Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.6 № 809, 2008, с.88-101

Об одной модели квантового канала

Г. Н. Жолткевич, М. Тави
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The article is devoted to model of quantum channel investigation. Some positive linear operator in special Hilbert space (characteristic operator of channel) is associated with quantum channel. It is proved that the operator characterizes quantum channel. Two important for quantum computing classes of quantum channel are described by using channel characteristic operator.

1. Введение

Возможность использования квантовых систем для решения вычислительных задач, по-видимому, впервые была отмечена в работе Ю. И. Манина [1]. Подробно этот вопрос обсуждался в работах Р. Фейнмана [2, 3] в связи с проблемами компьютерного моделирования квантовых процессов. В 1985 году Д. Дойч предложил конкретную математическую модель квантовых вычислений – квантовую машину Тьюринга [4], а в 1989 – модель квантовых схем [5]. В 1994 году П. Шор опубликовал свой «квантовый алгоритм» разложения числа на простые множители [6] полиномиальной сложности, что привело к повышению интереса к проблемам квантового компьютинга.

Следует отметить, что несмотря на разнообразие предложенных моделей квантовых вычислительных систем, они все обладают одной особенностью – отсутствием единого представления для операций и условий такой системы. С точки зрения авторов работы, квантовые каналы (см., например, [7]) предоставляют математический формализм, позволяющий единым образом трактовать как выполнение операций, так и проверку условий. В этом контексте квантовая программа представляет собой квантовый канал на памяти вычислительной системы, а двойственное к нему отображение – аналог преобразователя предикатов «слабейшее предусловие» Э. Дейкстры [8, 9]. Таким образом, изучение квантовых каналов является актуальной задачей в контексте квантового компьютинга. Важной составляющей такого исследования является описание специальных классов квантовых каналов, комбинирование представителей которых обеспечивает построение множества квантовых программ.

2. Основные определения и обозначения

Определение 2.1. Конечномерной квантовой системой будем называть алгебру фон Неймана, являющуюся для некоторого натурального n фактором типа $\mathbf{I}_n$. Число n в этом случае называется размерностью системы.

Замечание. Определения основных объектов модели, приведенные в настоящей работе, учитывают специфику, обусловленную требованием конечномерности, и в бесконечномерном случае подлежат корректировке.

<u>Определение 2.2.</u> Элемент S n-мерной квантовой системы $\mathcal{M}$ называется матрицей плотности, если $S \geq 0$ и $\mathrm{Tr}(S) = 1$, где Tr – след на факторе $\mathcal{M}$, принимающий значение единица на минимальных ортопроекторах. Множество матриц плотности квантовой системы $\mathcal{M}$ будет далее обозначаться через $\mathcal{S}(\mathcal{M})$.

<u>Определение 2.3.</u> Состоянием n-мерной квантовой системы $\mathcal{M}$ с матрицей плотности S будем называть линейный функционал $\varphi_S(X) = \mathrm{Tr}(SX)$, который, очевидно, является положительным функционалом с нормой равной единице.

<u>Определение 2.4.</u> Пусть задано D – линейное отображение из алгебры $\mathcal{M}$ в алгебру $\mathcal{N}$, его предсопряженным отображением будем называть отображение $D_* : \mathcal{S}(\mathcal{N}) \to \mathcal{S}(\mathcal{M})$, которое определяется соотношением

$$\mathrm{Tr}\left(D_*(S)X\right) = \mathrm{Tr}\left(S D(X)\right),$$

где $S \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$, $X \in \mathcal{M}$. Очевидно, что по линейности отображение D_* однозначно продолжается до отображения из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$, сохраняющего матрицы плотности, которое также будет обозначаться через D_*.

<u>Утверждение 2.1.</u> Пусть линейное отображение $B : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ сохраняет матрицы плотности, тогда существует единственное отображение $D : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, такое, что $D_* = B$, причем $D(1) = 1$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой. ,

<u>Определение 2.5.</u> Пусть линейное отображение $B : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ сохраняет матрицы плотности, тогда существующее в силу утверждения 2.1 единственное отображение $D : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, такое, что $D_* = B$, называемое сопряженным отображением отображения B, которое обозначается $D = B^*$.

<u>Определение 2.6.</u> Линейное отображение D из квантовой системы $\mathcal{M}$ в квантовую систему $\mathcal{N}$ называется положительным, если для всякого неотрицательного элемента $X \in \mathcal{M}$, элемент $D(X) \in \mathcal{N}$ неотрицателен.

<u>Определение 2.7.</u> Линейное отображение D из квантовой системы $\mathcal{M}$ в квантовую систему $\mathcal{N}$ называется вполне положительным, если для всякого $k = 1, 2, \ldots$ отображения $D_k = D \otimes \mathrm{Id}_k : \mathcal{M} \otimes \mathbf{M}_k(\mathbf{C}) \to \mathcal{N} \otimes \mathbf{M}_k(\mathbf{C})$ является положительным, где $\mathbf{M}_k(\mathbf{C})$ – алгебра матриц размера $k \times k$ над полем комплексных чисел, Id_k – тождественное отображение алгебры $\mathbf{M}_k(\mathbf{C})$ в себя.

<u>Определение 2.8.</u> Каналом с передающей квантовой системой $\mathcal{M}$ и принимающей квантовой системой $\mathcal{N}$ будем называть линейное отображение C из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$, обладающее следующими свойствами:

1) отображение C^* вполне положительно;

2) $C^*(1) = 1$.

3. Характеристический оператор квантового канала

Далее, рассматривая квантовые каналы, мы будем предполагать фиксированной передающую квантовую систему $\mathcal{T}$ размерности $n_{\mathbf{t}}$ и принимающую квантовую систему $\mathcal{R}$ размерности $n_{\mathbf{r}}$.

Кроме того, будет считаться фиксированным одно из неприводимых *-представлений $\rho_{\mathbf{t}}$ в $n_{\mathbf{t}}$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathbf{t}}$ фактора $\mathcal{T}$.

Основным инструментом, применяемым в настоящей работе для исследования математической модели квантового канала C, является линейный оператор $\mathbf{Z}(C)$ в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{R} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{t}}$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$\left\langle \sum_{k=1}^{K} A_k \otimes \xi_k \,\middle|\, \sum_{l=1}^{L} B_l \otimes \eta_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \mathrm{Tr}\left(A_k^* B_l\right) \langle \xi_k | \eta_l \rangle .$$

<u>Замечание.</u> В работе скалярное произведение предполагается антилинейным по первому аргументу и линейным по второму.

Алгебру всех операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$ обозначим через $\mathcal{M}$.

В пространстве $\mathcal{H}$ определим

1. *-представление $\pi_{\mathbf{r}}$ алгебры $\mathcal{R}$: $\pi_{\mathbf{r}}(A)|B \otimes \xi\rangle = |AB \otimes \xi\rangle$,
2. ее *-антипредставление: $\check{\pi}_{\mathbf{r}}(A)|B \otimes \xi\rangle = |BA \otimes \xi\rangle$ и
3. *-представление $\pi_{\mathbf{t}}$ алгебры $\mathcal{T}$: $\pi_{\mathbf{t}}(B)|A \otimes \xi\rangle = |A \otimes \rho_{\mathbf{t}}(B)\xi\rangle$.

Определим также оператор $\mathbf{V} : \mathcal{H}_{\mathbf{t}} \to \mathcal{H}$ согласно следующей формуле

$$\mathbf{V}\xi = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{r}}}} |1 \otimes \xi\rangle$$

<u>Утверждение 3.1.</u> Оператор, определенный формулой 3.1 обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{V}^* |A \otimes \xi\rangle = \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{\sqrt{n_{\mathbf{r}}}} \xi$;

2) $\mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}$.

Доказательство. Для доказательства первого свойства для произвольных $A \in \mathcal{R}$ и $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_{\mathbf{t}}$ вычислим

$$\langle \xi_1 | \mathbf{V}^* | A \otimes \xi_2 \rangle = \overline{\langle A \otimes \xi_2 | \mathbf{V} | \xi_1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{r}}}} \overline{\langle A \otimes \xi_2 | 1 \otimes \xi_1 \rangle} = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{\sqrt{n_{\mathbf{r}}}} \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle ,$$

откуда и следует $\mathbf{V}^* |A \otimes \xi\rangle = \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{\sqrt{n_{\mathbf{r}}}} \xi$.

Второе свойство теперь доказывается прямым вычислением:

$$\mathbf{V}^*\mathbf{V}\xi = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{r}}}} \mathbf{V}^* |1 \otimes \xi\rangle = \frac{\mathrm{Tr}(1)}{n_{\mathbf{r}}} \xi = \xi ,$$

Для построения оператора $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ рассмотрим полуторалинейную (антилинейную по первому аргументу и линейную по второму) форму на пространстве $\mathcal{H}$:

$$\omega\left(\sum_{k=1}^{K} A_k\otimes\xi_k,\sum_{l=1}^{L} B_l\otimes\eta_l\right)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left\langle \xi_k\,\middle|\,\rho_{\tau}\left(\mathrm{X}^*\left(A_k^*B_l\right)\right)\middle|\,\eta_l\right\rangle \tag{3.1}$$

Оператор $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ определяется как оператор, порождающий полуторалинейную форму 3.1:

$$\omega\left(\sum_{k=1}^{K} A_k\otimes\xi_k,\sum_{l=1}^{L} B_l\otimes\eta_l\right)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left\langle A_k\otimes\xi_k\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,B_l\otimes\eta_l\right\rangle \tag{3.2}$$

<u>Теорема 3.1.</u> Оператор $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{Z}(\mathrm{X})\geq 0$;

2) $\mathbf{Z}(\mathrm{X})\in\pi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathfrak{R})'$;

3) $\mathbf{V}^*\mathbf{Z}(\mathrm{X})\mathbf{V}=\dfrac{1}{n_{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{I}$.

Доказательство. В силу вполне положительности отображения X^* [7, §6.2] и определения оператора $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ имеем

$$\left\langle\sum_{k=1}^{K} A_k\otimes\xi_k\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\sum_{l=1}^{K} A_l\otimes\xi_l\right\rangle=\omega\left(\sum_{k=1}^{K} A_k\otimes\xi_k,\sum_{l=1}^{K} A_l\otimes\xi_l\right)=$$
$$=\sum_{k,l=1}^{K}\left\langle\xi_k\,\middle|\,\rho_{\tau}\left(\mathrm{X}^*\left(A_k^*A_l\right)\right)\middle|\,\xi_l\right\rangle\geq 0,$$

откуда следует свойство 1.

$$\left\langle B_1\otimes\xi_1\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\pi_{\boldsymbol{\rho}}(A)\middle|\,B_2\otimes\xi_2\right\rangle=\left\langle B_1\otimes\xi_1\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,AB_2\otimes\xi_2\right\rangle=$$
$$=\left\langle\xi_1\,\middle|\,\rho_{\tau}\left(\mathrm{X}^*\left(B_1^*AB_2\right)\right)\middle|\,\xi_2\right\rangle=\left\langle A^*B_1\otimes\xi_1\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,B_2\otimes\xi_2\right\rangle=$$
$$=\overline{\left\langle B_2\otimes\xi_2\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,A^*B_1\otimes\xi_1\right\rangle}=\overline{\left\langle B_2\otimes\xi_2\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\pi_{\boldsymbol{\rho}}(A)^*\middle|\,B_1\otimes\xi_1\right\rangle}=$$
$$=\left\langle B_1\otimes\xi_1\,\middle|\,\pi_{\boldsymbol{\rho}}(A)\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,B_2\otimes\xi_2\right\rangle$$

и, продолжая по линейности, получаем свойство 2.

Наконец,

$$\left\langle\xi_1\,\middle|\,\mathbf{V}^*\mathbf{Z}(\mathrm{X})\mathbf{V}\middle|\,\xi_2\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}}}\left\langle\xi_1\,\middle|\,\mathbf{V}^*\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,1\otimes\xi_2\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}}}\overline{\left\langle 1\otimes\xi_2\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\mathbf{V}\middle|\,\xi_1\right\rangle}=$$
$$=\frac{1}{n_{\boldsymbol{\rho}}}\overline{\left\langle 1\otimes\xi_2\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,1\otimes\xi_1\right\rangle}=\frac{1}{n_{\boldsymbol{\rho}}}\left\langle 1\otimes\xi_1\,\middle|\,\mathbf{Z}(\mathrm{X})\middle|\,1\otimes\xi_2\right\rangle=\frac{1}{n_{\boldsymbol{\rho}}}\left\langle\xi_1\,\middle|\,\xi_2\right\rangle,$$

что доказывает свойство 3. ■

Верной является и обратная теорема, что позволяет получить представление квантового канала в терминах оператора $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$.

Теорема 3.2. Если $\mathbf{Z}$ линейный оператор в $\mathcal{H}$, удовлетворяющий условиям

1) $\mathbf{Z}(\Phi) \geq 0$;

2) $\mathbf{Z}(\Phi) \in \pi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathcal{R})'$;

3) $\mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}(\Phi)\mathbf{V} = \dfrac{1}{n_{\boldsymbol{\rho}}}\mathbf{I}$,

то существует единственный квантовый канал $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{R}$, для которого $\mathbf{Z}(\Phi) = \mathbf{Z}$.

Доказательство. Пусть существуют два канала Φ_1 и Φ_2 такие, что $\mathbf{Z}(\Phi_1) = \mathbf{Z}(\Phi_2) = \mathbf{Z}$, тогда

$$\langle \xi_1 | \rho_{\boldsymbol{\tau}}(\Phi_1(A)) | \xi_2 \rangle = \langle 1 \otimes \xi_1 | \mathbf{Z}(\Phi_1) | A \otimes \xi_2 \rangle = \langle 1 \otimes \xi_1 | \mathbf{Z} | A \otimes \xi_2 \rangle =$$
$$= \langle 1 \otimes \xi_1 | \mathbf{Z}(\Phi_2) | A \otimes \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 | \rho_{\boldsymbol{\tau}}(\Phi_2(A)) | \xi_2 \rangle$$

и в силу точности представления $\rho_{\boldsymbol{\tau}}$ единственность доказана.

Определим отображение $\Psi : \mathcal{R} \to \mathcal{T}$ формулой $\Psi(A) = n_{\boldsymbol{\rho}}\rho_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\left(\mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}(A)\mathbf{V}\right)$. Покажем, что это отображение вполне положительно и сохраняет единицу.

Полная положительность отображения Ψ следует из условий 1 и 2 теоремы: возьмем произвольные $A_1, \ldots, A_K$ из $\mathcal{R}$ и $\xi_1, \ldots, \xi_K$ из $\mathcal{H}$ и вычислим

$$\sum_{m,n=1}^{K} \langle \xi_m | \rho_{\boldsymbol{\tau}}\left(\Psi\left(A_m^{*}A_n\right)\right) | \xi_n \rangle = n_{\boldsymbol{\rho}} \sum_{m,n=1}^{K} \langle \xi_m | \mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}\left(A_m^{*}A_n\right)\mathbf{V} | \xi_n \rangle =$$
$$= \sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}} \sum_{m,n=1}^{K} \langle \xi_m | \mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}\left(A_m^{*}A_n\right) | 1 \otimes \xi_n \rangle = \sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}} \sum_{m,n=1}^{K} \langle \xi_m | \mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}\left(A_m^{*}\right) | A_n \otimes \xi_n \rangle =$$
$$= \sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}} \sum_{m,n=1}^{K} \overline{\langle A_n \otimes \xi_n | \pi_{\boldsymbol{\rho}}(A_m)\mathbf{Z}\mathbf{V} | \xi_m \rangle} = \sum_{m,n=1}^{K} \overline{\langle A_n \otimes \xi_n | \mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}(A_m) | 1 \otimes \xi_m \rangle} =$$
$$= \sum_{m,n=1}^{K} \overline{\langle A_n \otimes \xi_n | \mathbf{Z} | A_m \otimes \xi_m \rangle} = \sum_{m,n=1}^{K} \langle A_m \otimes \xi_m | \mathbf{Z} | A_n \otimes \xi_n \rangle =$$
$$= \left\langle \sum_{m=1}^{K} A_m \otimes \xi_m \middle| \mathbf{Z} \middle| \sum_{n=1}^{K} A_n \otimes \xi_n \right\rangle \geq 0,$$

что в силу [7, §6.2] обеспечивает полную положительность Ψ.

Из условия 3 немедленно следует, что отображение Ψ сохраняет единицу.

Пусть $\Phi = \Psi_{*} : \mathcal{T} \to \mathcal{R}$, тогда оно в силу утверждения 2.1 является квантовым каналом. Покажем, что $\mathbf{Z}(\Phi) = \mathbf{Z}$.

Действительно, для произвольных $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{\tau}}$

$$\langle A_1 \otimes \xi_1 | \mathbf{Z}(\Phi) | A_2 \otimes \xi_2 \rangle = \left\langle \xi_1 \middle| \rho_{\boldsymbol{\tau}}\left(\Psi\left(A_1^{*}A_2\right)\right) \middle| \xi_2 \right\rangle =$$
$$= n_{\boldsymbol{\rho}} \left\langle \xi_1 \middle| \rho_{\boldsymbol{\tau}}\left(\rho_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\left(\mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}\left(A_1^{*}A_2\right)\mathbf{V}\right)\right) \middle| \xi_2 \right\rangle = n_{\boldsymbol{\rho}} \left\langle \xi_1 \middle| \mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}\left(A_1^{*}A_2\right)\mathbf{V} \middle| \xi_2 \right\rangle =$$
$$= \sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}} \left\langle \xi_1 \middle| \mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}\pi_{\boldsymbol{\rho}}(A_1)^{*} \middle| A_2 \otimes \xi_2 \right\rangle = \sqrt{n_{\boldsymbol{\rho}}}\, \overline{\langle A_2 \otimes \xi_2 | \pi_{\boldsymbol{\rho}}(A_1)\mathbf{Z}\mathbf{V} | \xi_1 \rangle} =$$

$$= \sqrt{n_\rho}\,\overline{\langle A_2 \otimes \xi_2 | \mathbf{Z}\pi_\rho(A_1)\mathbf{V} | \xi_1 \rangle} = \overline{\langle A_2 \otimes \xi_2 | \mathbf{Z} | A_1 \otimes \xi_1 \rangle} = \langle A_1 \otimes \xi_1 | \mathbf{Z} | A_2 \otimes \xi_2 \rangle,$$

откуда, продолжая по линейности, получаем $\mathbf{Z}(\mathrm{X}) = \mathbf{Z}$. ,

Определение 3.1. Оператор $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$, определенный равенством 3.2 называется характеристическим оператором канала X.

Следствие 3.1 из теоремы 3.2. Линейное отображение Δ, сопряженное квантовому каналу X с характеристическим оператором $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$, представляется формулой

$$\Delta(A) = n_\rho \rho_\tau^{-1}\left(\mathbf{V}^*\mathbf{Z}\pi_\rho(A)\mathbf{V}\right) \tag{3.3}$$

или в симметричном виде

$$\Delta(A) = n_\rho \rho_\tau^{-1}\left(\left(\mathbf{Z}^{1/2}\mathbf{V}\right)^* \pi_\rho(A)\mathbf{Z}^{1/2}\mathbf{V}\right) \tag{3.4}$$

4. Координатное представление характеристического оператора

Несмотря на то, что в предыдущем разделе было показано существование взаимно-однозначного соответствия между квантовыми каналами и характеристическими операторами, явное представление канала в терминах его характеристического оператора получено не было. В этом разделе эта задача будет решена в координатном виде.

Прежде всего, зафиксируем в пространстве $\mathcal{H}_\tau$ ортонормированный базис $\{\tau_i \mid i = 1,\dots,n_\tau\}$ и свяжем с ним систему матричных единиц алгебры $\mathcal{T}$ $\{E^{\tau}_{mn} \mid m,n = 1,\dots,n_\tau\}$: $\rho_\tau(E^{\tau}_{mn})\tau_k = \delta_{kn}\tau_m$.

Утверждение 4.1. Для того чтобы оператор $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ лежал в $\pi_\rho(\mathcal{R})'$ необходимо и достаточно существования семейства $\{A_{mn} \in \mathcal{R} \mid m,n = 1,\dots,n_\tau\}$ такого, что $\mathbf{A} = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \pi'_\rho(A_{mn})\pi_\tau(E^{\tau}_{nm})$.

Доказательство. Очевидно, что оператор вида $\sum_{m,n=1}^{n_\tau} \pi'_\rho(A_{mn})\pi_\tau(E^{\tau}_{nm})$ лежит в $\pi_\rho(\mathcal{R})'$.

Пусть теперь $\mathbf{A} \in \pi_\rho(\mathcal{R})'$, $\Psi \in \mathcal{H}$. Отметим, что существует однозначное представление $\Psi = \sum_{m=1}^{n_\tau} |\Psi_m \otimes \tau_m\rangle$, где $\Psi_m \in \mathcal{R}$. Вычислим теперь $\mathbf{A}\Psi$.

$$\mathbf{A}\Psi = \mathbf{A}\sum_{m=1}^{n_\tau} |\Psi_m \otimes \tau_m\rangle = \sum_{m=1}^{n_\tau} \mathbf{A}\pi_\rho(\Psi_m)|1 \otimes \tau_m\rangle = \sum_{m=1}^{n_\tau} \pi_\rho(\Psi_m)\mathbf{A}|1 \otimes \tau_m\rangle \tag{4.1}$$

Поскольку вектор $\mathbf{A}|1 \otimes \tau_m\rangle$ однозначно представляется в виде

$$\mathbf{A}|1 \otimes \tau_m\rangle = \sum_{n=1}^{n_\tau} |A_{mn} \otimes \tau_n\rangle, \tag{4.2}$$

то, подставляя представление 4.2 в правую часть 4.1, получим

$$\mathbf{A}\Psi = \sum_{m=1}^{n_\tau}\pi_\rho(Y_m)\sum_{n=1}^{n_\tau}\left|A_{mn}\otimes\tau_n\right\rangle = \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\left|Y_mA_{mn}\otimes\tau_n\right\rangle \qquad (4.3)$$

С другой стороны,

$$\left(\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(A_{mn})\pi_\tau(E^\tau_{nm})\right)\Psi = \left(\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(A_{mn})\pi_\tau(E^\tau_{nm})\right)\sum_{k=1}^{n_\tau}\left|Y_k\otimes\tau_k\right\rangle = \qquad (4.4)$$

$$= \sum_{m,n,k=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(A_{mn})\pi_\tau(E^\tau_{nm})\left|Y_k\otimes\tau_k\right\rangle = \sum_{m,n,k=1}^{n_\tau}\left|Y_kA_{mn}\otimes\rho_\tau(E^\tau_{nm})\tau_k\right\rangle =$$

$$= \sum_{m,n,k=1}^{n_\tau}\delta_{mk}\left|Y_kA_{mn}\otimes\tau_n\right\rangle = \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\left|Y_mA_{mn}\otimes\tau_n\right\rangle.$$

Так как правые части равенств 4.3 и 4.4 совпадают, а Ψ произвольный вектор, то верно $\mathbf{A} = \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(A_{mn})\pi_\tau(E^\tau_{nm})$. ,

Теорема 4.1. Для того чтобы оператор $\mathbf{Z}\in\mathcal{M}$ был характеристическим оператором квантового канала необходимо и достаточно, чтобы он представлялся в виде $\mathbf{Z} = \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(Z_{mn})\pi_\tau(E^\tau_{nm})$ и набор $\{Z_{mn}\mid m,n = 1,\ldots,n_\tau\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для произвольных наборов $\{X_m\in\mathcal{R}\mid m = 1,\ldots,n_\tau\}$ выполняется неравенство $\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(X_mZ_{mn}X_n^*\right)\ge 0$;
2) $\mathrm{Tr}(Z_{mn}) = \delta_{mn}$.

Доказательство. Если $\mathbf{Z}$ – характеристический оператор квантового канала, то в силу теоремы 3.1 $\mathbf{Z}\in\pi_\rho(\mathcal{R})'$ и, следовательно, в силу утверждения 4.1 $\mathbf{Z} = \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(Z_{mn})\pi_\tau(E^\tau_{nm})$, где $Z_{mn}\in\mathcal{R}$. Поскольку в силу теоремы 3.1 $\mathbf{Z}\ge 0$, то для произвольного вектора $\Psi\in\mathcal{H}$ выполняется неравенство $\langle\Psi|\mathbf{Z}|\Psi\rangle\ge 0$. Учитывая возможность представления $\Psi = \sum_{m=1}^{n_\tau}\left|Y_m\otimes\tau_m\right\rangle$, из указанного неравенства следует

$$0\le\langle\Psi|\mathbf{Z}|\Psi\rangle = \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\left\langle Y_m\otimes\tau_m\right|\mathbf{Z}\left|Y_n\otimes\tau_n\right\rangle =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{n_\tau}\left\langle Y_m\otimes\tau_m\right|\sum_{k,l=1}^{n_\tau}\pi'_\tau(Z_{kl})\pi_\tau(E^\tau_{lk})\left|Y_n\otimes\tau_n\right\rangle =$$

$$= \sum_{m,n,k,l=1}^{n_\tau}\left\langle Y_m\otimes\tau_m\right|\pi'_\tau(Z_{kl})\pi_\tau(E^\tau_{lk})\left|Y_n\otimes\tau_n\right\rangle =$$

$$= \sum_{m,n,k,l=1}^{n_\tau}\left\langle Y_m\otimes\tau_m\middle|Y_nZ_{kl}\otimes\rho_\tau(E^\tau_{lk})\tau_n\right\rangle = \sum_{m,n,k,l=1}^{n_\tau}\delta_{kn}\left\langle Y_m\otimes\tau_m\middle|Y_nZ_{kl}\otimes\tau_l\right\rangle =$$

$$= \sum_{m,n,l=1}^{n_\tau} \langle Y_m \otimes \tau_m | Y_n Z_{nl} \otimes \tau_l \rangle = \sum_{m,n,l=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(Y_m^* Y_n Z_{nl}\right) \langle \tau_m | \tau_l \rangle =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(Y_n Z_{nm} Y_m^*\right) = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(Y_m Z_{mn} Y_n^*\right),$$

что доказывает первое условие. Наконец, в силу условия 3 теоремы 3.1 для произвольного вектора $\xi \in \mathcal{H}_\tau$ имеем

$$\frac{1}{n_\rho}\xi = \mathbf{V}^*\mathbf{Z}\mathbf{V}\xi = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \pi'(Z_{mn}) \pi_\tau (E_{nm}^\tau) \mathbf{V}\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_\rho}} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \left| Z_{mn} \otimes \rho_\tau (E_{nm}^\tau)\xi \right\rangle = \frac{1}{n_\rho} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}(Z_{mn}) \rho_\tau (E_{nm}^\tau)\xi,$$

что обеспечивает равенство $\mathbf{I} = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}(Z_{mn}) \rho_\tau (E_{nm}^\tau)$, откуда следует второе условие. Таким образом, теорема в сторону необходимости доказана.

Для доказательства достаточности проверим, что выполнение условий теоремы обеспечивает выполнение условий теоремы 3.2.

Итак, пусть дан оператор вида $\mathbf{Z} = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \pi'(Z_{mn}) \pi_\tau (E_{nm}^\tau)$, причем для Z_{mn} выполнены условия теоремы.

Покажем, что оператор $\mathbf{Z}$ положительный. Пусть $\Psi = \sum_{m=1}^{n_\tau} |Y_m \otimes \tau_m\rangle$ – произвольный вектор пространства $\mathcal{H}$, вычислим $\langle \Psi | \mathbf{Z} | \Psi \rangle$.

$$\langle \Psi | \mathbf{Z} | \Psi \rangle = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \langle Y_m \otimes \tau_m | \mathbf{Z} | Y_n \otimes \tau_n \rangle =$$

$$= \sum_{m,n,k,l=1}^{n_\tau} \langle Y_m \otimes \tau_m | \pi'(Z_{kl}) \pi_\tau (E_{lk}^\tau) | Y_n \otimes \tau_n \rangle =$$

$$= \sum_{m,n,k,l=1}^{n_\tau} \left\langle Y_m \otimes \tau_m \middle| Y_n Z_{kl} \otimes \rho_\tau (E_{lk}^\tau) \tau_n \right\rangle = \sum_{m,n,k,l=1}^{n_\tau} \delta_{kn} \langle Y_m \otimes \tau_m | Y_n Z_{kl} \otimes \tau_l \rangle =$$

$$= \sum_{m,n,l=1}^{n_\tau} \langle Y_m \otimes \tau_m | Y_n Z_{nl} \otimes \tau_l \rangle = \sum_{m,n,l=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(Y_m^* Y_n Z_{nl}\right) \langle \tau_m | \tau_l \rangle =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(Y_n Z_{nm} Y_m^*\right) \geq 0 \text{ в силу условия 1 теоремы.}$$

Представление оператора $\mathbf{Z}$ гарантирует его принадлежность $\pi_\rho(\mathcal{R})'$.

Вычислим, наконец, действие оператора $\mathbf{V}^*\mathbf{Z}\mathbf{V}$ на произвольный вектор $\xi \in \mathcal{H}_\tau$:

$$\mathbf{V}^*\mathbf{Z}\mathbf{V}\xi = \frac{1}{\sqrt{n_\rho}} \mathbf{V}^*\mathbf{Z} |1 \otimes \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_\rho}} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \pi'(Z_{mn}) \pi_\tau (E_{nm}^\tau) |1 \otimes \xi\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_\rho}} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \left| Z_{mn} \otimes \rho_\tau (E^\tau_{nm}) \xi \right\rangle = \frac{1}{n_\rho} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}(Z_{mn}) \rho_\tau (E^\tau_{nm}) \xi =$$

$$= \frac{1}{n_\rho} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \delta_{mn} \rho_\tau (E^\tau_{nm}) \xi = \frac{1}{n_\rho} \sum_{m=1}^{n_\tau} \rho_\tau (E^\tau_{mm}) \xi = \frac{1}{n_\rho} \xi ,$$

что доказывает выполнение условия 3 теоремы 3.2.

Таким образом, все условия теоремы выполнены, а значит, оператор $\mathbf{Z}$ является характеристическим оператором квантового канала, что и завершает доказательство теоремы. ∎

Теперь мы можем решить задачу, поставленную в начале этого раздела, получив представление для произвольного квантового канала в терминах его характеристического оператора.

Теорема 4.2. Всякий квантовый канал $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{R}$ представим в виде

$$\Phi(S) = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(S E^\tau_{mn}\right) Z_{nm}(\Phi),$$

где $S \in \mathcal{S}(\mathcal{T})$, $\{E^\tau_{mn} \mid m,n = 1,\ldots,n_\tau\}$ – система матричных единиц алгебры $\mathcal{T}$, а $\{Z_{mn}(\Phi) \mid m,n = 1,\ldots,n_\tau\}$ – семейство элементов алгебры $\mathcal{R}$, удовлетворяющее условиям:

1) для произвольных наборов $\{X_m \in \mathcal{R} \mid m = 1,\ldots,n_\tau\}$ выполняется неравенство $\sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(X_m Z_{mn}(\Phi) X_n^*\right) \geq 0$;
2) $\mathrm{Tr}(Z_{mn}(\Phi)) = \delta_{mn}$.

Доказательство. Пусть $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{R}$ – квантовый канал и $\mathbf{Z}(\Phi)$ – его характеристический оператор. В силу теоремы 4.1 оператор $\mathbf{Z}(\Phi)$ представим в виде $\mathbf{Z}(\Phi) = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \pi'_\rho(Z_{mn}(\Phi)) \pi_\tau\left(E^\tau_{nm}\right)$, где семейство $\{Z_{mn}(\Phi) \mid m,n = 1,\ldots,n_\tau\}$ удовлетворяет условиям 1 и 2. В силу следствия 3.1 отображение $\Psi = \Phi^*$ представимо в виде $\Psi(A) = n_\rho \rho_\tau^{-1}\left(\mathbf{V}^* \mathbf{Z}(\Phi) \pi_\rho(A) \mathbf{V}\right)$, откуда с учетом представления для $\mathbf{Z}(\Phi)$ можно получить

$$\Psi(A) = n_\rho \rho_\tau^{-1} \left(\sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \pi'_\rho(Z_{mn}(\Phi)) \pi_\tau\left(E^\tau_{nm}\right) \pi_\rho(A) \mathbf{V} \right) \qquad (4.5)$$

Для произвольного вектора $\xi \in \mathcal{H}_\tau$ с учетом 4.5 получаем

$$\rho_\tau(\Psi(A))\xi = n_\rho \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \pi'_\rho(Z_{mn}(\Phi)) \pi_\tau\left(E^\tau_{nm}\right) \pi_\rho(A) \mathbf{V} \xi =$$

$$= \sqrt{n_\rho} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \pi'_\rho(Z_{mn}(\Phi)) \pi_\tau\left(E^\tau_{nm}\right) \pi_\rho(A) \left| 1 \otimes \xi \right\rangle =$$

$$= \sqrt{n_\rho} \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathbf{V}^* \left| A Z_{mn}(\Phi) \otimes \rho_\tau\left(E^\tau_{nm}\right) \xi \right\rangle = \sum_{m,n=1}^{n_\tau} \mathrm{Tr}\left(A Z_{mn}(\Phi)\right) \rho_\tau\left(E^\tau_{nm}\right) \xi$$

Таким образом, установлено, что $\Delta(A)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(AZ_{mn}(\mathrm{X})\right)E_{nm}^{\tau}$. Поскольку $\Delta=\mathrm{X}^*$, то $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{X}(S)A\right)=\mathrm{Tr}\left(S\Delta(A)\right)$, где $S\in\mathfrak{S}(\mathcal{T})$, $A\in\mathcal{R}$. Следовательно,

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{X}(S)A\right)=\mathrm{Tr}\left(S\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(AZ_{mn}(\mathrm{X})\right)E_{nm}^{\tau}\right)=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(AZ_{mn}(\mathrm{X})\right)\mathrm{Tr}\left(SE_{nm}^{\tau}\right)=\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(SE_{nm}^{\tau}\right)Z_{mn}(\mathrm{X})\right)A\right)$$

Тем самым, в виду произвольности $A\in\mathcal{R}$, получаем

$$\mathrm{X}(S)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(SE_{mn}^{\tau}\right)Z_{nm}(\mathrm{X}). \qquad \blacksquare$$

<u>Следствие 4.1</u>. Пусть $\mathrm{X}(S)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(SE_{mn}^{\tau}\right)Z_{nm}(\mathrm{X})$ – квантовый канал, тогда $\mathrm{X}^*(A)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(AZ_{mn}(\mathrm{X})\right)E_{nm}^{\tau}$.

<u>Утверждение 4.2.</u> Пусть $\mathrm{X}(S)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(SE_{mn}^{\tau}\right)Z_{nm}(\mathrm{X})$ – квантовый канал, тогда $Z_{mn}(\mathrm{X})=\mathrm{X}\left(E_{mn}^{\tau}\right)$.

Доказательство проводится прямым вычислением. $\blacksquare$

5. Генератор квантового состояния

В этом и следующих разделах мы рассмотрим примеры квантовых каналов, которые могут оказаться полезными в квантовом компьютинге. Первый пример связан с необходимостью инициализировать состояние вычислительной системы. В этой ситуации необходимо иметь канал, формирующий на выходе постоянное квантовое состояние.

Итак, пусть заданы конечные передающая $\mathcal{T}$ и принимающая $\mathcal{R}$ квантовые системы, S_0 – матрица плотности в алгебре $\mathcal{R}$. В пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим оператор $\mathbf{Z}=\pi_{\rho}(S_0)$. Очевидно, что для этого оператора выполнены условия 1 и 2 теоремы 3.2, проверим выполнение условия 3:

$$\mathbf{V}^*\mathbf{Z}\mathbf{V}\xi=\frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\mathbf{V}^*\pi_{\rho}(S_0)\left|1\otimes\xi\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\mathbf{V}^*\left|S_0\otimes\xi\right\rangle=\frac{\mathrm{Tr}\left(S_0\right)}{n_\rho}\xi=\frac{1}{n_\rho}\xi.$$

Тем самым, $\mathbf{Z}=\pi_{\rho}(S_0)$ является характеристическим оператором некоторого квантового канала. Вычислим этот канал.

Прежде всего, найдем семейство $\{Z_{mn}\mid m,n=1,\ldots,n_\tau\}$ для этого оператора:

$$\mathbf{Z}\left|1\otimes\tau_m\right\rangle=\left|S_0\otimes\tau_m\right\rangle=\sum_{m,n=1}^{N_\tau}\left|\delta_{mn}S_0\otimes\tau_n\right\rangle,$$

откуда следует, что $Z_{mn}=\delta_{mn}S_0$.

Теперь можно найти сам канал:

$$\mathrm{X}_{\Sigma_0}(\Sigma)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(\Sigma E^{\tau}_{mn}\right)Z_{nm}\left(\mathrm{X}_{\Sigma_0}\right)=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(\Sigma E^{\tau}_{mn}\right)\delta_{nm}\Sigma_0=$$

$$=\sum_{m=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(\Sigma E^{\tau}_{mm}\right)\Sigma_0=\mathrm{Tr}\left(\Sigma\sum_{m=1}^{n_\tau}E^{\tau}_{mm}\right)\Sigma_0=\mathrm{Tr}(\Sigma)\Sigma_0=\Sigma_0,$$

тем самым, $\mathrm{X}_{\Sigma_0}(\Sigma)=\Sigma_0$ и такой канал можно рассматривать как канал, обеспечивающий генерацию состояния с матрицей плотности Σ_0.

Этот пример можно обобщить следующим образом: рассмотрим оператор $\mathbf{Z}=\sum_{m=1}^{n_\tau}\pi'(\Sigma_m)\pi_\tau\left(E^{\tau}_{mm}\right)$, где $\{\Sigma_m \mid m=1,\ldots,n_\tau\}$ – семейство матриц плотности алгебре $\mathcal{R}$. Для этого оператора, очевидно, выполнены условия 1 и 2 теоремы 3.2. Проверим условие 3:

$$\mathbf{V}^*\mathbf{Z}\mathbf{V}\xi=\frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\sum_{m=1}^{n_\tau}\mathbf{V}^*\pi'(\Sigma_m)\pi_\tau\left(E^{\tau}_{mm}\right)\left|1\otimes\xi\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\sum_{m=1}^{n_\tau}\mathbf{V}^*\left|\Sigma_m\otimes\rho_\tau\left(E^{\tau}_{mm}\right)\xi\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{n_\rho}\sum_{m=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}(\Sigma_m)\rho_\tau\left(E^{\tau}_{mm}\right)\xi=\frac{1}{n_\rho}\sum_{m=1}^{n_\tau}\rho_\tau\left(E^{\tau}_{mm}\right)\xi=\frac{1}{n_\rho}\xi.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{Z}$ – характеристический оператор некоторого квантового канала. Восстановим этот канал, для чего вычислим семейство $\{Z_{mn} \mid m,n=1,\ldots,n_\tau\}$:

$$\mathbf{Z}\left|1\otimes\tau_m\right\rangle=\sum_{k=1}^{n_\tau}\pi'(\Sigma_k)\pi_\tau\left(E^{\tau}_{kk}\right)\left|1\otimes\tau_m\right\rangle=\sum_{k=1}^{n_\tau}\left|\Sigma_k\otimes\rho_\tau\left(E^{\tau}_{kk}\right)\tau_m\right\rangle=$$

$$=\sum_{k=1}^{n_\tau}\delta_{km}\left|\Sigma_k\otimes\tau_k\right\rangle=\left|\Sigma_m\otimes\tau_m\right\rangle=\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\left|\delta_{mn}\Sigma_m\otimes\tau_n\right\rangle,$$

откуда $Z_{mn}=\delta_{mn}\Sigma_m$, и, следовательно, $\mathrm{X}(\Sigma)=\sum_{m=1}^{n_\tau}\mathrm{Tr}\left(E^{\tau}_{mm}\Sigma\right)\Sigma_m$.

Такой канал можно интерпретировать, как канал, генерирующий квантовое состояние Σ_m с вероятностью $\mathrm{Tr}\left(E^{\tau}_{mm}\Sigma\right)$.

6. Квантовое измерение

Пусть в алгебре принимающей квантовой системы $\mathcal{R}$ выбрана максимальная коммутативная подалгебра $\mathcal{D}$. Мы можем рассмотреть квантовый канал $\mathrm{M}:\mathcal{T}\to\mathcal{R}$, которые обладает следующим свойством: $\mathrm{M}(\mathcal{T})\subset\mathcal{D}$.

<u>Определение 6.1.</u> Квантовый канал $\mathrm{M}:\mathcal{T}\to\mathcal{R}$ будем называть квантовым измерением, если существует $\mathcal{D}$ – максимальная коммутативная подалгебра $\mathcal{R}$ такая, что $\mathrm{M}(\mathcal{T})\subset\mathcal{D}$.

Для описания этого канала выберем в подалгебре $\mathcal{D}$ порождающую систему минимальных ортопроекторов $\{E^{\rho}_{ii} \mid i=1,\ldots,n_\rho\}$.

Поскольку в силу утверждения 4.2 $Z_{mn}(\mathrm{M})=\mathrm{M}\left(E^{\tau}_{mn}\right)$, а по предположению $\mathrm{M}(\mathcal{T})\subset\mathcal{D}$, то $Z_{mn}(\mathrm{M})\in\mathcal{D}$. Следовательно,

$Z_{mn}(\Phi)=\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\xi_{mn}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}$. Воспользовавшись теперь представлением для Φ из теоремы 4.2, получим

$$\Phi(S)=\sum_{m,n=1}^{n_{\mathbf t}}\mathrm{Tr}\left(SE_{mn}^{\mathbf t}\right)Z_{nm}(\Phi)=\sum_{m,n=1}^{n_{\mathbf t}}\mathrm{Tr}\left(SE_{mn}^{\mathbf t}\right)\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\xi_{nm}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{n_{\mathbf t}}\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\mathrm{Tr}\left(SE_{mn}^{\mathbf t}\right)\xi_{nm}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}=\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\left(\sum_{m,n=1}^{n_{\mathbf t}}\mathrm{Tr}\left(S\xi_{mn}^{i}E_{nm}^{\mathbf t}\right)\right)E_{ii}^{\mathbf r}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\mathrm{Tr}\left(S\left(\sum_{m,n=1}^{n_{\mathbf t}}\xi_{mn}^{i}E_{nm}^{\mathbf t}\right)\right)E_{ii}^{\mathbf r}=\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\mathrm{Tr}\left(SM_i\right)E_{ii}^{\mathbf r},$$

где $M_i=\sum_{m,n=1}^{n_{\mathbf t}}\xi_{mn}^{i}E_{nm}^{\mathbf t}\in\mathcal{T}$, таким образом $\Phi(S)=\sum_{i=1}^{n_{\mathbf r}}\mathrm{Tr}\left(SM_i\right)E_{ii}^{\mathbf r}$.

Выясним, какими свойствами должно обладать семейство $\{M_i \mid i=1,\ldots,n_{\mathbf r}\}$.

Во-первых, поскольку $\mathbf{Z}(\Phi)\geq 0$, то для вектора $\Psi=\sum_{m=1}^{n_t}\left|E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_m\right\rangle\left\langle\tau_m\middle|\xi\right\rangle$, где $1\leq i\leq n_{\mathbf r}$, имеем:

$$0\leq\left\langle\Psi\middle|\mathbf{Z}(\Phi)\middle|\Psi\right\rangle=\sum_{m,n=1}^{n_t}\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_m\middle|\mathbf{Z}(\Phi)\middle|E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_n\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{n_t}\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_m\middle|\sum_{k,l=1}^{n_{\mathbf t}}\pi_{\mathbf r}\left(\sum_{j=1}^{n_{\mathbf r}}\xi_{kl}^{j}E_{jj}^{\mathbf r}\right)\otimes\pi_{\mathbf t}\left(E_{lk}^{\mathbf t}\right)\middle|E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_n\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n,k,l=1}^{n_t}\sum_{j=1}^{n_{\mathbf r}}\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_m\middle|\xi_{kl}^{j}E_{ii}^{\mathbf r}E_{jj}^{\mathbf r}\otimes\rho_{\mathbf t}\left(E_{lk}^{\mathbf t}\right)\tau_n\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n,k,l=1}^{n_t}\delta_{kn}\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_m\middle|\xi_{kl}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_l\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n,l=1}^{n_t}\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_m\middle|\xi_{nl}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}\otimes\tau_l\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n,l=1}^{n_t}\mathrm{Tr}\left(E_{ii}^{\mathbf r}\xi_{nl}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}\right)\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle\tau_m\middle|\tau_l\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{n_t}\mathrm{Tr}\left(E_{ii}^{\mathbf r}\xi_{nm}^{i}E_{ii}^{\mathbf r}\right)\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=\sum_{m,n=1}^{n_t}\xi_{nm}^{i}\left\langle\xi\middle|\tau_m\right\rangle\left\langle\tau_n\middle|\xi\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{n_t}\left\langle\xi\middle|\rho_{\mathbf t}\left(\xi_{nm}^{i}E_{mn}^{\mathbf t}\right)\middle|\xi\right\rangle=\left\langle\xi\middle|\rho_{\mathbf t}\left(\sum_{m,n=1}^{n_t}\xi_{nm}^{i}E_{mn}^{\mathbf t}\right)\middle|\xi\right\rangle=\left\langle\xi\middle|\rho_{\mathbf t}\left(M_i\right)\middle|\xi\right\rangle$$

Таким образом, получено неравенство $\left\langle\xi\middle|\rho_{\mathbf t}(M_i)\middle|\xi\right\rangle\geq 0$, откуда $M_i\geq 0$ для всех $i=1,\ldots,n_{\mathbf r}$.

Во-вторых, учитывая $\mathbf{V}^{*}\mathbf{Z}(\Phi)\mathbf{V}=\dfrac{1}{n_{\mathbf r}}\mathbf{I}$, для произвольного $\xi\in\mathcal{H}_{\mathbf t}$ имеем:

$$\frac{1}{n_\rho}\xi = \mathbf{V}^*\mathbf{Z}(\mathcal{M})\mathbf{V}\xi = \frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\mathbf{V}^*\mathbf{Z}(\mathcal{M})\left|1 \otimes \xi\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathbf{V}^*\left|Z_{mn}(\mathcal{M}) \otimes \rho_\tau(E^\tau_{nm})\xi\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_\rho}}\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\mathbf{V}^*\left|\sum_{i=1}^{n_\rho}\xi^i_{mn}E^\rho_{ii} \otimes \rho_\tau(E^\tau_{nm})\xi\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n_\rho}\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\sum_{i=1}^{n_\rho}\xi^i_{mn}\,\mathrm{Tr}(E^\rho_{ii})\rho_\tau(E^\tau_{nm})\xi = \frac{1}{n_\rho}\sum_{i=1}^{n_\rho}\sum_{m,n=1}^{n_\tau}\rho_\tau(\xi^i_{mn}E^\tau_{nm})\xi =$$

$$= \frac{1}{n_\rho}\sum_{i=1}^{n_\rho}\rho_\tau(M_i)\xi$$

Таким образом, $\xi = \sum_{i=1}^{n_\rho}\rho_\tau(M_i)\xi$, т.е. $\sum_{i=1}^{n_\rho}M_i = 1$.

Суммируя изложенное выше, получаем: семейство $\{M_i \mid i = 1,\ldots,n_\rho\}$ является разложением единицы в алгебре $\mathfrak{T}$, а $\mathcal{M}(S) = \sum_{i=1}^{n_\rho}\mathrm{Tr}(SM_i)E^\rho_{ii}$.

Непосредственными вычислениями проверяется, что отображение вида $\mathcal{M}(S) = \sum_{i=1}^{n_\rho}\mathrm{Tr}(SM_i)E^\rho_{ii}$, где $\{M_i \mid i = 1,\ldots,n_\rho\}$ – разложение единицы в алгебре $\mathfrak{T}$, а $\{E^\rho_{ii} \mid i = 1,\ldots,n_\rho\}$ – ортогональное разложение единицы в алгебре $\mathfrak{R}$, то $\mathcal{M}$ является квантовым измерением.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6.1. Линейное отображение $\mathcal{M}:\mathfrak{T}\to\mathfrak{R}$ является квантовым измерением, если и только если существуют $\{M_i \mid i = 1,\ldots,n_\rho\}$ – разложение единицы в алгебре $\mathfrak{T}$, $\{E^\rho_{ii} \mid i = 1,\ldots,n_\rho\}$ – ортогональное разложение единицы в алгебре $\mathfrak{R}$ и $\mathcal{M}(S) = \sum_{i=1}^{n_\rho}\mathrm{Tr}(SM_i)E^\rho_{ii}$. ,

7. Выводы

Для модели конечного квантового канала в статье введен инвариант, названный авторами характеристическим оператором канала. Установлены свойства характеристического оператора и получено представление канала в терминах характеристического оператора. С использованием характеристического оператора исследованы частные случаи квантовых каналов – генератор квантового состояния и квантовое измерение. Полученные результаты согласуются с известными в физике фактами [10], что подтверждает адекватность модели квантового канала.

Развитие результатов, полученных в настоящей статье, по-видимому, можно достигнуть на пути построения модели квантовой вычислительной системы с каналами в качестве ее операций. При таком подходе устраняется различие между операцией вычислительной системы – преобразованием памяти, и проверкой условия – измерением, что позволяет сформулировать на едином языке семантические правила для квантовых вычислительных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манин Ю. И. Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980. – 120 с.
2. Feynman R. P. Simulating physics with computers. – Internat. J. Theoret. Phys. – № 21, 1982. – Pp. 467 – 488.
3. Feynman R. P. Quantum mechanical computers. – Found. Phys. – № 16, 1986. – Pp. 507 – 531.
4. Deutsch D. Quantum theory: the Church-Turing principle and the universal quantum computer // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. – Vol. A, № 400, 1985. – Pp. 96 – 117.
5. Deutsch D. Quantum computational networks // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. – Vol. A, № 425, 1989. – Pp. 73 – 90.
6. Shor P. W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring // Proc. 35th Ann. Symp. on Found. of Comp. Sc. – Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press, 1994. – Pp. 124–134.
7. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. – М.: МЦНМО, 2002. – 128 с.
8. Dijkstra E. W. A Discipline of Programming. – Prentice-Hall, 1976. – 289 p.
9. D'Hondt E., Panangaden P. Quantum Weakest Preconditions // LANL Report quant-ph/0501157, 2005. – 18 p. – http://xxx.lanl.gov.
10. Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. – М.: Наука, 1980. – 320 с.