Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.218
№ 809, 2008, с.102-108

О модельных представлениях случайных процессов с комплексным спектром

Е. А. Когут
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Different ways of random processes model-building technique, generated by linear bounded not self-adjoint operator is considered in this article. Correlative function of this process and also its infinitesimal correlative function and time-depended rank is investigated as an example.

Наиболее известными моделями нестационарных случайных процессов являются случайные процессы со стационарными n-ми приращениями [1]. Однако имеется ряд прикладных задач (например, затухание и разгон ветровых волн, переходные режимы в системах со случайными параметрами и др.), для которых представления внешних воздействий в виде суммы стационарного случайного процесса и полинома со случайными коэффициентами не совсем соответствуют реальному процессу. Поэтому, возникает задача о построении простейших нестационарных случайных процессов с комплексным спектром.

При построении корреляционной теории случайных процессов достаточно эффективным является гильбертов подход, когда от случайного процесса переходят к соответствующей кривой $x(t)$ в гильбертовом пространстве, а корреляционная функция подсчитывается как скалярное произведение $K(t,s) = (x(t), x(s))$.

Для эволюционно представимых кривых, т.е. кривых вида $x(t) = e^{itA}x_0$ модельные представления корреляционных функций тесно связаны с треугольными и универсальными моделями несамосопряженных операторов A. При этом существенно используются представления операторной экспоненты через резольвенту оператора A. В данной статье вычисляется резольвента для некоторых видов интегральных несамосопряженных операторов, которая может быть использована для соответствующего представления корреляционной и инфинитизимальной корреляционной функций.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t,x) = e^{itA} f_0(x)$, где A - несамосопряженный оператор в $L_2[0,l]$ вида:

$$(Af)(x) = \alpha(x) f(x) + i\varphi(x)\int_0^l \overline{\theta}(y) f(y)dy, \text{ где}$$

$$f(x), f_0(x), \theta(x), \varphi(x) \in L_2[0,l] \text{ и } \operatorname{Im}\alpha(x) = 0 \quad (1)$$

Легко видеть, что сопряженный оператор A^* имеет вид:

$$(A^{*}g)(x)=\alpha(x)g(x)-i\theta(x)\int_{0}^{l}\overline{\varphi}(t)g(t)dt$$

Построение такой операторной экспоненты можно ввести различными путями. Например, предварительно построив резольвенту оператора A.

$R_{A}(\lambda)f(x)=(A-\lambda I)^{-1}f(x)=g(x,\lambda)$.

Искомое выражение $g(x,\lambda)$ есть решение линейного интегрального уравнения Фридгольма $(A-\lambda I)g(x,\lambda)=f(x)$.

$$(\alpha(x)-\lambda)g(x,\lambda)+i\varphi(x)\int_{0}^{l}\overline{\theta}(y)g(y,\lambda)dy=f(x).$$

Записав его в стандартном виде ([2]):

$g(x,\lambda)-\int_{0}^{l}\frac{-i\varphi(x)\overline{\theta}(y)}{\alpha(x)-\lambda}g(y,\lambda)dy=\frac{f(x)}{\alpha(x)-\lambda}$ с ядром $K(x,y)=-i\frac{\varphi(x)\overline{\theta}(y)}{\alpha(x)-\lambda}$

можем получить решение $g(x,\lambda)$ в виде:

$g(x,\lambda)=\frac{f(x)}{\alpha(x)-\lambda}+\int_{0}^{l}\Gamma(x,s,\lambda)\frac{f(s)}{\alpha(s)-\lambda}d(s),$ где $\Gamma(x,s,\lambda)$ - резольвента Фредгольма ([2]).

$$\Gamma(x,s,\lambda)=\frac{D(x,s,\lambda)}{D(\lambda)}$$

$$D(x,s,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}B_{n}(x,s)\lambda^{n}\ ;\quad D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}C_{n}\lambda^{n}$$

$$C_{0}=1$$

$$B_{0}(x,s)=K(x,s)$$

$$C_{n}=\int_{0}^{l}B_{n-1}(x,x)dx \quad \text{и}$$

$$B_{n}(x,s)=\int_{0}^{l}...\int_{0}^{l}dt_{1}...dt_{n}\begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,t_{1})... & K(x,t_{n}) \\ K(t_{1},s) & K(t_{1,}t_{1})... & K(t_{1},t_{n}) \\ ..... & ..... & ..... \\ K(t_{n},t_{s}) & K(t_{n},t_{1}).. & K(t_{n},t_{n}) \end{vmatrix}$$

В нашем случае $C_{1}=\int_{0}^{l}B_{0}(x,x)dx=\int_{0}^{l}\frac{-i\varphi(x)\overline{\theta}(x)}{\alpha(x)-\lambda}dx$ при $n\geq 2;$

$$C_{n}=\int_{0}^{l}B_{n-1}(x,x)dx=0$$

Таким образом, $g(x,\lambda)=\dfrac{f(x)}{\alpha(x)-\lambda}-\dfrac{i\varphi(x)}{\alpha(x)-\lambda}\cdot\dfrac{C_f(\lambda)}{1+iC_\varphi(\lambda)}$, (2)

где $C_f(\lambda)=\int\limits_0^l\dfrac{f(y)\overline{\theta}(y)}{\alpha(y)-\lambda}dy$ и $C_\varphi(\lambda)=\int\limits_0^l\dfrac{\varphi(y)\overline{\theta}(y)}{\alpha(y)-\lambda}dy$

Из (2) видно, что спектр соответствующего случайного процесса состоит из вещественного непрерывного спектра, принадлежащего области значений функции $\alpha(x)$ и комплексного спектра, который определяется из уравнения $C_\varphi(\lambda)=i$.

Искомая функция $\xi(t,x)$ может быть получена в виде контурного интеграла $\xi(t,x)=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_A}e^{it\lambda}R_A(\lambda)d\lambda$, где Γ_A - контур, охватывающий спектр оператора A [3].

В частном случае, когда $\alpha(x)\equiv x$:

$$R_A(\lambda)f_0(x)=\frac{f_0(x)}{x-\lambda}-\frac{i\varphi(x)}{x-\lambda}\cdot\frac{C_{f_0}(\lambda)}{1+iC_\varphi(\lambda)}$$

$$e^{itA}f_0(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_A}e^{it\lambda}\frac{f_0(x)}{x-\lambda}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_A}e^{it\lambda}\frac{i\varphi(x)}{x-\lambda}d\lambda\cdot\frac{\int\limits_0^l\frac{f_0(y)\overline{\theta}(y)}{y-\lambda}dy}{1+i\int\limits_0^l\frac{\varphi(t)\overline{\theta}(t)}{t-\lambda}dt}=$$

$$=e^{itx}f_o(x)+\frac{i\varphi(x)}{2\pi i}\int\limits_0^l f_0(y)\overline{\theta}(y)dy\cdot\oint\limits_{\Gamma_A}\frac{e^{it\lambda}}{(x-\lambda)(y-\lambda)}\frac{d\lambda}{1+i\int\limits_0^l\frac{\varphi(t)\overline{\theta}(t)}{t-\lambda}dt}$$

Возможен и другой подход, к построению $e^{itA}f_0(x)=\xi(t,x)$ (3) основанный на решении задачи Коши,

$$\frac{\partial\xi(t,x)}{\partial t}=iAe^{itA}f_0(x)=i\alpha(x)\xi(t,x)-\varphi(x)\int\limits_0^l\overline{\theta}(y)dy\xi(t,y)$$

Обозначим интеграл $\int\limits_0^l\overline{\theta}(y)\xi(t,y)dy\equiv\gamma(t)$

Решение этого уравнения $\xi(t,x)=e^{i\alpha(x)t}f_0(x)-\varphi(x)\int\limits_0^t dse^{i\alpha(x)(t-s)}\gamma(s)$ (4)

Теперь задача свелась к нахождению функции $\gamma(s)$. Для ее нахождения умножим (4) на $\overline{\theta}(x)$ и вычислим интегралы обеих частей по x от 0 до l.

$$\int_0^l \xi(t,x)\overline{\theta}(x)dx = \int_0^l e^{i\alpha(x)t} f_0(x)\overline{\theta}(x)dx - \int_0^l \varphi(x)\overline{\theta}(x)dx \cdot \int_0^t e^{i\alpha(x)(t-s)}\gamma(s)ds$$

Для краткости записи обозначим первый интеграл в правой части $F(x)$, т.е.

$$\gamma(t) = F(x) - \int_0^t \gamma(s)ds \cdot \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\varphi(x)\overline{\theta}(x)dx \text{ и}$$

$$\gamma(t) = F(x) - \int_0^t \gamma(s)G(t-s)ds, \text{ где} \qquad (5)$$

$$G(t-s) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\varphi(x)\overline{\theta}(x)dx \qquad (6)$$

Для дальнейшего отыскания $\gamma(t)$ воспользуемся известными результатами преобразования Лапласа, [5]. Умножим (5) на $e^{-pt}dt$ и вычислим интегралы от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\gamma(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}F(t)dt - \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \cdot \int_0^t G(t-s)\gamma(s)ds$$

Известно ([5]), что преобразование Лапласа свертки двух функций равно произведению преобразований Лапласа указанных функций.

Таким образом,

$$\tilde{\gamma}(p) = \tilde{F}(p) - \tilde{\gamma}(p)\tilde{G}(p), \text{ где } \tilde{G}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pu}G(u)du$$

$$\tilde{\gamma}(p) = \frac{\tilde{F}(p)}{1+\tilde{G}(p)}$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет найти $\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\tilde{\gamma}(p)dp$, где c - абсцисса сходимости интеграла, т.е. $\inf$ множества всех действительных частей p, для которых сходится указанный интеграл.

$$F(t) = \int_0^l e^{i\alpha(x)t} f_0(x)\overline{\theta}(x)dx$$

$$\tilde{F}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \int_0^l e^{i\alpha(x)t} f_0(x)\overline{\theta}(x)dx = \int_0^l \frac{f_0(x)\overline{\theta}(x)}{p-i\alpha(x)}dx$$

$$G(u) = \int_0^l e^{i\alpha(x)u}\varphi(x)\overline{\theta}(x)dx$$

$$\tilde{G}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-up}du \int_0^l e^{i\alpha(x)u}\varphi(x)\overline{\theta}(x)dx = \int_0^l \frac{\varphi(x)\overline{\theta}(x)}{p-i\alpha(x)}dx$$

Проиллюстрируем полученный результат на конкретном примере. Пусть $\alpha(x)=\alpha - const$; $\theta(x)=e^{x}$; $f_0(x)=x$ и $\varphi(x)=e^{-x}$.

$$(Af)(x)=\alpha f(x)+ie^{-x}\int_0^l e^{u} f(u)du\,;\quad \xi(t,x)=e^{itA} f_0(x)\,;\quad \xi(0,x)=x\,;$$

$$\frac{\partial\xi(t,x)}{\partial t}=iA\xi(t,x)=i\alpha\xi(t,x)-e^{-x}\int_0^l e^{u}\xi(t,u)du \tag{7}$$

Обозначим $\int_0^l e^{u}\xi(t,u)du=\gamma(u)$. Умножив обе части равенства (7) на e^{x} и вычислив интегралы по x от 0 до l, получаем

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)=i\alpha\gamma(t)-l\gamma(t)\,;\quad \frac{d}{dt}\gamma(t)=(i\alpha-l)\gamma(t)$$

Решение этого уравнения $\gamma(t)=e^{t(i\alpha-l)}\gamma_0$, где начальное условие $\gamma_0=\int_0^l e^{u}\xi(0,u)du=\int_0^l e^{u}u\,du=1+e^{l}(l-1)$

$$\xi(t,x)=e^{i\alpha t}x-e^{-x}\int_0^t ds e^{i\alpha(t-s)}e^{s(i\alpha-l)}\gamma_0=e^{i\alpha t}x-e^{-x+i\alpha t}\gamma_0\int_0^t e^{-sl}ds=$$

$$=e^{i\alpha t}x+\frac{\gamma_0}{l}e^{-x+i\alpha t}(e^{-tl}-1)=e^{i\alpha t}(x+\frac{\gamma_0}{l}e^{-x}(e^{-tl}-1))$$

Корреляционная функция такого случайного процесса будет иметь вид:

$$K(t,s)=\int_0^l \xi(t,x)\overline{\xi}(s,x)dx=\int_0^l e^{i\alpha t}(x+\frac{\gamma_0}{l}e^{-x}(e^{-tl}-1))e^{-i\alpha s}(x+\frac{\gamma_0}{l}e^{-x}(e^{-sl}-l))dx=$$

$$=e^{i\alpha(t-s)}\int_0^l[x^2+\frac{\gamma_0}{l}e^{-x}(e^{-tl}-1)x+x\frac{\gamma_0}{l}e^{-x}(e^{-sl}-1)+\left(\frac{\gamma_0}{l}\right)^2 e^{-2x}(e^{-tl}-1)(e^{-sl}-1)]dx=$$

$=e^{i\alpha(t-s)}[B_0 e^{-l(t+s)}+B_1(e^{-tl}+e^{-sl})+B_2]$, где

$$B_0=\frac{\gamma_0}{2l}(1-e^{-2l})$$

$$B_1=\frac{\gamma_0}{l}(1-le^{-l}-e^{-l})+\left(\frac{\gamma_0}{l}\right)^2\frac{e^{-2l}-1}{2}$$

$$B_2=\frac{l^3}{3}-2\frac{\gamma_0}{l}(1-e^{-l}-le^{-l})+\left(\frac{\gamma_0}{l}\right)^2\frac{1-e^{-2l}}{2}$$

Инфинитизимальная корреляционная функция [4]:

$$W(t,s)=\frac{\partial}{\partial\tau}K(t+\tau,s+\tau)\Big|_{\tau=0}=e^{i\alpha(t-s)}(-2B_0 le^{-l(t+\tau)}-B_1 l(e^{-lt}+e^{-ls}))=$$

$$= -2lB_0 e^{i\alpha(t-s)}(e^{-l(t+s)} + \frac{B_1}{2B_0}(e^{-lt} + e^{-ls}))$$

Она может быть представлена в виде:
$W(t,s) = \Phi_1(t)\overline{\Phi}_2(s) + \Phi_2(t)\overline{\Phi}_1(s)$, где

$$\Phi_1(t) = -2lB_0 e^{i\alpha t - lt}, \quad \Phi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-lt} + \frac{B_1}{2B_0}\right)e^{i\alpha t}$$

$$W(t,s) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Phi_\alpha(t) J_{\alpha\beta} \overline{\Phi}_\beta(s), \text{ где } J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}, \quad J^2 = \mathrm{I}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ранг нестационарности процесса равен 2.

Этот метод построения моделей эволюционно представимых случайных процессов, использующий резольвенту основного оператора, удобен и в случае интегральных операторов вольтерровского типа, т.е. операторов вида [6]:

$$(Af)(x) = \alpha(x) f(x) + i\varphi(x)\int_0^x \overline{\theta}(y) f(y)dy$$

В этом случае резольвента оператора A имеет вид

$$R_A(\lambda) f(x) = \frac{f(x)}{\alpha(x)-\lambda} - i\frac{\varphi(x)}{\alpha(x)-\lambda}\int_0^x \frac{f(y)\overline{\theta}(y)}{\alpha(y)-\lambda} dy \cdot e^{-i\int_y^x \frac{\theta(\sigma)\varphi(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\lambda}d\sigma}$$

В случае, когда $\alpha(x) \equiv \alpha - const$, операторная экспонента e^{itA} будет иметь вид

$$e^{itA} f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} e^{it\lambda} d\lambda \left(\frac{f(x)}{\alpha-\lambda} - i\frac{\varphi(x)}{\alpha-\lambda}\int_0^x \frac{f(y)\overline{\theta}(y)}{\alpha-\lambda} dy \cdot e^{-\frac{i}{\alpha-\lambda}\int_y^x \overline{\theta}(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma} \right),$$

где Γ_A - гладкий контур, охватывающий спектр оператора A. Обозначим

$\int_y^x \overline{\theta}(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = b(y,x)$ и используя теорию вычетов, получаем:

$$e^{itA} f(x) = e^{it\alpha} f(x) + \frac{i\varphi(x)}{2\pi i}\oint_{\Gamma_A} e^{it\lambda} d\lambda \int_0^x \frac{f(y)\overline{\theta}(y)}{(\alpha-\lambda)^2} dy \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!(\alpha-\lambda)^k}(b(y,x))^k =$$

$$= e^{it\alpha} f(x) - i\varphi(x)\int_0^x f(y)\overline{\theta}(y)dy \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ib(y,x))^k}{k!}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\oint_{\Gamma_A} \frac{e^{it\lambda}}{(\alpha-\lambda)^{k+2}} d\lambda =$$

$$= e^{it\alpha} f(x) - i\varphi(x)\int_0^x f(y)\overline{\theta}(y)dy(it)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tb(y,x))^k}{k!(k+1)!} e^{it\lambda}$$

Воспользовавшись представлением в виде ряда функции Бесселя первого рода

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$ приходим к выражению:

$$e^{itA} f(x) = e^{it\alpha}\left(f(x) + t\varphi(x)\int_0^x dy\,\frac{f(y)\overline{\theta}(y)}{\sqrt{tb(y,x)}} J_1(2\sqrt{tb(y,x)})\right) =$$

$$= e^{it\alpha}\left(f(x) + \varphi(x)\int_0^x f(y)\theta(y)dy\sqrt{\frac{t}{b(y,x)}} J_1(2\sqrt{tb(y,x)})\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Caines. Linear Stochastic Systems. John Wiley ahd Sons, 1988.
2. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Гос. изд-во физ-мат литературы, 1959.-232с.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536с.
4. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Изд-во Харьковского университета, 1971. – 160с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Изд-во Высшая школа, 1966. – 407с.
6. Золотарев В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Харьков: ХНУ, 2003 – 342с.