Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.21
№ 809, 2008, с.162-169

Линейные преобразования кривых и последовательностей в гильбертовом пространстве

А. Ю. Петрова, А. А. Янцевич
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина
Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Украина

Linear transformations of curves or sequences in Hilbert space are viewed in the article. Requirements and sufficient conditions for the linear transformation of a curve or sequence to belong to a certain class of nonstationary curves or sequences were obtained in terms of correlation functions.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Линейные преобразования случайных процессов чаще всего сводятся к двум типам: первый – основанные на спектральном разложении спектра функций (в основном для стационарных случайных функций); второй – в пространстве состояний, которые реализуются при помощи дифференциальных или разностных операторов.

Еще один оригинальный подход может быть реализован после вложения случайных функций в соответствующее гильбертово пространство и последующим рассмотрением линейного преобразования (дилатации) соответствующей кривой или последовательности в гильбертовом пространстве. Такого типа подход впервые рассмотрен в работах Ниеми [1, 2], однако структура таких преобразований в терминах корреляционных функций в этих работах не изучалась.

2. Истоки исследования авторов

Впервые необходимые и достаточные условия для корреляционных функций были получены в работах Р. Пишеля и А. А. Янцевича [3] для дилатации случайных процессов, в работе Н. В Черемской [4] – для ганкелевых последовательностей.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

В работе продолжено изучение линейных преобразований новых классов кривых и последовательностей, не рассмотренных в [3, 4].

Целью настоящего исследования является получение необходимых и достаточных условий на корреляционную функцию $y(t)$, чтобы $y(t)$ была линейным преобразованием кривой $x(t)$ вида $y(t) = Bx(t)$ со сжатием B, у которого дефектное подпространство конечномерное.

Аналогичная постановка цели исследования возникает и для последовательностей.

3. Дилатации кривых в гильбертовых пространствах

Рассмотрим кривую $x(t)$ в гильбертовом пространстве $H=\overline{\bigvee_k x(t_k)}$ (такие кривые возникают, в частности, при погружении случайных процессов с непрерывными корреляционными функциями в гильбертово пространство) вида

$$x(t)=e^{tT}x_0, \tag{1}$$

где T – унитарный оператор, $t\ge 0$.

Для (1) легко получить спектральное разложение, используя спектральное представление унитарного оператора $T=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}dE_\lambda$, где E_λ – разложение единицы:

$$x(t)=\int_0^{2\pi} e^{t(\cos\lambda+i\sin\lambda)}d\eta(\lambda), \tag{2}$$

где $\Delta\eta(\lambda)=\Delta E_\lambda x_0$, т. е. $\eta(\lambda)$ – процесс с ортогональными приращениями.

Для корреляционной функции кривой $x(t)$ $K_{xx}(t,s)=\langle x(t),x(s)\rangle_H$ из (2) легко получаем представление (аналог теоремы Бохнера-Хинчина) [5]:

$$K_{xx}(t,s)=\int_0^{2\pi} e^{(t+s)\cos\lambda+i(t-s)\sin\lambda}dF(\lambda), \tag{3}$$

где $\Delta F(\lambda)=\left\|\Delta E_\lambda x_0, x_0\right\|^2$.

Легко убедиться, что корреляционная функция (3) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t\partial s}-K(t,s)=0 \tag{4}$$

Таким образом, кривыми вида $e^{tT}x_0$, где T – унитарный оператор, можно моделировать случайный процесс с корреляционной функцией, зависящей от суммы и разности аргументов и удовлетворяющий уравнению телеграфного типа (4).

Пусть B – линейное ограниченное сжатие с одномерным дефектным подпространством $\overline{(I-B^*B)H}$, т. е.

$$I-B^*B=\langle\,\cdot\,,h_0\rangle h_0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь кривую $y(t)$ в H вида

$$y(t)=Bx(t). \tag{6}$$

Как и в [1–4] такие линейные преобразования будут называться дилатациями соответствующего порядка (порядком дилатации называется размерность подпространства $\overline{(I-B^*B)H}$).

Рассмотрим корреляционную функцию $y(t)$:

$$\begin{aligned}K_{yy}(t,s)&=\langle y(t),y(s)\rangle_H=\langle Bx(t),Bx(s)\rangle_H=\\&=\langle (B^*B-I)x(t),x(s)\rangle_H+\langle x(t),x(s)\rangle_H\end{aligned}. \tag{7}$$

Для $K_{yy}(t,s)$ из (6) следует представление

$$K_{yy}(t,s)=\int_0^{2\pi} e^{(t+s)\cos\lambda+i(t-s)\sin\lambda}dF(\lambda)-\Phi(t)\overline{\Phi(s)}\,, \tag{8}$$

где

$$\Phi(t)=\left\langle x(t),h_0\right\rangle_H\,, \tag{9}$$

т. е. $\Phi(t)$ является линейным функционалом от $x(t)$, $\Delta F(\lambda)=\left\|\Delta E_\lambda x_0\right\|^2$.

Теорема 1. Для того, чтобы $y(t)$ была дилатацией первого порядка кривой $x(t)=e^{tT}x_0$ (T – унитарный оператор), необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция $y(t)$ имела представление (8), (9).

Доказательство. Необходимость доказана выше, а для доказательства достаточности следует по $F(\lambda)$ восстановить разложение единицы унитарного оператора T (теорема Наймарка) [6].

Тем самым реконструируется первое слагаемое в представлении (8), т. е. восстанавливается кривая $e^{tT}x_0$, (в качестве элемента x_0 можно взять любой элемент вида $x_0=ke$, где e – единичный вектор, а $k=\sqrt{K_{xx}(0,0)}$).

Далее, так как $\Phi(t)$ – линейный функционал от $x(t)$, то по теореме Рисса он имеет вид $\Phi(t)=\left\langle x(t),h_0\right\rangle_H$, где $h_0\in H$. Для восстановления элемента h_0 учтем, что $H=\overline{\bigvee_k x(t_k)}$, т. е. любой элемент h_0 имеет вид $h_0=\int_0^{2\pi}\chi(\lambda)dE_\lambda x_0$, где $\chi(\lambda)=\sum_{m=1}^{n}a_m e^{t_m(\cos\lambda+i\sin\lambda)}$ или пределы в среднеквадратичном таких комбинаций. Тогда для $\Phi(t)$ получаем представление

$$\Phi(t)=\int_0^{2\pi} e^{t(\cos\lambda+i\sin\lambda)}\left\langle dF(\lambda),h_0\right\rangle. \tag{10}$$

Предположим для простоты, что существует спектральная плотность, т. е. $F'(\lambda)=f(\lambda)$.

Тогда из (10) имеем

$$\Phi(t)=\int_0^{2\pi} e^{t(\cos\lambda+i\sin\lambda)}f(\lambda)\overline{\chi(\lambda)}d\lambda. \tag{11}$$

Продифференцируем (11) n раз по t и положим $t=0$, получим

$$a_n=\Phi^{(n)}(0)=\int_0^{2\pi} e^{in\lambda}f(\lambda)\overline{\chi(\lambda)}d\lambda. \tag{12}$$

Затем проинтегрируем (11) по t (полагая произвольные постоянные, возникающие при неопределенном интегрировании, равными нулю). Тогда получим еще последовательность a_{-n} вида

$$a_{-n}=\int_0^{2\pi} e^{-in\lambda}f(\lambda)\overline{\chi(\lambda)}d\lambda,\ n>0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) видно, что a_n и a_{-n} являются коэффициентами в разложении $f(\lambda)\overline{\chi(\lambda)}$ в ряд Фурье на интервале $[0, 2\pi]$:

$$\chi(\lambda) = \overline{\frac{1}{f(\lambda)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\lambda} a_n} = \frac{1}{f(\lambda)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda}\overline{a_n}\,. \tag{14}$$

Таким образом, по известным $f(\lambda)$ и $\Phi(t)$ восстанавливаем элемент h_0.

Теперь для окончания доказательства теоремы достаточно в качестве оператора B взять любой оператор с $I - B^*B = \langle\,\cdot\,, h_0\rangle h_0$.

Например, пусть $B = I - \langle\,\cdot\,, h_1\rangle h_1 = B^*$ и $\|h_1\| < \sqrt{2}$. Тогда $I - B^*B = \langle\,\cdot\,, h_1\rangle h_1(2 - \|h_1\|^2)$ и в качестве h_1 можно взять $h_1 = \dfrac{h_0}{\sqrt{2 - \|h_1\|^2}}$.

Индексом неунитарности будем называть максимальный ранг квадратичных форм $\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\langle N(t,s)z_\alpha, z_\beta\rangle$ $(r = 1, 2, \ldots)$, где z_α – произвольные комплексные числа.

Найдем теперь $N(t,s) = \dfrac{\partial^2 K_{yy}(t,s)}{\partial t\partial s} - K_{yy}(t,s)$.

$$N(t,s) = \frac{\partial^2 K_{xx}(t,s)}{\partial t\partial s} - K_{xx}(t,s) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s} - I\right)\Phi(t)\overline{\Phi(s)} =$$

$$= -\Phi'(t)\overline{\Phi'(s)} + \Phi(t)\overline{\Phi(s)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\varphi_\alpha(t) J_{\alpha\beta}\overline{\varphi_\beta(s)},$$

где $\varphi_1(t) = \Phi(t)$, $\varphi_2(t) = \Phi'(t)$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, при условии, что $\Phi(t)$ и $\Phi'(t)$ – линейно независимы и индекс неунитарности равен 2.

Случай, когда имеется линейная зависимость тривиален, так как из $\Phi'(t) = k\Phi(t)$ следует $\Phi(t) = \Phi_0 e^{kt}$ и индекс неунитарности равен 1.

Рассмотрим теперь случай, когда $I - B^*B = \sum_{\alpha=1}^{r}\langle\,\cdot\,, g_\alpha\rangle g_\alpha$. Тогда для корреляционной функции $y(t)$ легко получить представление

$$K_{yy}(t,s) = \int_0^{2\pi} e^{(t+s)\cos\lambda + i(t-s)\sin\lambda} dF(\lambda) + \sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(t)\overline{\Phi_\alpha(s)}\,, \tag{15}$$

где

$$\Phi_\alpha(t) = \langle x(t), g_\alpha\rangle\,, \tag{16}$$

т.е. снова $\Phi_\alpha(t)$ – линейные функционалы от $x(t)$.

Для $\Phi_\alpha(t)$ с учетом того, что $H = \overline{\bigvee_k x(t_k)}$ и $g_\alpha = \int_0^{2\pi} \chi_\alpha(\lambda) dE_\lambda x_0$, получаем

$\Phi_\alpha(t) = \int_0^{2\pi} e^{i(\cos\lambda + i\sin\lambda)} f(\lambda) \overline{\chi_\alpha(\lambda)} d\lambda$.

Отсюда, как и раньше, получаем, что $\chi_\alpha(\lambda) = \overline{\frac{1}{f(\lambda)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\lambda} a_n^{(\alpha)}}$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Для того, чтобы $y(t)$ была дилатацией r-го порядка кривой $x(t)$ необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция $y(t)$ имела вид (15), (16).

Отметим, что, вообще, если $y(t) = Bx(t)$, то для $N_{yy}(t, s)$ имеем:

$$N_{yy}(t, s) = N_{xx}(t, s) + \left\langle (I - B^* B)x(t), x(s) \right\rangle - \left\langle (I - B^* B)x'(t), x'(s) \right\rangle.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\dim \overline{(I - T^* T)H} = 1$.

Теорема 3. Для того, чтобы $y(t)$ была дилатацией первого порядка неунитарной кривой с индексом неунитарности равным 1 и с дискретным спектром $\{|\mu_k| < 1\}$ необходимо и достаточно, чтобы ее матрица $N_{yy}(t, s)$ имела вид: $N_{yy}(t, s) = N_{xx}(t, s) - \Phi'(t)\overline{\Phi'(s)}$,

где $N_{xx}(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(t) c_k$, $\Lambda_k(t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_\gamma e^{t\lambda} ((\tilde{T}^* - \lambda I)^{-1})_k d\lambda$, а $\Phi(t)$ – линейный функционал от $x(t)$ и $\|x_0\|^2 = K(0, 0)$.

Доказательство. Достаточность.

По $\{\lambda_k\}$ строим треугольную модель $\tilde{T}$ ($I - \tilde{T}^* \tilde{T} = \langle \cdot, e \rangle e$) и $|\lambda_k| < 1$. Рассмотрим кривую $e^{t\tilde{T}} x_0$ ($x_0 = \sqrt{K(0,0)} e$, $\|e\| = 1$):

$$\Phi(t) = \left\langle \exp(tT) x_0, e \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_0(k) M_k(t), \tag{17}$$

$$M_k(t) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_\gamma e^{t\lambda} \left((T^* - \lambda I)^{-1} e \right)_k d\lambda.$$

К нахождению элемента e: $\Phi(t) = \left\langle e^{tT} x_0, e \right\rangle$ так как $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное множество на $[0, \infty)$, то рассмотрим векторы из H вида $h_k = \exp(t_k T) x_0$. Очевидно, что $\overline{\bigvee_k h_k} = H$, $\Phi(t_k) = \left\langle e^{t_k T} x_0, e \right\rangle = \langle h_k, e \rangle$.

Проведем процесс ортогонализации Шмидта-Сонина [7, 8] $\{h_k\}$: $h_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} e_j$, где $\{e_j\}$ – ортонормированная последовательность. Разложим элемент e по ортонормированному базису $\{e_k\}$:

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle e, \sum_{j=1}^{k} a_{kj} h_j \right\rangle \sum_{l=1}^{k} a_{kl} h_l = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j,l=1}^{k} a_{kl} \overline{a_{kj}} \overline{\langle h_j, e \rangle} h_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j,l=1}^{k} a_{kl} \overline{a_{kj}} \overline{\langle \exp(t_j T) x_0, e \rangle} \exp(t_l T) x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j,l=1}^{k} a_{kl} \overline{a_{kj}} \overline{\Phi(t_j)} \exp(t_l T) x_0 .$$

Таким образом, e восстанавливается по функционалам $\Phi(t)$ и спектру оператора $\{\mu_k\}$.

Аналогично доказывается теорема в том случае, когда индекс неунитарности конечный и

$$N_{yy}(t,s) = \sum_{\alpha=1}^{r} \varphi_\alpha(t) \overline{\varphi_\alpha(s)} + \sum_{\beta=1}^{\rho} \Phi_\beta(t) \overline{\Phi_\beta(s)} - \sum_{\beta=1}^{\rho} \Phi'_\beta(t) \overline{\Phi'_\beta(s)},$$

где $\varphi_\alpha(t) = \langle e^{tT} x_0, e_\alpha \rangle$, $\Phi_\beta(t) = \langle e^{tT} x_0, g_\beta \rangle$, $\dim \overline{(I - B^* B) H} = \rho$, $\dim \overline{(I - T^* T) H} = r$, $2 \le \rho, r \le \infty$.

4. Дилатации последовательностей в гильбертовых пространствах.

Рассмотрим теперь нестационарную эволюционно представимую сжимающуюся последовательность первого ранга нестационарности [9] $x(n) = T^n x_0$, где T – сжатие ($\|T\| \le 1$) с дискретным спектром, лежащим внутри круга единичного радиуса.

Тогда, если рассмотреть дилатацию $y(n) = Bx(n)$ первого порядка, то для корреляционной функции $y(n)$ имеем представление

$$K_{yy}(n,m) = K_{xx}(n,m) - \Phi(n) \overline{\Phi(m)}, \tag{18}$$

где $\Phi(n) = \langle T^n x_0, e \rangle$ – линейный функционал от $x(n)$.Так как $\overline{\bigvee_n T^n x_0} = H$, то $h_n = T^n x_0$ являются счетным всюду плотным множеством в H.

Проведем процесс ортогонализации Шмидта-Сонина [7, 8] $h_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} e_j$, где $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$. Следовательно, $e = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j,l=1}^{k} a_{kl} \overline{a_{kj}} \overline{\Phi(j)} T^l x_0$.

Для сжатие T с дискретным спектром ($|\mu_k| < 1$) $K_{xx}(n,m)$ имеет вид [9]:

$$K_{xx}(n,m) = \sum_{i=0}^{\infty} W(n+\tau, m+\tau) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi(n+\tau) \overline{\varphi(m+\tau)}, \tag{19}$$

где $\varphi(n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Lambda_k(n)$, $\Lambda_k(n)=\sum_{j=1}^{k}c_{kj}\lambda_j^n$.

Теорема 4. Для того, чтобы $y(n)$ была дилатацией 1-го порядка нестационарной сжимающейся последовательности 1-го ранга нестационарности с дискретным спектром, необходимо и достаточно, чтобы $K_{yy}(n,m)$ имела вид (18), (19).

Доказательство. Достаточность. Из $\varphi(n)$ извлекаем спектр $\{\mu_k\}$ и строим треугольную модель $\tilde{T}\in[\ell_2,\ell_2]$. Отсюда следует, что для $\tilde{x}(n)=\tilde{T}^n\tilde{x}_0$ имеем $K_{\tilde{x}\tilde{x}}(n,m)=K_{xx}(n,m)$.

Так как $\varphi(n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Lambda_k(n)=\left\langle x_0,T^n e\right\rangle$, то в качестве x_0 можно взять $\tilde{x}_0=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}$ ($\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^2<\infty$). e находим по той же схеме, что и в теореме 3.

Если $x(n)$ – стационарная последовательность, то $x(n)=U^n x_0$, где U – унитарный оператор, $n\in \mathrm{Z}$. Рассмотрим $\Phi(n)=\left\langle U^n x_0,e\right\rangle$ в гильбертовом пространстве $H=\overline{\bigvee_{n=-\infty}^{\infty}U^n x_0}$. Тогда для любого $h\in H: h=\int_0^{2\pi}\chi(\lambda)dE_\lambda x_0$, где $\chi(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}a_k\exp(i\lambda k)$ или пределы таких сумм, получаем

$$\Phi(n)=\left\langle U^n x_0,e\right\rangle=\left\langle U^n x_0,\int_0^{2\pi}\chi(\lambda)dE_\lambda x_0\right\rangle=\left\langle\int_0^{2\pi}\exp(i\lambda n)dE_\lambda x_0,\int_0^{2\pi}\chi(\lambda)dE_\lambda x_0\right\rangle=$$

$$=\int_0^{2\pi}\exp(i\lambda n)\overline{\chi(\lambda)}dF(\lambda)=\int_0^{2\pi}\exp(i\lambda n)\overline{\chi(\lambda)}f(\lambda)d\lambda,$$

если существует $F'(\lambda)=f(\lambda)$, таким образом $\Phi(n)$ является коэффициентами Фурье для $\overline{\chi(\lambda)}f(\lambda)$. Следовательно, $\overline{\chi(\lambda)}f(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in\lambda)\Phi(n)$, $\Rightarrow$

$$\chi(\lambda)=\frac{1}{f(\lambda)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-in\lambda)\overline{\Phi(n)},\quad e=\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\lambda)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-in\lambda)\overline{\Phi(n)}dE_\lambda x_0 .$$

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Полученные в статье результаты можно использовать для моделирования корреляционных функций широких классов случайных процессов и последовательностей рассматривая, линейные преобразования в гильбертовом пространстве соответствующих «базовых» кривых и последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Niemi H. On stationary dilations. Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. – Math. V.45, 1975, p. 111–130.
2. Niemi H. On the linear prediction problem. Math. Scand. V.39, 1976, p. 146–160.
3. Pishel R., Yantsevich A. A. Dilatations of Random Processes // Journal of Soviet Mathematics. Vol. 48, №5, 1996, p. 560–570.
4. Черемская Н. В. Линейные преобразования нестационарных случайных последовательностей // Радиотехника, 2004. – Вып.136. – С. 43–49.
5. Петрова А. Ю. Корреляционная теория некоторых классов нестационарных случайных функций конечного ранга нестационарности // Радиоэлектроника и информатика, 2007. – № 1. – С. 29–34.
6. Бродский М. С. Треугольные и жордановые представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с
7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве // 3-е изд. исправленное и дополненное. В 2-х томах. – Х.: ХГУ, 1978. – Том 1. – 316 с.
8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве // 3-е изд. исправленное и дополненное. В 2-х томах. – Х.: ХГУ, 1978. – Том 2. – 288 с.
9. Янцевич А. А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. Часть I. Корреляционная теория. // Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Х.: Вища школа, 1986. – Вып. 45. – С. 139–141.