Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.876.5
№ 809, 2008, с.119-131

Розроблення алгоритму швидкого пофарбування теоретико-графових моделей для задач розподілення ресурсів з нечіткими обмеженнями

М. В. Лисенко, І. І. Скрильник
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Україна

The problems with object's membership to fuzzy neighborhood of classes are considered. It is shown that these problems can be classified as graph coloring problem. The necessity of special algorithms design is grounded. The graph is presented as a fuzzy relationship function – fuzzy graph. Therefore, fuzzy graph coloring problem is stated and resolved using the mathematical operations with fuzzy relationship functions.

Вступ

Розвиток сучасної теорії графів тісно пов′язаний із використанням обчислювальних пристроїв, які є ефективним засобом для розв′язання практичних задач формалізованих та представлених у вигляді певної схеми. Різноманітні задачі, що виникають при плануванні виробництва, складанні графіків технічного огляду, збереження та транспонування товарів можуть бути представлені часто як задачі теорії графів, тісно пов′язані з так званою «задачею пофарбування». Така сукупність задач може бути узагальнена і зведена у рамки розв′язку однієї єдиної задачі, що ґрунтується на пофарбуванні теоретико-графової моделі.

Ще в період становлення теорії графів виникала велика кількість таких задач, для розв′язку котрих потрібно було будувати спеціальні алгоритми. Але при цьому, як правило, не накладалися ніякі обмеження на складність алгоритмів, а лише розглядалося питання їх існування.

Впровадження обчислювальної техніки поставило перед теорією графів проблему знаходження не довільних алгоритмів, що давали б можливість розв′язувати ті чи інші класи задач, а таких алгоритмів, котрі допускали б практичну реалізацію із використанням сучасних обчислювальних пристроїв.

На сьогоднішній день розроблено багато алгоритмів пофарбування графів, але поява нових алгоритмів переконливо доводить дослідникам, що проблема не є вичерпаною, а навпаки дає широке поле для удосконалення існуючих технік та розроблення нових. У першу чергу така увага до пофарбування теоретико-графових моделей пов′язана з унікальністю прикладних задач, де побудовано модель. Кожна проблема має свою специфіку, що виражається у різноманітних обмеженнях, які повинні бути враховані при побудові моделей у вигляді графу. По-друге, побудований граф має свою топологію, яка впливає на хід розв′язку.

Вибір того чи іншого алгоритму обумовлений завжди складністю графа. Для такого пофарбування графа було запропоновано багато комбінаторних оптимізаційних методів. Широкого розповсюдження набула техніка пофарбування у працях Р. Карагана та П. М. Пардалоса [1]. Відомі такі алгоритми 0-1 програмування із використанням розтинів графів, описані в працях [2, 3]. Однак, ефективність наведених методів знаходиться в межах пофарбування графів із 600-700 вершинами, оскільки вони мають експоненційну складність. Отже, слушним є розроблення поліноміальних алгоритмів замість експоненціальних.

У деяких випадках неможливо застосовувати алгоритм точного пофарбування, оскільки час розв′язання є експоненціальною функцією від кількості вершин. У цьому випадку застосовують алгоритми наближеного пофарбування, які дозволяють отримати субоптимальний розв′язок або набір субоптимальних розв′язків.

Останнім часом розроблені евристичні субоптимальні алгоритми, що дозволяють пофарбувати графи з великою кількістю вершин. Перевагою таких алгоритмів є можливість генерування розв′язку при будь-яких накладених обмеженнях. Але їх недоліком є досить великий час пошуку. Крім цього якість розв′язку залежить від обраного критерію оптимальності.

Розвиток математичного апарату зумовив появу нових методів, які дозволяють розв′язувати погано формалізовані задачі [4]. Наприклад, можливі випадки, коли при розподілі ресурсів неможливо чітко віднести той чи інший ресурс до якоїсь конкретної категорії. Або у мережах стільникового зв′язку при розподілі частотних смуг можлива ситуація, коли гармоніки одних смуг впливають на інші, тобто між ними немає чіткого розмежування, а, отже, такі смуги, що перекриваються, також неможливо чітко класифікувати. У цьому випадку для забезпечення якісного зв′язку потрібно досить швидко реагувати на включення в мережу нового абонента, забезпечуючи високу якість зв′язку.

Зрозуміло, що час знаходження розв′язку є ключовою проблемою у таких системах.

Очевидно, що множина або сукупність об′єктів — це основне поняття в математиці. Велика кількість зв′язків між об′єктами включають такі побудови, які не можна назвати множинами у класичному розумінні. Їх швидше за все слід вважати нечіткими множинами, тобто класами із нечіткими межами, коли перехід від приналежності до класу відбувається поступово. У зв′язку із цим потрібні нові методи та алгоритми, орієнтовані на такий вид задач [4-8].

У даній праці розроблено алгоритм швидкого пофарбування графів, заснований на алгебраїчних операціях із нечіткими відношеннями. Звичайний граф розглядається як нечітке відношення — нечіткий граф.

Поняття нечіткого графа

Поняття графа і відношення відіграють основну роль у математиці. Їх можна узагальнити на випадок нечітких множин. При цьому розкриваються нові властивості. Розглянемо дві множини E_1 і E_2. Нехай x — елемент E_1, y — елемент E_2. Множина впорядкованих пар (x, y) визначає прямий добуток $E_1 \times E_2$.

Нечітка множина $\tilde{G}$ така, що $\forall(x, y) \in E_1 \times E_2 : \mu_{\tilde{G}}(x, y) \in M$, де M — множина належності елементів $E_1 \times E_2$, називається нечітким графом [4]. Елемент множини M називається значенням упорядкованої пари (x, y). Нечітку множину $\tilde{G} \subset E_1 \times E_2$ можна представити у вигляді матриці

$$\begin{bmatrix} \mu_{\tilde{G}}(x_1, y_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_1, y_2) & \ldots & \mu_{\tilde{G}}(x_1, y_i) \\ \mu_{\tilde{G}}(x_2, y_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_2, y_2) & \ldots & \mu_{\tilde{G}}(x_2, y_i) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{\tilde{G}}(x_i, y_1) & \mu_{\tilde{G}}(x_i, y_2) & \ldots & \mu_{\tilde{G}}(x_i, y_i) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Означення 1. Графом Бержа називається такий граф, де $E_1 = E_2 = E$.

Цей граф представляє собою множину впорядкованих пар $\tilde{G} \subset E \times E$, таку що:

$$\tilde{G} \cap \overline{G} = \varnothing; \tag{2}$$

$$G \cup \overline{G} = E \times E. \tag{3}$$

Подібно до того як це робиться в теорії множин, поняття нечіткого графа можна пояснити у термінах носія нечіткого відношення

$$S(\tilde{\mathfrak{R}}) = \{(x_i ; x_j) \mid \mu(x_i, x_j) > 0\}.$$

Для того, щоб задати нечіткий граф, потрібно задати нечітке відношення $\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) \in [0,1]$.

Приклад 1. Нехай $E_1 = E_2 = \tilde{\mathfrak{R}}$ і задане нечітке відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$.

Таблиця 1. Нечітке відношення $\tilde{R}$

$\tilde{R}$	x_1	x_2	x_3
x_1	0,5	0,1	0,3
x_2	0,7	0,6	0,4
x_3	0,8	0,9	0,5

Тоді, приймаючи до уваги нечітке відношення, отримуємо нечіткий граф, який є графом у сенсі Бержа [9]. Графічно його зображено на рис. 1.

Рисунок 1 можна інтерпретувати як ступіні спорідненості вершин. Наприклад, вершина x_1 є «більш» суміжною з вершиною x_3, ніж x_3 із x_1, а вершина x_1 є «майже» не суміжною із вершиною x_2, і навпаки. Зрозуміло, що вершини x_1, x_2, x_3 можуть бути пофарбовані в один колір із певним ступенем сумніву. Отже, задача пофарбування нечітких графів є специфічною. Одна і та ж вершина може бути пофарбована у різні кольори. Це означає, що її колір є функцією належності до множини кольорів.

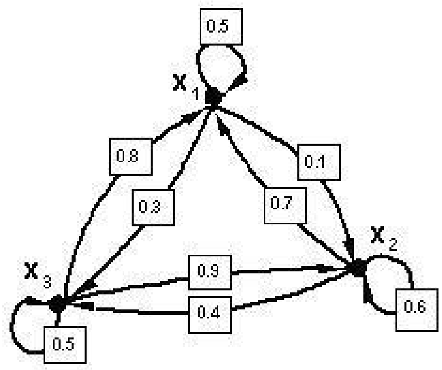

Рис. 1. Нечіткий граф

У класичній теорії графів пофарбуванням графу $G(V,E)$, утвореного набором вершин V та ребер E, називають таку матрицю кольорів $C:V\to\Re(C)$, для якої дві суміжні вершини $C(v_i)\neq C(v_j)$ для $i\neq j$ пофарбовані у різні кольори, а також $\exists i,j/C(v_i)\cap C(v_j)\neq\varnothing$, $V=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots\upsilon_n\}$. Тут функцію $\Re(C)$ можна розглядати як відношення, що чітко враховує накладені обмеження на пофарбування вершин. У теорії нечітких множин ця чіткість порушується, тому втрачається сенс у застосуванні звичайних алгоритмів для знаходження $\Re(C)$.

Очевидно, що нечіткий граф, зображений на рис. 1, є узагальнюючим графом і показує усі можливі зв′язки між вершинами, але сам по собі він існувати не може, породжуючись у межах чіткого графа. Тому функція $\Re(C)$ є граничним носієм нечіткого відношення, до якого прямує пофарбування графа, тобто є вмістилищем для нечіткого відношення $S(\tilde{\Re})\supset\Re(C)\in[0,1]$.

Із цього випливає, що кожен чіткий граф G може мати нескінченну кількість нечітких графів $\tilde{G}$, утворених на його основі. Відповідно до цього, задача пофарбування нечіткого графа формулюється іншим чином.

Означення 2. Пофарбуванням нечіткого графа $\tilde{G}$ називається таке нечітке відношення, що $\forall(x,c)\in E\times C:\mu_{\tilde{C}}(x,c)\in[0,1]$. Тут $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ — вершини графа $\tilde{G}$, а $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ — набір кольорів.

Для того, щоб сформулювати задачу знаходження нечіткого відношення $\mu_{\tilde{C}}(x,c)$ спробуємо знайти перехід від чіткого графа G до нечіткого $\tilde{G}$.

Нехай $\Re$ — бінарне відношення на множині E, тоді $x_i\Re x_j;(i,j)=1...|E|$ є матрицею суміжності.

Таблиця 2. Бінарне відношення $\Re$

$\Re$	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0	1
x_2	0	1	1
x_3	1	1	1

За даною матрицею суміжності маємо чіткий граф G (рис. 2).

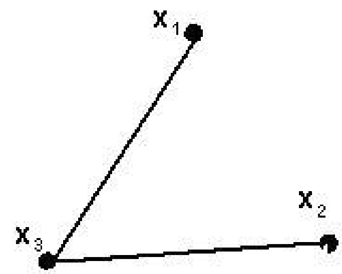

Рис. 2. Чіткий граф G та його матриця суміжності

Зв′язок із нечітким графом $\tilde{G}$, зображеним на рис. 1, та чітким, зображеним на рис. 2, можна виразити через нечітке відношення $x_i\tilde{\mathfrak{R}}x_j$ на матрицю суміжності $x_i\mathfrak{R}x_j \supset x_i\tilde{\mathfrak{R}}x_j = \{(x_i, x_j) | \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j)\}$ наступним чином:

$$x_i\mathfrak{R}x_j = \begin{cases} 1, \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) \geq \delta; \\ 0, \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) < \delta. \end{cases} \tag{4}$$

Це означає, що граф G допускає існування нечіткого графа, зображеного на рис. 1. Тут δ — відносна відстань Хемінга [4], яка визначається наступним чином:

$$\delta = \frac{1}{|E|^2} \sum_{i=1}^{|E|} \sum_{j=1}^{|E|} \left| \mu_{\tilde{\mathfrak{R}}}(x_i, x_j) - 1 \right|. \tag{5}$$

І навпаки, завдяки значенню δ можна переходити від матриці суміжності до нечіткого відношення

$$x_i\tilde{\mathfrak{R}}x_j = \begin{cases} (0 ... \delta), x_i\mathfrak{R}x_j = 0; \\ (\delta ... 1), x_i\mathfrak{R}x_j = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Операція (6) називається операцією розмиття графу.

Приклад 2. Знайдемо перехід від чіткого графа до нечіткого для G, зображеного на рис. 2, за його матрицею суміжності. Нехай δ=0,65, тоді $x_i\tilde{\mathfrak{R}}x_j$ буде дорівнювати:

Таблиця 3. Матриця суміжності

$x_i\tilde{\mathfrak{R}}x_j$	x_1	x_2	x_3
x_1	0,7	0,3	0,8
x_2	0,1	0,65	0,9
x_3	1	0,8	1

Нечіткий граф, утворений із графа G, можна зобразити наступним чином (рис. 3):

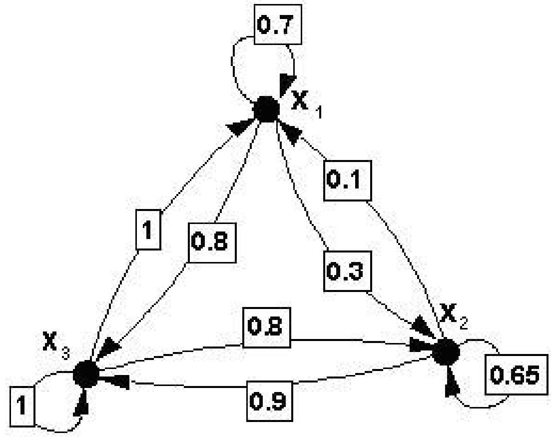

Рис. 3. Нечіткий граф, утворений із графа G

Перейдемо від нечіткого графа до чіткого.

$$\delta = \frac{1}{9}\left(|0{,}7-1|+|0{,}3-1|+|0{,}8-1|+|0{,}1-1|+|0{,}65-1|+|0{,}9-1|+|1-1|+|0{,}8-1|+|1-1|\right)=0{,}31\,.$$

В отриманому відношенні відносна відстань Хемінга дорівнює 0,31, що показує на «близьке» розташування нечіткої множини від меж $[0,1]$. Здійснюючи перехід від нечіткого до чіткого графа за правилом (4), отримаємо матрицю суміжності:

$$x_i \Re x_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, при застосуванні операцій розмиття графа (6) та знаходженні чіткого графа (4) ми приходимо до одного і того ж результату.

Формулювання задачі пофарбування нечіткого графа

У класичній теорії графів проблема пофарбування полягає у розподілі між вершинами графу кольорів таким чином, щоб жодні дві суміжні вершини не були пофарбовані в один колір [10, 11].

Мовою 0-1 програмування задача пофарбування записується так:

$$x_{i,n} + x_{j,n} \le 1; \quad (i,j) = 1...|E|; \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{K} x_{i,n} = 1 \quad n = 1...K\,. \tag{8}$$

Рівняння (7) показує обмеження на пофарбування двох суміжних вершин (i,j) в однаковий колір, а рівняння (8) показує додаткове обмеження на пофарбування однієї і тієї самої вершини у різні кольори із набору K .

Відповідно до цього, проблему пофарбування вирішують шляхом відшукання такої функції $\Re(C)$ у просторі невідомих параметрів, для яких є справедливими умови (7) та (8).

Оскільки у теорії нечітких множин допускається приналежність одного і того ж елемента до декількох категорій, то умова (8) втрачає свій зміст.

У теорії нечітких множин ключовою характеристикою елемента є його функція належності $\mu(x)$, значення якої знаходиться у межах інтервалу $[0,1]$. Тому, у будь-якому випадку запис $\sum_{n=1}^{K}\mu(x_{1,n}) = 1$ не справджується.

Зіставляючи та порівнюючи різні можливі випадки, очевидним стає факт $\mu(x_{i,n}) + \mu(x_{j,n}) > 1$ для двох суміжних вершин $(i,\ j)$. Тобто, для нечіткого графу розв′язок задачі пофарбування, сформульованої у вигляді рівнянь (7) та (8), є некоректним.

Позначимо $\mu_{\tilde{C}}(x,c)$ — значення функції належності у нечіткому відношенні $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$. Тоді задача пофарбування нечіткого графа сформулюється наступним чином.

Для нечіткого графу $\tilde{G}$ потрібно відшукати таке нечітке відношення $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$, для якого виконуються умови:

$$\sqrt{\mu_{\tilde{C}}(x_i, c_n) + \mu_{\tilde{C}}(x_j, c_n)} \le \sqrt{1 + \varepsilon\left(\tilde{\mathfrak{R}}(C), \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}(C)\right)}, \quad n = 1 \ldots K; \tag{9}$$

$$\mu_{\tilde{G}}(x_i, x_j) > \delta, \quad (i,j) = 1 \ldots |E|. \tag{10}$$

Тут $\varepsilon\left(\tilde{\mathfrak{R}}(C), \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}(C)\right)$ — це відносна евклідова відстань між нечіткою множиною $\tilde{\mathfrak{R}}(C)$ та найближчої до неї $\overline{\tilde{\mathfrak{R}}}(C)$.

Легко переконатися, що умова (9) для нечіткого відношення перетворюється у (7) при переході до чіткої функції $\mathfrak{R}(C)$. Справді, при обчисленні евклідової відстані вона набуває наступного значення $\varepsilon\left(\mathfrak{R}(C), \overline{\mathfrak{R}}(C)\right) = 0$, оскільки найближча множина $\mathfrak{R}(C) = \overline{\mathfrak{R}}(C)$.

Формулювання алгоритму пофарбування

Розглянемо деякі операції над нечіткими відношеннями. Нехай нечіткий граф $\tilde{G}$ задано за допомогою нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$.

Назвемо «слабким ребром» нечіткого графа $\tilde{G}$ значення функції належності $\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) < 0{,}5$ нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$. «Сильним ребром» нечіткого графа $\tilde{G}$ назвемо таке значення нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$, що задовольняє умову $\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) \ge 0{,}5$.

Редукцією нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$ по «слабкому ребру» є операція відшукання індукованого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j \underset{\Gamma}{\sim\!\!\rightarrow} x_i \tilde{\mathfrak{R}}' x_j$, де $\Gamma\{x_k\} = \{x_r\}$. Індексу $(k,\ r)$ відповідають екстремуми $h(\tilde{R})$ нечіткого відношення $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$.

$$\mu_{\tilde{R}}(x_k, x_r) = h(\tilde{R}); \tag{11}$$

$$h(\tilde{R}) = \underset{x_i}{\Lambda}\underset{x_j}{\Lambda}\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j). \tag{12}$$

Таким чином, $\mu_{\tilde{R}'}(x_i, x_j)$ індуковане відношенням $\tilde{R}'$ дорівнює:

$$\mu_{\tilde{R}'}(x_i, x_j) = \begin{cases} max[\mu_{\tilde{R}}(x_k, x_k), \mu_{\tilde{R}}(x_r, x_r)], \text{ якщо } i = r \text{ та } j = r; \\ max[\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_r), \mu_{\tilde{R}}(x_i, x_k)], \text{ якщо } j = r; \\ max[\mu_{\tilde{R}}(x_r, x_j), \mu_{\tilde{R}}(x_k, x_j)], \text{ якщо } i = r. \end{cases} \quad (13)$$

Найменшим редукованим відношенням $\tilde{J}$ будуть вважати таке відношення, для якого

$$\underset{x_i}{\Lambda}\underset{x_j}{\Lambda}\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) > 0{,}5\,. \quad (14)$$

Отже, розв′язок задачі пофарбування нечіткого графа $\tilde{G}$ (9) та (10) зводиться до відшукання такого відображення $\Gamma\{x_k\} = \{C\}$, при якому $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j \underset{\Gamma}{\sim\!\!\rightarrow} x_i \tilde{J} x_j$.

Алгоритм пофарбування графа G зводиться до наступних кроків.

Крок 1. За допомогою операції (6) виконати розмиття графу, встановивши попереднє значення δ.

Крок 2. В отриманому нечіткому відношенні $x_i \tilde{\mathfrak{R}} x_j$ знайти таке «слабке ребро» $\mu_{\tilde{R}}(x_k, x_r)$, щоб $\mu_{\tilde{R}}(x_k, x_r) = h(\tilde{R})$.

Крок 3. Знайти індуковане відношення $\tilde{R}'$ за допомогою операції редукції нечіткого графа (13).

Крок 4. Сформувати підмножину $L^{(n+1)}\{x\} = \left\{\dfrac{x_k}{\overline{\mu}_{\tilde{\mathfrak{R}}'}(x_k, x_r)}, \dfrac{x_r}{\overline{\mu}_{\tilde{\mathfrak{R}}'}(x_r, x_k)}\right\} \cup L^{(n)}\{x\}$,

де $L^{(n)}\{x\}$ підмножина відібраних вершин, утворена попередніми ітераціями $L^{(n)}\{x\} = \varnothing$, якщо лічильник ітерацій алгоритму дорівнює одиниці.

Крок 5. Повторювати виконання кроків 2-4 до тих пір, поки не знайдемо таке редуковане відношення, для якого виконується умова (14).

Крок 6. Знайти усі можливі підмножини $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n$ на множині $L\{x\}$, виконуючи попарно операцію порівняння, при цьому $(n, i) = 1...|L|$:

$$if\ L^{(n)}\{x\} \cap L^{(n+1)}\{x\} \neq \varnothing\ \ then\ \tilde{C}_n = L^{(n)}\left\{\frac{x}{\mu_{\tilde{C}}(x,c)}\right\} \cup L^{(n+i)}\left\{\frac{x}{\mu_{\tilde{C}}(x,c)}\right\}. \quad (15)$$

Крок 7. Утворити нечітке відношення $\tilde{R}(C)$, що є пофарбуванням нечіткого графу.

Таблиця4. Нечітке відношення $\tilde{R}(C)$

	x_1	x_2	...	x_n
c_1	$\mu_{\tilde{C}}(x_1, c_1)$	$\mu_{\tilde{C}}(x_2, c_1)$	...	$\mu_{\tilde{C}}(x_n, c_1)$
c_2	$\mu_{\tilde{C}}(x_1, c_2)$	$\mu_{\tilde{C}}(x_2, c_2)$	...	$\mu_{\tilde{C}}(x_n, c_2)$
...	...	...	...	...
c_n	$\mu_{\tilde{C}}(x_1, c_m)$	$\mu_{\tilde{C}}(x_2, c_m)$	...	$\mu_{\tilde{C}}(x_n, c_m)$

(16)

Крок 8. Застосовуючи операцію (4), знайти чітку функцію $R(C)$, яка є матрицею пофарбування графа G.

Симулювання алгоритму

Розглянемо застосування алгоритму на наступному прикладі. Задамо граф G (рис. 4), для якого необхідно знайти пофарбування.

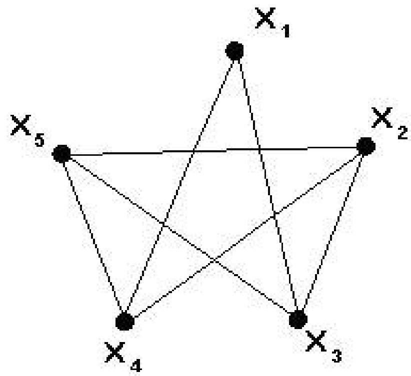

Рис. 4. Граф для симулювання алгоритму

Матриця суміжності даного графа:

Таблиця 5. Матриця суміжності графа

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	1	1	0
x_2	0	1	1	1	1
x_3	1	1	1	0	1
x_4	1	1	0	1	1
x_5	0	1	1	1	1

Нехай значення $\delta = 0,57$. Виконаємо розмиття графу, щоб утворити нечіткий граф $\tilde{G} \supset G$.

Таблиця 6. Матриця суміжності нечіткого графу

$\tilde{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,8	0,3	0,9	0,7	0,1
x_2	0,2	0,6	0,7	0,9	1
x_3	0,6	0,8	0,9	0,4	0,8
x_4	0,9	0,8	0,2	0,7	0,8
x_5	0,3	0,6	0,8	0,9	0,7

Графічне зображення нечіткого графу (рис. 5):

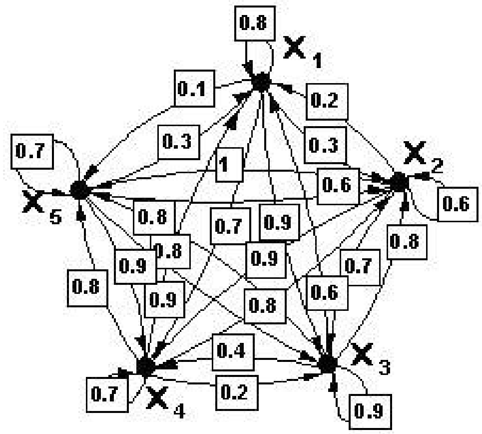

Рис. 5. Нечіткий граф $\tilde{G}$

Для даного нечіткого відношення $x_i \tilde{R} x_j$ обчислюємо $h(\tilde{R}) = 0,1$, що відповідає «слабкому ребру» між вершинами x_1, x_5. Виконуючи редукцію нечіткого графа, отримаємо наступне нечітке відношення $\tilde{R}'$, де $k = 1; r = 5$, а редукований нечіткий граф має наступний вигляд (рис. 6).

Таблиця 7. Нечітке відношення $\tilde{R}'$

$\tilde{R}'$	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	0,6	0,7	0,9	1
x_3	0,8	0,9	0,4	0,8
x_4	0,8	0,2	0,7	0,9
x_5	0,6	0,8	0,9	0,8

$L^{(1)}\{x\} = \left\{ \frac{x_1}{0,9}, \frac{x_5}{0,7} \right\}$.

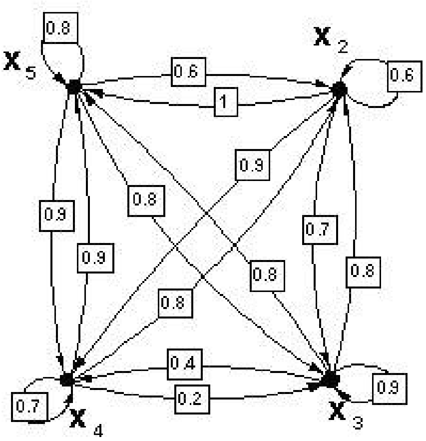

Рис. 6. Редукований граф

Далі шукаємо найменший редукований граф.
$h\left(\tilde{R}'\right)=0{,}2;\ k=3;\ r=2$.

Таблиця 8. Нечітке відношення $\tilde{R}''$

$\tilde{R}''$	x_2	x_4	x_5
x_2	0,6	0,9	1
x_4	0,8	0,9	0,9
x_5	0,6	0,9	0,8

$L^{(2)}\{x\}=\left\{\frac{x_3}{0{,}8},\frac{x_4}{0{,}6}\right\}$.

Оскільки $h\left(\tilde{R}''\right)=0{,}6$, що задовольняє умову (14), то відношення $\tilde{R}''=\tilde{J}$ є найменшим редукованим відношенням. Інші підмножини:

$$L^{(3)}\{x\}=\left\{\frac{x_2}{0{,}6}\right\};\ L^{(4)}\{x\}=\left\{\frac{x_4}{0{,}9}\right\};\ L^{(5)}\{x\}=\left\{\frac{x_5}{0{,}8}\right\}.$$

$$L\{x\}=\begin{bmatrix}L^{(1)}\{x\}\\L^{(2)}\{x\}\\L^{(3)}\{x\}\\L^{(4)}\{x\}\\L^{(5)}\{x\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{x_1/0{,}9;\ x_5/0{,}7\}\\\{x_3/0{,}8;\ x_4/0{,}6\}\\\{x_2/0{,}6\}\\\{x_4/0{,}9\}\\\{x_5/0{,}8\}\end{bmatrix}.$$

Переходимо до кроку 6. Знаходимо усі можливі підмножини $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,...,\tilde{C}_n$ на множині пар $L\{x\}$.

$$L^{(1)}\{x\}\cap L^{(2)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(1)}\{x\}\cap L^{(3)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(1)}\{x\}\cap L^{(4)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(1)}\{x\}\cap L^{(5)}\{x\}=\{x_5/0{,}7\};$$

$\tilde{C}_1=L^{(1)}\{x\}\cup L^{(5)}\{x\}=\{x_1/0{,}9,\ x_5/0{,}8\}$.

$$L^{(2)}\{x\}\cap L^{(1)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(2)}\{x\}\cap L^{(3)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(2)}\{x\}\cap L^{(4)}\{x\}=\{x_4/0{,}6\};$$

$\tilde{C}_2=L^{(2)}\{x\}\cup L^{(4)}\{x\}=\{x_3/0{,}8,\ x_4/0{,}9\}$.

$$L^{(2)}\{x\}\cap L^{(5)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(3)}\{x\}\cap L^{(1)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(3)}\{x\}\cap L^{(2)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(3)}\{x\}\cap L^{(4)}\{x\}=\varnothing;$$
$$L^{(3)}\{x\}\cap L^{(5)}\{x\}=\varnothing.$$

Оскільки усі можливі переходи знайдені, то $\tilde{C}_3 = L^{(3)}\{x\} = \{x_2 / 0,6\}$.

Отже, маємо остаточне нечітке відношення $\tilde{R}(C)$:

Таблиця 9. Нечітке відношення $\tilde{R}(C)$

$\tilde{R}(C)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\tilde{C}_1$	0,9	0	0	0	0,8
$\tilde{C}_2$	0	0	0,8	0,9	0
$\tilde{C}_3$	0	0,6	0	0	0

Перевіримо, чи задовольняє отримане відношення умові (9). Для цього обчислимо $\varepsilon\left(\tilde{\mathfrak{R}}(C), \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}(C)\right)$.

$$\varepsilon\left(\tilde{\mathfrak{R}}(C), \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}(C)\right) = \sqrt{|0,9-1|^2 + |0,8-1|^2 + |0,8-1|^2 + |0,9-1|^2 + |0,6-1|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = 0,13.$$

Наприклад, для вершини (x_2, x_3) $\mu_{\tilde{G}}(x_2, x_3) = 0,7$, що є більшим, ніж δ. Тоді

$$\sqrt{\mu_{\tilde{C}}(x_2, C_2) + \mu_{\tilde{C}}(x_3, C_2)} = \sqrt{0 + 0,8} = 0,89;$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon\left(\tilde{\mathfrak{R}}(C), \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}(C)\right)} = \sqrt{1 + 0,13} = 1,06.$$

Оскільки права частина менша, ніж ліва, то умова (9) справедлива. Аналогічно для інших вершин. Перейдемо від нечіткого пофарбування до чіткого:

Таблиця 10. Матриця пофарбування графа

$R(C)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
C_1	1	0	0	0	1
C_2	0	0	1	1	0
C_3	0	1	0	0	0

Отже, граф G, зображений на рис. 7, можна пофарбувати у три кольори наступним чином:

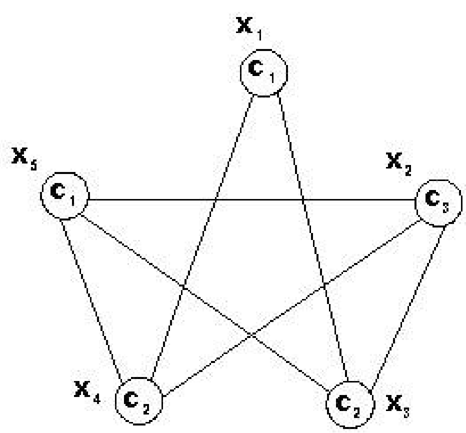

Рис. 7. Пофарбований граф G

Таким чином, за допомогою наведеного алгоритму отримуємо пофарбування графа.

Висновок

Отже, у результаті розгляду проблеми розподілення ресурсів з нечіткими обмеженнями сформульована і вирішена задача пофарбування нечітких графів. На основі висунутих умов та обмежень розроблено та реалізовано новий алгоритм швидкого пофарбування нечітких графів. Розглянуто зв′язок нечітких графів зі звичайними планарними графами та створено спеціальні математичні операції для їх взаємного перетворення. Показано, що задача пофарбування нечітких графів є загальним випадком класичної задачі, сформульованої на мові 0-1 програмування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carrahan R., Pardalos P. M. An exact algorithm for the maximum clique problem // Operations Research Letters. – 1990. - № 9. – P. 375 – 382.
2. de Klerk E., Pasechnik D. V. On approximate graph colouring and MAX-k-cut algorithms based on the ϑ-function // Journal of Combinatorial Optimization. – 2004. - № 8(2004).
3. Kochenberger G.A., Glover F., Alidaee B., Rego C. An Uncostrained quadratic binary programming approach to the vertex coloring problem // Annals of Operations Research. – 2005. - № 139.
4. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с французского / Под ред. С.И. Травкина. – М: Радио и связь, 1982. – 431 с.
5. Rosenfield A. Fuzzy graphs. – In : Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes. Academic Press, 1975. – P. 77 – 95.
6. Santos E.S. Fuzzy Algorithms // Inform. and Control. Vol. 17, 1970. – P. 326 – 339.
7. Santos E.S. On Reduction of Maximum Machines // Jour. Math. Anal. and Appl, Vol. 37 №3, 1972.
8. Lee E.T., Chang C.L. Some properties of fuzzy logic // Inform. and Control, Vol. 19 №5, 1971. – P. 417 – 431.
9. Берж К. Теория графов и её применения. – М: ИЛ, 1962. – 319 с.
10. Дистель Р. Теория графов. – Новосибирск: ИИМ, 2002. – 335 с.
11. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М: Мир, 1978. – 427 с.