.Наука. 1973. – 175 С.