

Математическая модель дифракции E-поляризованной волны на периодической не идеально проводящей гребёнке

В. Д. Душкин

Академия ВВ МВДУ, Украина

The problem of E-polarized electromagnetic waves diffraction on periodic comb-type reflection gratings in the case of surface impedance has been discussed. The initial problem was reduced to the system of singular integral equation. This equation can be solved by the discrete singularities method.

1. Постановка задачи и её актуальность.

Гребёнка является основным элементом многих технических устройств и систем [1]. Для анализа потерь энергии в таких системах, в случае учёта их реальной проводимости, актуальной задачей является построение математических моделей, которые позволяют численно исследовать электродинамические характеристики этих систем [1,2]. В работе [3] была предложена математическая модель задачи на непериодической гребёнке, в настоящей работе рассматривается периодическая структура (см. рис. 1). По сравнению с работой [3] предложены новые интегральные представления полей, которые позволят упростить численное решение системы сингулярных интегральных уравнений (ССИУ).

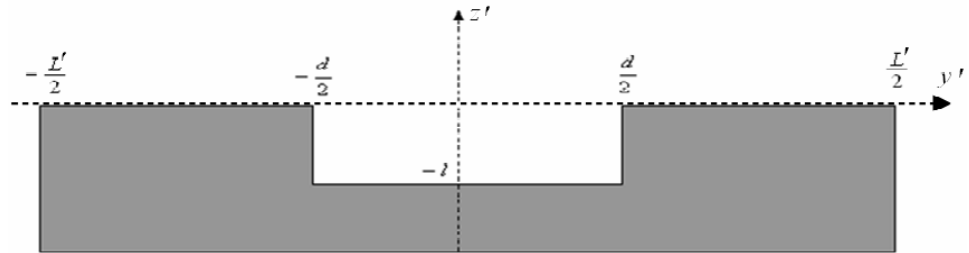


Рис.1. Вид структуры

Пусть на L' - периодическую по оси OY' и однородную по оси OX' гребёнку падает плоская монохроматическая волна, комплексная амплитуда которой $(E'_0)_x$ имеет вид:

$$(E'_0)_x = \exp\{ik(y' \cdot \sin \theta - z' \cdot \cos \theta)\} \quad (1)$$

(зависимость поля от времени даётся множителем $\exp(-i\omega t)$).

Введём обозначение для компоненты полного поля $E'_x = U'$. Необходимо найти в области Ω , которая представляет часть пространства вне гребёнки, решение уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U' + k^2 U' = 0, \quad (2)$$

которое удовлетворяет:

а) импедансным граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} U' - \hbar_E \cdot U' \Big|_{(y', z') \in \partial \Omega} &= 0, \\ \hbar_E &= \frac{i \omega \mu_0 \mu}{Z_s}, \quad \Re(\hbar_E) > 0, \quad \text{Im}(\hbar_E) > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где Z_s - поверхностный импеданс материала, из которого сделана гребёнка;

б) условию на ребре, которое эквивалентно условию ограниченности энергии в любой ограниченной области V плоскости XOY:

$$W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{4} \frac{1}{k^2} \int_V (k^2 \cdot |U'|^2 + |\nabla U'|^2) dV; \quad (4)$$

в) условию излучения Зоммерфельда;

г) условию квазипериодичности Флоке:

$$U'(y' + L', z') = \exp\{ikL' \cdot \sin \theta\} \cdot U'(y' + L', z'). \quad (5)$$

Учитывая условия Флоке, поле можно достаточно искать только в слое шириной L' по переменной y' . Для упрощения последующих вычислений введём величины:

$$\theta = \frac{d}{\pi}, \quad z = \frac{z'}{\theta} = \frac{z' \cdot \pi}{d}, \quad y = \frac{y'}{\theta} = \frac{y' \cdot \pi}{d} \quad (6)$$

$$\kappa = \theta \cdot k, \quad h = \theta \cdot \hbar_E, \quad U(y, z) = U'(y', z'). \quad (7)$$

Функция $U(y, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta U + \kappa^2 U = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial U(\frac{-\pi}{2}, z)}{\partial n} - h \cdot U(\frac{-\pi}{2}, z) = 0, \quad \frac{\partial U(\frac{\pi}{2}, z)}{\partial n} - h \cdot U(\frac{\pi}{2}, z) = 0, \quad z \in [-l, 0], \quad (9)$$

$$\frac{\partial U(y, -l)}{\partial n} - h \cdot U(y, -l) = 0, \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad (10)$$

2. Представление полей в виде рядов Фурье. Обоснование законности такого представления.

Поле в области $\Omega^+ = \{(y, z): |y| \leq L \wedge z \geq 0\}$ мы будем искать в виде:

$$U(y, z) = U^0(y, z) + U^+(y, z), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} U^0(y, z) &= \exp\{ik(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)\} + \\ &+ \frac{i\kappa \cos \theta + h}{i\kappa \cos \theta - h} \exp\{ik(y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$U^+(y, z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\gamma_n^+ + h} \cdot \exp[-i\gamma_n^+ z] \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta)y], \quad (13)$$

$$p_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad \gamma_n^+ = \sqrt{(p_n + \kappa \sin \theta)^2 - \kappa^2} = |p_n| \cdot \sqrt{1 + \frac{2\kappa \sin \theta}{p_n} - \left(\frac{\kappa \cos \theta}{p_n}\right)^2}, \quad (14)$$

$$\Re(\gamma_n^+) \geq 0, \quad \text{Im}(\gamma_n^+) \leq 0, \quad \gamma_0^+ = -i\kappa \cos \theta. \quad (15)$$

Поле в области $\Omega^- = \{(y, z) : |y| \leq \frac{\pi}{2} \wedge -l \leq z \leq 0\}$ мы будем искать в виде:

$$U^-(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^-} C_n Z_n(z) \cdot \omega(\sqrt{\lambda_n^-} y), \quad (20)$$

$$(\gamma_n^-)^2 = \lambda_n^- - \kappa^2, \quad (21)$$

$$Z_n(z) = \frac{\gamma_n^- \cdot [h \cdot \text{sh}(\gamma_n^-(z+l)) + \gamma_n^- \cdot \text{ch}(\gamma_n^-(z+l))]}{(\gamma_n^{-2} - h^2) \cdot \text{sh}(\gamma_n^- \cdot l)} \quad (22)$$

$$Z_n'(0) - h \cdot Z_n(0) = \gamma_n^-, \quad Z_n'(-l) - h \cdot Z_n(-l) = 0, \quad (23)$$

$$\omega(\sqrt{\lambda_{2n}^-} y) = \cos(\sqrt{\lambda_{2n}^-} \cdot y), \quad \omega(\sqrt{\lambda_{2n+1}^-} y) = \sin(\sqrt{\lambda_{2n+1}^-} \cdot y) \quad (24)$$

где $\sqrt{\lambda_{2n}^-}, \sqrt{\lambda_{2n+1}^-}$ - являются соответственно корнями дисперсионных уравнений (25,26):

$$\sqrt{\lambda_{2n}^-} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_{2n}^-} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - h \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_{2n}^-} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (25)$$

$$\sqrt{\lambda_{2n+1}^-} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}^-} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + h \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}^-} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (26)$$

Введём обозначения:

$$\zeta = \Re(\sqrt{\lambda}), \quad \eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}), \quad h = |h| \cdot e^{i\beta}, \quad \sqrt{\lambda} = |\sqrt{\lambda}| \cdot e^{i\alpha},$$

$$a = |\sqrt{\lambda} \cdot h^{-1}|, \quad \varphi = \beta - \alpha. \quad (27)$$

Исходя из свойств величин Z_s и (3) имеем:

$$0 < \beta \leq \frac{\pi}{4}. \quad (28)$$

Уравнение (25) можно представить в виде:

$$\text{ctg}\left(\sqrt{\lambda_{2n}^-} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda_{2n}^-}}{h}. \quad (29)$$

Из (29) следует равенство:

$$a \cdot \exp(-i\varphi) = a \cdot [\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)] = \text{ctg}\left(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin(\pi\zeta)}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\zeta)} - i \cdot \frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\zeta)}. \quad (30)$$

Для каждого из решений уравнения (30) выполняются условия:

$$\eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta < \pi/4, \quad \sin(\pi\zeta) \geq 0, \quad (31)$$

и поэтому для корней уравнения (25) выполняется условие: $\zeta \in [0 + 2n, 1 + 2n]$ $n \in N$.

Уравнение (26) можно представить в виде:

$$tg\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\lambda_{2n+1}}}{h}. \quad (32)$$

Из (32) следует равенство:

$$\begin{aligned} -a \cdot \exp(-i\varphi) &= a \cdot [-\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = \\ &= tg\left(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi\zeta)}{ch(\pi\eta) + \cos(\pi\zeta)} + i \cdot \frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta) + \cos(\pi\zeta)} \end{aligned} \quad (33)$$

Для каждого из решений уравнения (33) выполняются условия:

$$\eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta < \pi/4, \quad \sin(\pi\zeta) \leq 0 \quad (34)$$

и поэтому для корней уравнения (26) выполняется условие: $\zeta \in [1 + 2n, 2 + 2n]$ $n \in N$.

В работе [3] доказано существование и единственность корней систем уравнений (25-26) в каждой из областей $\Re\sqrt{\lambda} \in [n, 1 + n]$. Таким образом, в каждой из областей $\zeta \in (0 + 2n, 1 + 2n)$ находится единственный корень уравнения (25), а в каждой области $\zeta \in (1 + 2n, 2 + 2n)$ находится единственный корень уравнения (26).

Введём обозначения: $\sqrt{\lambda_n} = n + \delta_n$, $\omega_n = \Re(\delta_n)$. Из уравнений (25-26) получаем:

$$ctg\left(\delta_n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} \quad (35)$$

Если в каждой точке области $\text{Im}(\sqrt{\lambda}) > M$ выполняется хотя бы одно из равенств:

$$\Re[a \cdot \exp(-i\varphi)] = a \cdot \cos(\varphi) > \Re\left[ctg\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{|\sin(\pi\omega)|}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)}, \quad (36)$$

$$\text{Im}[a \cdot \exp(-i\varphi)] = a \cdot \sin(\varphi) < \text{Im}\left[ctg\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)}, \quad (37)$$

то в этой области не содержатся корни уравнений (25-26).

Если выполняется одного из двух условий:

$$a > \frac{1}{[ch(\pi M) - \cos(\pi\zeta)] \cdot \cos(\beta)}, \quad a < \frac{sh(\pi M)}{[ch(\pi M) - \cos(\pi\zeta)] \cdot \sin(\beta)} \quad (38)$$

то одно из двух неравенств (36,37) будет выполнено. Хотя бы одно из условий (36,37) будет выполнено при всех значениях a , если $sh(\pi M) > tg(\beta)$.

Таким образом, для всех корней дисперсионных уравнений (25-26) выполняется условие:

$$\text{Im}\sqrt{\lambda_n} < \frac{1}{\pi} \text{arsh}[tg(\beta)] = \frac{1}{\pi} \ln\left[\frac{\sin \beta + 1}{\cos \beta}\right]. \quad (39)$$

Учитывая (28) имеем:

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n} \leq 0,28055 \quad n \in N. \quad (40)$$

Известно [4], что система собственных и присоединённых функций задачи Штурма-Лиувилля является полной на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}\right] \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Анализ уравнений (25-26) показывает, что необходимым условием существования присоединённых функций является выполнение равенства: $h^2 = -\sqrt{\lambda}^2$. Это равенство выполняется когда $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, но это противоречит (28). Таким образом, множество присоединённых функций является пустым и представление поля (20) в области Ω^- является законным.

3. Асимптотика корней дисперсионного уравнения.

Корни уравнения (35) удовлетворяют следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \exp(i\varphi) &= \frac{1}{a} \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = \\ &= \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) + \cos(\pi\omega)} + i \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) + \cos(\pi\omega)}. \end{aligned} \quad (41)$$

При выполнении условия:

$$\frac{\cos(\varphi)}{a} \leq \frac{1}{a} < \frac{\sin(\pi\omega)}{2} \leq \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) + \cos(\pi\omega)} \quad (42)$$

у дисперсионных уравнений (25-26) корней нет. Таким образом, при больших значениях a выполняется условие:

$$\zeta_n = \Re e(\sqrt{\lambda_n}) \in \left[n, n + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{2}{a}\right) \right]. \quad (43)$$

Корни уравнения (35) также удовлетворяют следующему равенству:

$$\begin{aligned} a \cdot \exp(-i\varphi) &= a \cdot [\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)] = \\ \operatorname{ctg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)} - i \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi\eta)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)}. \end{aligned} \quad (44)$$

В области $\operatorname{Im}(z) = \eta \geq M \wedge \sin(\pi\omega) \leq 2 \cdot a^{-1}$ при выполнении условия:

$$a \cdot \cos(\varphi) > a \cdot \cos(\beta) > a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{2 \cdot a^{-1}}{\operatorname{ch}(\pi M) - 1} > \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)} \quad (45)$$

не находятся корни дисперсионных уравнений (10-11).

Таким образом, $\forall \Re e\sqrt{\lambda_n} \geq ah$ все корни уравнений (25-26) удовлетворяют неравенству:

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda_n}) \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{a}\right) < \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{a}\right). \quad (46)$$

Следствием (43,46) является оценка:

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{a}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Уравнения (35) можно представить в виде:

$$(n + \delta_n) \cdot \operatorname{tg}\left(\delta_n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = h \quad (48)$$

или в виде:

$$\delta_n = \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \delta \right] + \frac{2\delta}{\pi} \cdot \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2h}{\pi} \quad (49)$$

Из (47) следует, что:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{2h}{\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (50)$$

4. Получение системы сингулярных интегральных уравнений задачи.

Основываясь на идеях работ [5,6], введем функцию:

$$F(y) = \frac{\partial U^+(y,0)}{\partial z} - h \cdot U^+(y,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta)y], \quad |y| \leq \frac{L}{2}. \quad (51)$$

Из (10, 12), учитывая что

$$\frac{\partial U^0(y,0)}{\partial z} - h \cdot U^0(y,0) = 0, \quad y \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \quad (52)$$

имеем:

$$F(y) = 0, \quad y \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (53)$$

Согласно с определением $F(y)$ имеем:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F(t) \cdot \exp[-i(p_n + \kappa \sin \theta)t] dt, \quad (54)$$

$$U^+(y,0) = -\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^+ + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] F(t) dt \quad (55)$$

Ядро интегрального оператора (54), которое обозначим $K^+(y,t)$, имеет вид:

$$K^+(y,t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^+ + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] = Q^+(y,t) + \exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left(\frac{L}{\pi} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot (y-t)}{L} \right| - 2\kappa i \sin \theta \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right) \quad (56)$$

где $Q^+(y,t) \in C^{1,\alpha} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и имеет вид:

$$Q^+(y,t) = -\exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_n^+ + h} + \frac{1}{\gamma_{-n}^+ + h} - \frac{2}{p_n} \right) \cdot \cos[p_n(y-t)] - \right.$$

$$-ik \cos \theta - i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_n^+ + h} - \frac{1}{\gamma_n^- + h} + \frac{2\kappa \sin \theta}{p_n^2} \right) \cdot \sin[p_n(y-t)] \Big\}. \quad (57)$$

Выпишем производную функции $K^+(y,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dK^+(y,t)}{dy} &= -\frac{d}{dy} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^+ + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] = \frac{dQ^+(y,t)}{dy} + \\ &+ \exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi \cdot (y-t)}{L} \right) + \frac{\kappa^2 \sin^2 \theta}{2} \cdot \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \cdot \int_0^{\frac{2\pi(y-t)}{L}} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Из условия непрерывности поля на границе раздела областей Ω^+ та Ω^- и (11,12) следую равенства:

$$U^0(y,0) + U^+(y,0) = U^-(y,0), \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad (59)$$

$$\frac{\partial U^+(y,0)}{\partial z} - h \cdot U^+(y,0) = \frac{\partial U^-(y,0)}{\partial z} - h \cdot U^-(y,0), \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (60)$$

Из (20-23) следует:

$$U^-(y,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} C_n W_n \cdot \omega(\sqrt{\lambda_n} y), \quad W_n = Z_n(0), \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (61)$$

Следствием (20-23,51,60) являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{\partial U^-(y,0)}{\partial z} - h \cdot U^-(y,0) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} C_n \left[Z_n'(0) - h Z_n(0) \right] \omega(\sqrt{\lambda_n} y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \omega(\sqrt{\lambda_n} y), \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$C_n = \frac{2}{\pi \cdot [\omega(\lambda_n)]} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega(\lambda_n t) \cdot F(t) dt \quad (63)$$

$$[\omega(\lambda_n)] = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega^2(\lambda_n t) dt, \quad (64)$$

$$[\omega(\lambda_n)] = 1 + \frac{2h}{\pi \cdot (h^2 + \sqrt{\lambda_n^2})}. \quad (65)$$

Таким образом, учитывая (62,64), для функции $U^-(y,0)$ получаем представление:

$$U^-(y,0) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n \cdot \omega(\lambda_n y) \cdot \omega(\lambda_n t)}{\gamma_n [\omega(\lambda_n)]} \right] \cdot F(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t-y))}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t+y))}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} \right] \cdot F(t) dt \quad (66)$$

Справедливы равенства:

$$\frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}t)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} = \frac{\cos(nt)}{n} + \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(nt) + Q_n(t), \quad (67)$$

$$Q_n(t) = \left[\frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}t)}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} - \frac{\cos(nt)}{n} - \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(nt) \right], \quad (68)$$

$$Q_n(t) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (69)$$

Ядро интегрального представления (66), которое обозначим $K^-(y, t)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} K^-(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t-y))}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t+y))}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} = \\ &= -\ln \left| 2 \cdot \sin \frac{t-y}{2} \right| - \frac{2h(t-y)}{\pi} \int_0^{t-y} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t-y) - \\ &- \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{t+y}{2} \right| - \frac{2h(t+y)}{\pi} \int_0^{t+y} \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{s}{2} \right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_n(t+y) \end{aligned} \quad (70)$$

Производная функции $K^-(y, t)$ по переменной y имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dK^-(y, t)}{dy} &= \frac{1}{2} ctg \frac{t-y}{2} - \frac{2h}{\pi} \left\{ - \int_0^{t-y} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds - (t-y) \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right| \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} tg \frac{t+y}{2} - \frac{2h}{\pi} \left\{ \int_0^{t+y} \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{s}{2} \right| ds + (t+y) \cdot \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{y+t}{2} \right| \right\} + \\ &+ \frac{d}{dy} \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t-y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_n(t+y) \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Из граничных условий (59) с учётом (55,61) получаем интегральное уравнение

$$U_0^+(y, 0) + \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^+(y, t) \cdot F(t) dt = \frac{1}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^-(y, t) \cdot F(t) dt, \quad (74)$$

которое эквивалентно системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{dU_0^+(y,0)}{dy} + \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dK^+(y,t)}{dy} \cdot F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dK^-(y,t)}{dy} \cdot F(t) dt \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (75)$$

$$U_0^+(y_0,0) + \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^+(y_0,t) \cdot F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^-(y_0,t) \cdot F(t) dt, \quad (76)$$

где y_0 - фиксированная точка интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Система уравнений (75-76) принадлежит тому же классу ССИУ, которые встречались при решении задач дифракции на идеально проводящих структурах [6,8], и отличается от них видом непрерывных частей ядер. Поэтому для численного решения ССИУ можно применить метод дискретных особенностей [9].

1.

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Построенная математическая модель служит основой для построения дискретной математической модели, на основании которой будет проведен численный анализ полей, создаваемых сверхпроводящими электродинамическими структурами. Приведено обоснование законности представления полей в волноводных каналах в виде (20), проведен анализ свойств корней дисперсионных уравнений (25-26), в частности даны новые оценки ограниченности мнимых частей корней этих уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. -М.: Изд-во МГУ, 1983. -232 с.
2. Кравченко В.Ф., Казаров А.Б. Поверхностный импеданс сверхпроводников и его применение в физике и технике // Радиотехника. Зарубежная радиоэлектроника.-1997.-№11.-С.59-78
3. В.Д. Душкин Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // Доп. НАН України.-1999.-№9-с.11-15
4. Душкин В.Д. Нахождение комплексных собственных значений задачи Штурма- Лиувилля, которая возникает при решении задач дифракции// Весник Харьк. нац. ун-ту., - 2007. -№ 775. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вип. 7. -С.152-158
5. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. -Киев: Наукова думка.- 1972.-220с.
6. Гандель Ю.В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.-1994.-359с.

7. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.- Харьков: Вища школа, 1982. – Вып. 38. – С. 15-18.
8. Гандель Ю.В., Душкін В.Д. Сингулярні інтегральні рівняння задач дифракції електромагнітних хвиль //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач математичної фізики: Збірник наукових праць Інституту математики НАН України .- Київ, 1996. - Вип. 13 -С. 14-24
9. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices. -New York: CRC Press,- 1993.-452p