

Математическая модель дифракции монохроматической волны на идеально проводящем кольцевом волноводе с продольными щелями, заполненным диэлектриком

Ю. В. Гандель, С. В. Духопельников

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина
Национальный технический университет «ХПИ», Украина*

Singular and hypersingular integral equations are derived for diffraction problems by a cylindrical ring waveguide having its inside filled with dielectric, with perfectly conducting inner surface, and perfectly conducting outer surface having longitudinal slots. The discrete mathematical model was made by the method of discrete peculiarities and a numerical experiment was carried out on its basis. Fields are built in the near-field zone.

Введение

В работе рассматривается задача дифракции плоской монохроматической волны на идеально проводящей цилиндрической поверхности покрытой диэлектрическим цилиндром, на внешней поверхности которого – идеально проводящая цилиндрическая поверхность со щелями.

Задача падения плоской Е- или Н-поляризованных волн на кольцевой волновод с одной продольной щелью во внешнем цилиндре, находящемся в вакууме, решались методом парных рядов [1-2], а при отсутствии внутреннего цилиндра методами конечных элементов, методом задачи Римана-Гильберта [3-5], однако они реализовывались только для одной продольной щели. Применяемый подход ранее использовался для решения задачи дифракции плоской монохроматической волны и цилиндрической волны на круговом цилиндре с конечным числом продольных щелей находящимся в однородной среде (предполагался вакуум) [6].

Рассматриваемые в данной работе задачи представляют значительный практический интерес, в связи с необходимостью рассчитывать соответствующие антенные устройства. Эта задача теории дифракции волн приводит к краевой задаче для уравнений Максвелла. Эти задачи для уравнений Максвелла служат математическими моделями цилиндрических электродинамических структур и нашли широкое применение при проектировании и создании апертурных и поверхностных антенн, открытых резонаторов, щелевых волноводов и фильтров на их основе.

Целью работы является создание математической модели для данных структур и разработка программного обеспечения для расчетов физических характеристик.

1 Постановка краевой задачи для уравнений Максвелла

Опишем геометрию задачи.

Введем обозначения $L = \bigcup_{i=1}^p (\alpha_i, \beta_i)$, $CL = [-\pi, \pi] \setminus L$. Дуги внешней окружности S_{R_2} , радиуса R_2 с центром в начале координат, $-(a_q, b_q)$ (рис.1).

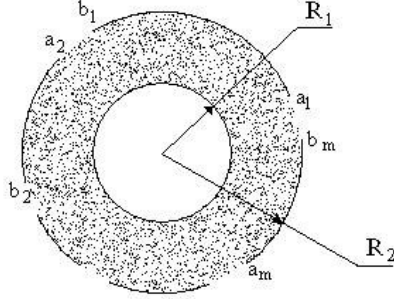


Рис 1. Сечение цилиндрического кольца заполненного диэлектриком, внутренняя часть границы – окружность, внешняя часть – окружность с конечным числом щелей

Был рассмотрен стационарный случай $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ (монохроматические волны, ω – угловая частота). Волновой вектор плоской волны направлен перпендикулярно к образующим цилиндров. Количество продольных щелей во внешнем цилиндре прорезано конечное. Пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком.

Поля во внутренности и во внешности рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad (2)$$

Предполагается, что источники отсутствуют, так что выполняются условия:

$$\text{div}\mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

а так же

$$\text{div}\mathbf{H} = 0.$$

На идеально проводящих поверхностях выполнено граничное условие:

$$\left[\mathbf{E}(r, \phi), \mathbf{n} \right]_{\substack{r=R_1 \\ \phi \in [0, 2\pi)}} = 0, \left[\mathbf{E}(R_2, \phi), \mathbf{n} \right]_{\phi \in CL} = 0. \quad (4)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к цилиндрическим поверхностям.

Рассматривается двумерная задача: электромагнитное поле не зависит от координаты z . Запишем уравнения Максвелла, для системы полей $\mathbf{E}(r, \phi, z) = \mathbf{E}(r, \phi)$ и $\mathbf{H}(r, \phi, z) = \mathbf{H}(r, \phi)$:

$$\frac{1}{r} \partial_\phi E_z(r, \phi) = i\omega\mu H_r(r, \phi), \quad (5)$$

$$\partial_r E_z(r, \phi) = -i\omega\mu H_\phi(r, \phi), \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r H_\phi(r, \phi)) - \frac{1}{r} \partial_\phi H_r(r, \phi) = -i\omega\epsilon E_z(r, \phi); \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \partial_\phi H_z(r, \phi) = -i\omega \varepsilon E_r(r, \phi), \quad (8)$$

$$\partial_r H_z(r, \phi) = i\omega \varepsilon E_\phi(r, \phi), \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r E_\phi(r, \phi)) - \frac{1}{r} \partial_\phi E_r(r, \phi) = i\omega \mu H_z(r, \phi). \quad (10)$$

Запишем граничное условие, на внешнем ($r = R_2$) щелевом цилиндре, для компоненты $E_z(r, \phi)$ непосредственно из (4), а для $H_z(r, \phi)$ – используя связь между компонентами электрического и магнитного полей, которые следуют из уравнений Максвелла:

$$E_z(R_2, \phi) = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in CL, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (H_z(R_2, \phi)) = -\frac{\partial}{\partial \rho} (H_{0z}(R_2, \phi)), \quad \phi \in CL. \quad (12)$$

Система уравнений Максвелла (1-2), распадается на две независимые подсистемы [3,7], одна из них – сводится к краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца (Н-поляризация) (8-10); а вторая – к краевой задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца (Е-поляризация) (5-7). При этом векторы электрического и магнитного полей имеют вид: Е-поляризация – $(0, 0, E_z), (H_r, H_\phi, 0)$; Н-поляризация – $(E_r, E_\phi, 0), (0, 0, H_z)$. В обоих случаях, а именно для нахождения полного поля необходимо найти единственную функцию, продольную компоненту электрического поля $E_z(r, \phi)$ или продольную компоненту магнитного поля $H_z(r, \phi)$, соответственно. По найденным компонентам оставшиеся восстанавливаются однозначно по формулам (5-10).

Задача Дирихле. Компонента $E_z(r, \phi)$ удовлетворяет:

–уравнению Гельмгольца

$$\Delta E_z(r, \phi) + k^2 E_z(r, \phi) = 0, \quad (13)$$

где $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2$;

–граничному условию

$$E_z(a, \phi) = -E_{0z}(a, \phi), \quad \phi \in L, \quad (14)$$

где $E_{0z}(r, \phi) = e^{ikr \cos \phi}$, $k = \frac{\omega}{c}$, c – скорость света в вакууме;

–условию излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial E_z(r, \phi)}{\partial r} - ik E_z(r, \phi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty; \quad (15)$$

–условию Майкснера на ребре

$$\int_{\Omega} \left[k^2 |E_z|^2 + |\nabla E_z|^2 \right] ds < \infty \quad (16)$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$.

Задача Неймана. Компонента $H_z(r, \phi)$ удовлетворяет:

–уравнению Гельмгольца

$$\Delta H_z(r, \phi) + k^2 H_z(r, \phi) = 0, \quad (17)$$

–граничному условию

$$\partial_r H_z(a, \phi) = -\partial_r H_{0z}(a, \phi), \quad \phi \in L \quad (18)$$

где $H_{0z}(r, \phi) = e^{ikr \cos \phi}$,

–условию излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial H_z(r, \phi)}{\partial r} - ik H_z(r, \phi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (19)$$

–условию Майкснера на ребре

$$\int_{\Omega} \left[k^2 |H_z|^2 + |\nabla H_z|^2 \right] ds < \infty \quad (20)$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$.

Ограничения искомой функции $u(r, \phi)$ на внутренность $R_1 < r < R_2$ и внешность $r > R_2$ кольца, соответственно $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$, при этом для задачи Дирихле $u(r, \phi) = E_z(r, \phi)$, а для задачи Неймана $u(r, \phi) = H_z(r, \phi)$. Если функции $u^+(r, \phi)$, $R_1 < r < R_2$ и $u^-(r, \phi)$ $r > R_2$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены т.н. «условия сопряжения»:

$$u^+(r, \phi) \Big|_{r=R_2} = u^-(r, \phi) \Big|_{r=R_2}, \quad \phi \in C\bar{L}, \quad (21)$$

и

$$\frac{\partial u^+(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \frac{\partial u^-(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad \phi \in C\bar{L}, \quad (22)$$

то существует функция $u(r, \phi)$ удовлетворяющая уравнению Гельмгольца в пространстве $\{r > R_1, \phi \in [0, 2\pi)\}$ без объединения дуг $\bigcup_{q=1}^m [a_q, b_q]$ окружности S_{R_2} , причем $u(r, \phi) = u^+(r, \phi)$, $R_1 < r < R_2$ и $u(r, \phi) = u^-(r, \phi)$, $r > R_2$.

Условия сопряжения, в раскрывах цилиндра, имеют вид:

$$H_{\phi}^+(R_2, \phi) = H_{\phi}^-(R_2, \phi), \quad \phi \in CL_q, \quad q = 1, \dots, m, \quad (23)$$

$$H_z^+(R_2, \phi) = H_z^-(R_2, \phi), \quad \phi \in CL_q, \quad q = 1, \dots, m, \quad (24)$$

$$E_{\phi}^+(R_2, \phi) = E_{\phi}^-(R_2, \phi), \quad \phi \in CL_q, \quad q = 1, \dots, m, \quad (25)$$

$$E_z^+(R_2, \phi) = E_z^-(R_2, \phi), \quad \phi \in CL_q, \quad q = 1, \dots, m. \quad (26)$$

2. Парный ряд Фурье для компоненты $E_z(r, \phi)$ электрического поля

Используя уравнения Максвелла, условие сопряжение (23) примет вид:

$$\partial_{\rho} E_z^+(R_2, \phi) = \partial_{\rho} E_z^-(R_2, \phi), \quad \phi \in CL_q, \quad q = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Действуя так же как в [8], запишем Фурье-представления для полей:

$$E_z^+(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ V_n^E(k^+ \rho) e^{in\phi}, \quad \rho \in [R_1, R_2], \quad (28)$$

$$\text{где } V_n^E(k\rho) = \frac{J_n(k^+ R_1) Y_n(k^+ \rho) - Y_n(k^+ R_1) J_n(k^+ \rho)}{J_n(k^+ R_1) Y_n(k^+ R_2) - Y_n(k^+ R_1) J_n(k^+ R_2)},$$

$$E_z^-(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- \rho) e^{in\phi}, \quad \rho > R_2, \quad (29)$$

где $J_n(z)$ – функция Бесселя порядка n , $Y_n(z)$ – функция Неймана порядка n , $H_n^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля I-рода порядка n .

Из условия сопряжения (26) и граничного условия (14) имеем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ e^{in\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) e^{in\phi}, \quad \phi \in CL,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ e^{in\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in L_q, \quad q = 1, \dots, m.$$

Из этих двух равенств получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ e^{in\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) e^{in\phi}, \quad \phi \in R, \quad \text{н.в.}$$

А так как ряды Фурье равны почти всюду на всей оси, то и их коэффициенты совпадают, имеют место соотношения:

$$C_n^+ = C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Запишем парный ряд Фурье с введенными коэффициентами C_n

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right) e^{in\phi} = 0, & \phi \in CL \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), & \phi \in L \end{cases},$$

Вводя новые неизвестные коэффициенты:

$$B_n = C_n \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

приходим окончательно к парному ряду Фурье:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi} = 0, & \phi \in CL \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \Gamma_n^E e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), & \phi \in L \end{cases}, \quad (30)$$

здесь

$$\Gamma_n^E = \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right)^{-1},$$

причем $\Gamma_n^E - \frac{A_1}{|n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, где $A_1 = \frac{k^- R_2}{2}$

3. Интегральное уравнение с логарифмическим ядром для компоненты электрического поля

Перепишем второе уравнение из (30) в виде:

$$A_1 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{B_n}{|n|} e^{in\phi} + B_0 \Gamma_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} B_n \left(\Gamma_n - A_1 \frac{1}{|n|} \right) e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in CL, \quad (31)$$

Действуя так же как в [9-10], введем неизвестную функцию:

$v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi}$, через которую выражаются все неизвестные коэффициенты

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{CL} v(\phi) e^{-in\phi} d\phi.$$

Используя параметрическое представление интегрального оператора с логарифмическим ядром [11], приходим к интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L v(\phi) d\phi - \frac{A}{\pi} \int_L v(\phi) \ln \left| \sin \frac{\phi - \phi_0}{2} \right| d\phi - \frac{A \ln 2}{\pi} \int_L v(\phi) d\phi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_L K^E(\phi, \phi_0) v(\phi) d\phi = -E_{0z}(r, \phi_0) \Big|_{r=R_2}, \quad \phi_0 \in L, \end{aligned} \quad (32)$$

где $K^E(\phi, \phi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - A \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(\phi - \phi_0))$.

Перепишем уравнение (32) в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{B}{\pi} \int_L v(\theta) \ln |\theta - \phi| d\theta - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L v(\theta) d\theta - \frac{B}{\pi} \int_L v(\theta) \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta - \phi}{2}}{\frac{\theta - \phi}{2}} \right| d\theta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_L K(\theta, \phi) v(\theta) d\theta = -u_0(r, \phi) \Big|_{r=a}, \quad \phi \in L, \end{aligned} \quad (33)$$

Условие Майкснера на ребре (16) будет выполнено, если сужение функции $v(\theta)$ на интервал (α_q, β_q) имеет вид:

$$v(\theta) \Big|_{(\alpha_q, \beta_q)} = \frac{w_q(\theta)}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}}, \quad \alpha_q < \theta < \beta_q,$$

где $w_q(\theta)$, $\theta \in [\alpha_q, \beta_q]$ функция непрерывная по Гельдеру.

Поскольку L есть объединение непересекающихся интервалов, перепишем уравнение (33) в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{B}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln|\theta - \phi| \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} - \\ & -\frac{B}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta - \phi}{2}}{\frac{\theta - \phi}{2}} \right| \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K(\theta, \phi) w_q(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} = -u_0(r, \phi) \Big|_{r=a}, \quad \phi \in L. \end{aligned} \quad (34)$$

Действуя далее так же как в [7] введем отображения:

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2},$$

при этом

$$\frac{w_q(\theta)}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{\gamma_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Сделав замену переменных в каждом из интегралов, переходим от интегрального уравнения на системе интервалов к системе интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln|g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ & -\frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \tilde{K}_{pq}(t, t_0) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_q(t_0), \quad q=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{где } \tilde{K}_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(g_p(t) - g_q(t_0))),$$

$$f_q(t_0) = -u_0(r, g_q(t_0)) \Big|_{r=a}.$$

4. Сингулярное интегральное уравнение задачи Дирихле

Продифференцировав уравнения в (35) по параметру t_0 , приходим к сингулярному интегральному уравнению. Дополнительное условие получаем путем домножения на весовую функцию $\frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}$ правой и левой частей

уравнения (35) и интегрируя по интервалу $(-1,1)$ используя известное

$$\text{соотношение [11]} \quad \int_{-1}^1 \ln|t-t_0| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\pi \ln 2.$$

Получаем систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_q(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{B}{\pi} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{1}{g_p(t) - g_q(t_0)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & + \frac{B}{2\pi} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \left[\text{ctg} \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t)} \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \bar{K}_{pq}(t, t_0) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_q'(t_0), \quad q=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\bar{K}_{pq}(t, t_0) = \left(\tilde{K}_{pq}(t, t_0) \right)'_{t_0} = \frac{b_q - a_q}{2} \sum n \left(\Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin \left(n(g_p(t) - g_q(t_0)) \right),$$

и дополнительное условие:

$$\begin{aligned} & \frac{B}{\pi} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ & - \frac{B}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ & - \frac{\Gamma_0}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ & - \frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 f_q(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \quad q=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (37)$$

причем интеграл $\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ нужно понимать в смысле главного значения по Коши.

5. Дискретная математическая модель системы сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями

При дискретизации интегрального уравнения (36) и дополнительного условия (37) неизвестную функцию $\gamma_p(t)$ заменяем ее интерполяционным полиномом, а

входящие в уравнение интегралы – интерполяционными квадратурными формулами, предварительно заменив ядра уравнений их интерполяционными полиномами с теми же узлами, как это сделано например в [7].

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\gamma_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = f_q'(t_{0j}^{N_q}) \\ & \frac{B}{N_q} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} \gamma_q(t_i^{N_q}) + \\ & \quad + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = \int_{-1}^1 f_q(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \end{aligned} \right. , \quad (38)$$

$$j = 1, \dots, N_q - 1, \quad q = 1, \dots, m,$$

где

$$\begin{aligned} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) &= \frac{B}{2} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})}{2} - \frac{2}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} \right] + \\ &+ B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} + \bar{K}_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}), \quad p \neq q \\ G_{qq}(t_i^{N_q}, t_{0j}^{N_q}) &= \frac{B}{2} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_{0j}^{N_q})}{2} - \frac{2}{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} \right] + \\ &+ \bar{K}_{qq}(t_i^{N_q}, t_{0j}^{N_q}), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_{pq}(t_i^{N_p}) &= -B \int_{-1}^1 \ln \left| g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0) \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} - \\ &- B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0)}{2}}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0)} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t_i^{N_p}, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \quad p \neq q, \\ Q_{qq}(t_i^{N_q}) &= -\frac{\Gamma_0}{2} - B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_0)}{2}}{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_0)} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{qq}(t_i^{N_q}, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \end{aligned}$$

а $t_k^N = \cos \frac{2k-1}{2N} \pi$ - нули полиномов Чебышева I рода и $t_{0j}^N = \cos \frac{j\pi}{N}$ - нули полиномов Чебышева II рода.

Решая СЛАУ (38) находим значения интерполяционного полинома в точках t_k^N с наперед заданной точностью. Неизвестные коэффициенты C_n находятся из формулы:

$$C_n = B_n \Gamma_n^E = \frac{\Gamma_n^E}{2} \sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^{N_q} \gamma_q \left(t_k^{N_q} \right) e^{-ing_q \left(t_k^{N_q} \right)}$$

По найденным значениям строим физические характеристики: диаграмму направленности для компоненты электрического поля, а так же поле в ближней зоне по формулам (28-29).

6. Парный ряд Фурье для компоненты $H_z(r, \phi)$ магнитного поля

Запишем условие сопряжения (25) используя соотношения между компонентами электромагнитного поля, которые вытекают из уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{i\omega\epsilon^+} \partial_\rho H_z^+(R_2, \phi) = \frac{1}{i\omega\epsilon^-} \partial_\rho H_z^-(R_2, \phi), \quad \phi \in L_q, \quad q=1, \dots, m. \quad (39)$$

При этом Фурье – представления для полей имеют вид:

$$H_z^+(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ V_n^H(k^+ \rho) e^{in\phi}, \quad \rho \in [R_1, R_2], \quad (40)$$

$$\text{где } V_n^H(k\rho) = \frac{J_n'(k^+ R_1) Y_n(k^+ \rho) - Y_n'(k^+ R_1) J_n(k^+ \rho)}{J_n'(k^+ R_1) Y_n(k^+ R_2) - Y_n'(k^+ R_1) J_n(k^+ R_2)},$$

$$H_z^-(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- \rho) e^{in\phi}, \quad \rho > R_2. \quad (41)$$

Из условия сопряжения (39) и граничного условия (18) имеем:

$$C_n^+ = C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Из условия сопряжения (24) и граничного условия (18) получаем парный ряд Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(V_n^H(k^+ R_2) - \frac{H_n^{(1)}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right) e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = -\partial_\rho H_{0z}, \quad \phi \in L \end{array} \right.,$$

Введем обозначения:

$$A_n = C_n \left(V_n^H(k^+ R_2) - \frac{H_n^{(1)}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right),$$

$$\Gamma_n^H = \left(V_n^H(k^+ R_2) - \frac{H_n^{(1)}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right)^{-1},$$

В новых обозначениях парное уравнение принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\phi} = 0, & \phi \in CL \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Gamma_n^H e^{in\phi} = -\partial_\rho H_{0z}, & \phi \in L \end{cases}, \quad (42)$$

используя представления функций Бесселя [12], имеем

$$\Gamma_n^H - B_1 |n| - \frac{B_2}{|n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{где } B_1 = \left(\frac{1}{k^- R_2} + \frac{1}{k^+ R_2} \right)^{-1} \frac{1}{k^+ k^- R_2^2},$$

$$B_2 = \left(\frac{1}{k^- R_2} + \frac{1}{k^+ R_2} \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} \frac{k^+}{k^-} - \frac{1}{4} \frac{k^-}{k^+} + \frac{1}{2} \frac{k^+}{k^+ + k^-} + \frac{1}{4} \frac{k^-}{k^+ + k^-} \right).$$

7. Гиперсингулярное интегральное уравнение для компоненты магнитного поля

Перепишем второе уравнение в системе (42), используя представление для Γ_n :

$$\begin{aligned} A_0 \Gamma_0 + B_1 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_n |n| e^{in\phi} + B_2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_n \frac{1}{|n|} e^{in\phi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} K_n A_n e^{in\phi} = \\ = -\frac{\partial_\rho u_0(a, \phi)}{k}, \quad \phi \in L. \end{aligned} \quad (43)$$

Действуя так же как в [7], введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\phi}, \quad (44)$$

Введенная таким образом функция в силу (42) обладает следующим свойством

$$v(\phi) = 0, \quad \phi \in C\bar{L}, \quad (45)$$

причем через $v(\phi)$ выражаются все искомые коэффициенты A_n , как обратное преобразование Фурье и с учетом свойства (44) имеем:

$$A_n = \frac{1}{2\pi_L} \int v(\phi) e^{-in\phi} d\phi, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (46)$$

Используя параметрические представления для гиперсингулярного интегрального оператора и оператора с логарифмическим ядром [11] и подставляя представление для A_n (46) в уравнение (43), получаем гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & -\frac{B_1}{2\pi} * a.f.p. \int_L \frac{v(\phi)}{2\sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} d\phi - \frac{B_2}{2\pi_L} \int v(\phi) \ln \left| \sin \frac{\phi - \phi_0}{2} \right| d\phi - \frac{B_2 \ln 2}{\pi} \int_L v(\phi) d\phi + \\ & + \frac{\Gamma_0^H}{2\pi_L} \int v(\phi) d\phi + \frac{1}{2\pi_L} \int K^H(\phi, \phi_0) v(\phi) d\phi = -\partial_\rho H_{0z}(R_2, \phi_0), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\text{где } K^H(\phi, \phi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Gamma_n - B_1 |n| - B_2 \frac{1}{|n|} \right) \cos(n(\phi - \phi_0)).$$

Интеграл $a.f.p. \int_L \frac{v(\phi)}{2\sin^2 \frac{\phi - \phi_0}{2}} d\phi$ нужно понимать в смысле конечной части по

Адамару [13].

Перепишем уравнение (47) в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{B_1}{\pi} * a.f.p. \int_L \frac{v(\theta)}{(\theta - \phi)^2} d\theta - \frac{B_2}{\pi_L} \int v(\theta) \ln |\theta - \phi| d\theta + \\ & + \left[-\frac{B_1}{2\pi_L} \int v(\theta) \left\{ \frac{1}{2\sin^2 \frac{\theta - \phi}{2}} - \frac{2}{(\theta - \phi)^2} \right\} d\theta - \frac{B_2}{\pi_L} \int v(\theta) \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta - \phi}{2}}{\frac{\theta - \phi}{2}} \right| d\theta + \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma_0}{2\pi_L} \int v(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi_L} \int K(\theta, \phi) v(\theta) d\theta \right] = f(\phi). \quad \phi \in L \end{aligned} \quad (48)$$

В уравнении (48) интегралы, заключенные в квадратные скобки, имеют гладкие ядра.

Условие Майкснера на ребре будет выполнено, если сужение функции $v(\theta)$ на интервал (α_q, β_q) имеет вид:

$$v(\theta)|_{(\alpha_q, \beta_q)} = w_q(\theta) \sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}, \quad \alpha_q < \theta < \beta_q,$$

где $w_q(\theta)$, $\theta \in [\alpha_q, \beta_q]$ функция непрерывная по Гельдеру.

Т.о., получим сумму интегралов по каждому интервалу (α_q, β_q) , при этом выделяем интеграл, который нужно понимать в смысле конечной части по Адамару и интеграл – с логарифмическим ядром

$$\begin{aligned}
& -\frac{B_1}{\pi} a.f.p. \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{w_p(\theta)}{(\theta-\phi)^2} \sqrt{(\beta_p-\theta)(\theta-\alpha_p)} d\theta - \\
& -\frac{B_2}{\pi} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} w_p(\theta) \ln|\theta-\phi| \sqrt{(\beta_p-\theta)(\theta-\alpha_p)} d\theta + \\
& + \left[-\frac{B_1}{\pi} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \frac{w_q(\theta)}{(\theta-\phi)^2} \sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)} d\theta - \right. \\
& \quad -\frac{B_2}{\pi} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln|\theta-\phi| \sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)} d\theta - \\
& \quad -\frac{B_1}{2\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \left\{ \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta-\phi}{2}} - \frac{2}{(\theta-\phi)^2} \right\} \sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)} d\theta - \\
& \quad -\frac{B_2}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta-\phi}{2}}{\frac{\theta-\phi}{2}} \right| \sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)} d\theta + \\
& \quad + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)} d\theta + \\
& \quad \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) K(\theta, \phi) \sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)} d\theta \right] = f(\phi), \tag{49}
\end{aligned}$$

$$\phi \in (\alpha_p, \beta_p), \quad p=1, \dots, m$$

Действуя далее так же как в [7], введем отображения переводящие стандартный интервал $(-1, 1)$ на дуги окружности:

$$g_q: (-1, 1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q): t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \tag{50}$$

при этом

$$w_q(\theta) \sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)} = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \gamma_q(t) \sqrt{1 - t^2}, \tag{51}$$

$$d\theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} dt, \quad f(\phi)|_{\phi \in (\alpha_p, \beta_p)} = \tilde{f}_p(t_0), \quad |t_0| < 1.$$

В результате получим:

$$-\frac{B_1}{\pi} \left(a.f.p. \int_{-1}^1 \frac{\gamma_p(t)}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2} dt \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{B_2}{\pi} \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln |t - t_0| \sqrt{1 - t^2} dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t_0, t) \gamma_q(t) \sqrt{1 - t^2} dt = \tilde{f}_p(t_0), \quad |t_0| < 1
 \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\tilde{K}_{pq}(t_0, t) = \begin{cases} K^1(g_p(t_0), g_p(t)) - B_2 \ln \frac{\beta_p - \alpha_p}{2}, & p = q \\ K^1(g_p(t_0), g_q(t)) - \frac{B_1}{(g_p(t_0) - g_q(t))^2} - B_2 \ln |g_p(t_0) - g_q(t)|, & p \neq q \end{cases},$$

и

$$\begin{aligned}
 K^1(g_p(t_0), g_q(t)) &= K(g_p(t_0), g_q(t)) - B_2 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t_0) - g_q(t)}{2}}{\frac{g_p(t_0) - g_q(t)}{2}} \right| - \\
 & - \frac{B_1}{2} \left\{ \frac{1}{2 \sin^2 \frac{g_p(t_0) - g_q(t)}{2}} - \frac{2}{(g_p(t_0) - g_q(t))^2} \right\} + \frac{\Gamma_0}{2}.
 \end{aligned}$$

8. Дискретная математическая модель системы гиперсингулярных интегральных уравнений

Для дискретизации системы интегральных уравнений (52) введем в рассмотрение неизвестную функцию $\gamma_p^{N_p-2}(t)$ – полином степени $N_p - 2$. Значение полинома совпадает в $N_p - 1$ точке со значением неизвестной функции $\gamma_p(t)$, т.е. $\gamma_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) = \gamma_p(t_{0k}^{N_p})$, $k = 1, \dots, N_p - 1$, где $t_{0k}^{N_p}$ – узлы интерполяции.

Заменяем гладкие ядра уравнений их интерполяционными полиномами, по каждой из переменных с узлами $t_{0j}^{N_p}$, $j = 1, \dots, N_p - 1$ – нулями полинома Чебышева II рода $U_{N_p-2}(t_0)$. В итоге приходим к следующей системе ГСИУ относительно неизвестных функций $\gamma_p^{N_p-2}(t)$, $p = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{B_1}{\pi} \left(a.f.p. \int_{-1}^1 \frac{\gamma_p^{N_p-2}(t) \sqrt{1 - t^2} dt}{(t - t_{0j}^{N_p})^2} \right) - \\
 & -\frac{B_2}{\pi} \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 \gamma_p^{N_p-2}(t) \ln |t - t_{0j}^{N_p}| \sqrt{1 - t^2} dt +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 P_{N-2}[\tilde{K}_{pq}](t_{0j}^{N_p}, t) \gamma_q^{N_q-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt = \tilde{f}_p(t_{0j}^{N_p}), \quad (53)$$

$$j = 1, \dots, N_p - 1 \quad p = 1, \dots, m.$$

Применяя квадратурные формулы интерполяционного типа [11] к системе ГСИУ (53) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно «приближений» неизвестных функций $\gamma_p^{N_p-2}(t)$, $p = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} & \frac{B_1}{N_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_p-1} \gamma_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) \left(1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \frac{1 - (-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{N_p} - t_{0k}^{N_p})^2} - B_1 \frac{N_p}{2} \gamma_p^{N_p-2}(t_{0j}^{N_p}) - \\ & - \frac{B_2}{N_p} \left(\frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \right)^2 \sum_{k=1}^{N_p-1} \gamma_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) \left(1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) * \\ & * \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{N_p-1} \frac{1}{r} T_r(t_{0k}^{N_p}) T_r(t_{0j}^{N_p}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2N_p} \right] - \\ & - \sum_{q=1}^m \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q-1} \gamma_q(t_{0k}^{N_q}) \left(1 - (t_{0k}^{N_q})^2 \right) K_{pq}(g_p(t_{0j}^{N_p}), g_q(t_{0k}^{N_q})) = \\ & = -\tilde{f}_p(t_{0j}^{N_p-2}) \quad j = 1, \dots, N_p - 1, \quad p = 1, \dots, m. \quad (54) \end{aligned}$$

9. Численный эксперимент

На базе построенной дискретной математической модели разработано программное обеспечение. Это позволило провести широкий численный эксперимент при различных параметрах задачи (радиусы кольца, угловой раскрыв щели, диэлектрическая проницаемость заполнения, волновые числа первичного поля). Приведем лишь некоторые полученные результаты.

На рис. 2-3 приведен результат численного эксперимента для задачи дифракции Н-поляризованной волны на полом цилиндра. Построены модуль компоненты поля (H_z) в ближней зоне и диаграммы направленности. Данные результаты сравнивались с результатами приведенными в работе [14] и показали хорошее совпадение.

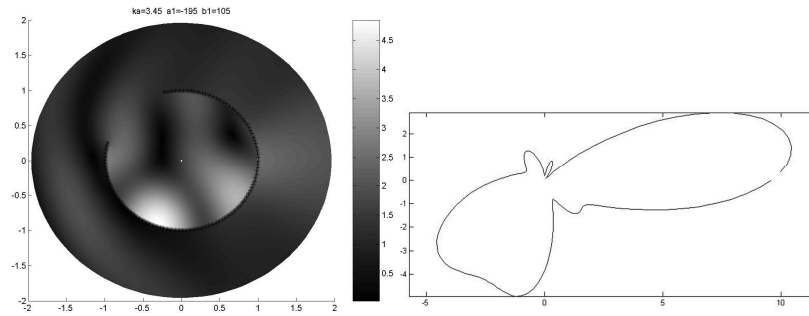


Рис.2. Модуль поля в ближней зоне и ДН для Н-поляризации (компонента H_z).

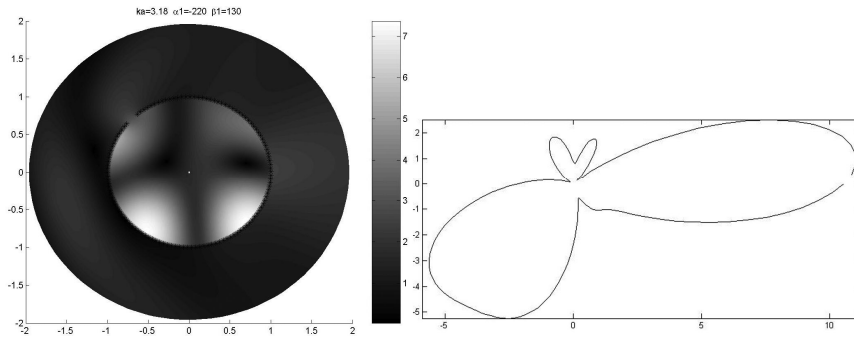


Рис.3. Модуль поля в ближней зоне и ДН для H-поляризации (компонента H_z).

На рис. 4-5 приведены результаты численного эксперимента для случая падения E-поляризованной волны на кольцевой волновод с одной продольной щелью во внешнем цилиндре. Построены модуль компоненты поля (E_z) и диаграмма направленности поля в дальней зоне. Полученный результат сравнивался с результатом приведенным в работе [1].

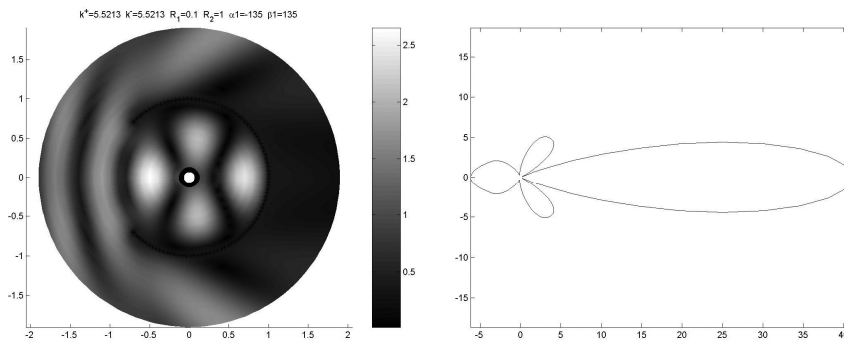


Рис.4. Модуль поля в ближней зоне и ДН для E-поляризации (компонента E_z).

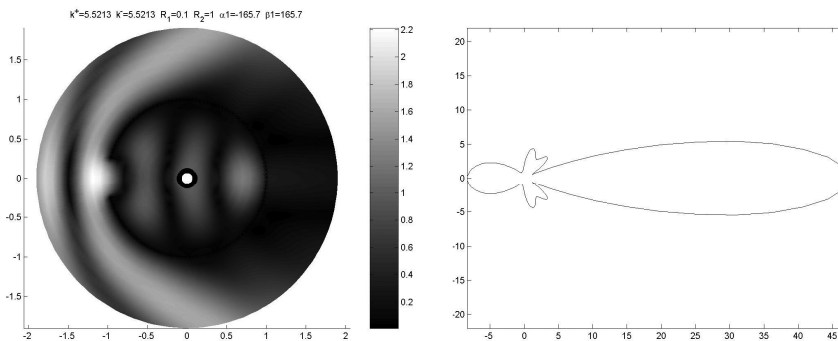


Рис.5. Модуль поля в ближней зоне и ДН для E-поляризации (компонента E_z).

На рис. 6-8 приведены, впервые полученные, результаты для нескольких щелей: две щели на – рис. 6-7 и три щели – рис. 8, угловые размеры раскрытов щелей указаны над рисунками.

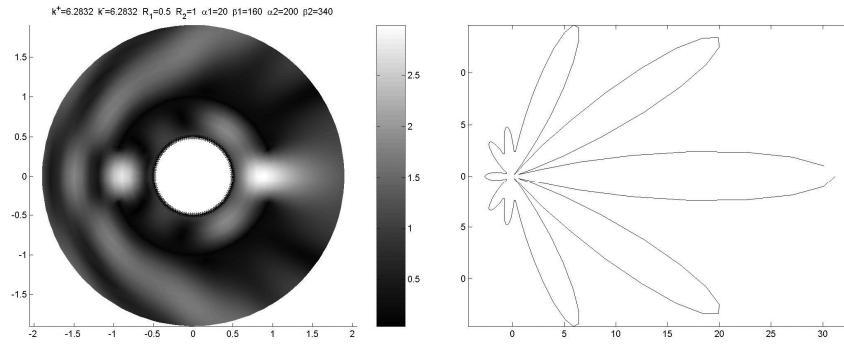


Рис.6. Модуль поля в ближней зоне и ДН для E -поляризации компонента E_z (2 щели).

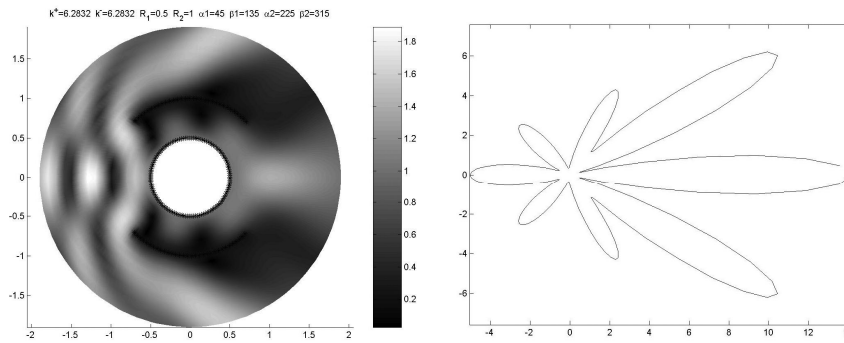


Рис.7. Модуль поля в ближней зоне и ДН для E -поляризации компонента E_z (2 щели).

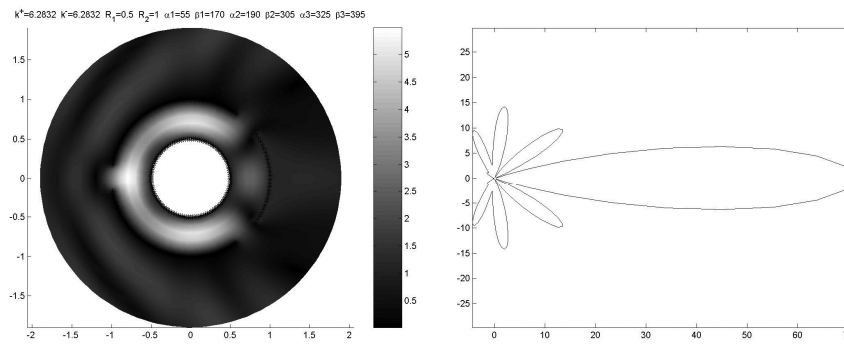


Рис.8. Модуль поля в ближней зоне и ДН для E -поляризации компонента E_z (3 щели).

ЛИТЕРАТУРА

1. Richard W. Ziolkowski, J. Brian Grant Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem. //IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-35, №5 1987

2. W.A. Johnson and R.W. Ziolkowski The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach. //Radio Sci., vol. 19, no.1, pp. 275-291, 1984.
3. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах/ Назарчук З.Т., отв. ред. Саврук М.П.; АН УССР. Физ-мех. ин-т им. Г.В. Карпенко. – Киев: Наук. думка, 1989. –256 с. –ISBN 5-12-000912-3.
4. Носич А.И. О влиянии резонансных режимов на характеристики рассеяния незамкнутого цилиндра. – Радиотехника и электрон., 1978, 23, №8, с. 1733–1737.
5. L. O. Goldstone, A. A. Oliner; Leaky wave antennas II: Circular waveguides, IRE Trans. Antennas Propagat., vol. 9, pp. 280 - 290, May 1961
6. Духопельников С.В. Математические модели для расчета излучения из продольных щелей в волноводе кругового сечения. // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2005. – № 661. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 4. – С. 104-113
7. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Х.: ХГУ, 1992. – 145с.
8. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функцион. анал. и их прилож., вып. 38, Х.: Вища школа, 1982.
9. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. К.: НАН Украины, 1995. С 65-66
10. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований в аксиально-симметричных краевых задачах математической физики. //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев, НАН Украины, ин-т математики, 1996. С 72-73
11. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина-2001. – 92 с.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами./ Под ред. М Абрамовица и И. Стиган. Пер. с англ./ Под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной – М.: Наука, 1979. – 832 с., с ил.
13. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equation and Their Applications. - London: Teilor and Francis, 2003.
14. Носич А.И., Шестопалов В.П. Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью. Препринт ИРЭ АН УССР №78, Харьков, 1977, 52 с.