

Численная реализация математической модели дискретной задачи оптимизации сети трасс

С. В. Смеляков, А. Б. Элькин

*Харьковский университет воздушных сил им. Ивана Кожедуба, Украина
Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства им. Петра Василенко, Украина*

The model and solution method are suggested for the problem of automating and optimizing the construction of service routes providing approach to each particular section of routing region. The constructed locality model allows considering the region, where the field road system is to be planned, as non-uniform area, where potential routing sites can be not only rectangular-patterned but also described with curves, arbitrary-indexed. Application of the results is recommended for solving the combined problem of partitioning and routing in the different applied spheres.

1. Анализ проблемы и содержательная постановка задачи

При выделении пайщикам в собственность земельных полей, проектировании системы сельскохозяйственного водоснабжения, планировании городских коммуникаций и в иных прикладных сферах возникает задача о прокладке сети вспомогательных трасс (ВТ), обеспечивающих достижимость каждого отдельного участка рассматриваемой области трассировки.

В ряде случаев участки задаются прямоугольниками равных размеров. При этом с областью трассировки связан хотя бы один существующий магистральный путь (МП), который, в зависимости от ситуации, может проходить через точку границы области, вдоль всей границы или вдоль некоторой ее части. В свою очередь от МП строятся ВТ, которые проходят между участками, причем достижимость участка считается обеспеченной, если ВТ (или существующий МП) проходит вдоль границы или заканчивается у одной из его угловых точек.

Учитывая площадь отвода под ВТ, выводимую из целевого использования, а также затраты на их обустройство и поддержание в требуемом состоянии, возникает задача минимизации суммарной длины коммуникаций при ограничениях, определяемых также возможной неоднозначностью области трассировки.

Вместе с тем, рассматриваемая задача возникает не сама по себе, а в рамках технической проблемы комплексной автоматизации с использованием специализированных программных комплексов для решения частных задач [1-7]. С другой стороны, использование современных технологий в данной сфере требует, чтобы задача планирования сети ВТ могла решаться в реальном масштабе времени и допускала адаптацию к геометрическим особенностям области трассировки для обеспечения интерактивного планирования разбиения на участки с одновременным оцениванием затрат на сооружение сети

коммуникаций и площади других подобластей, выводимых из целевого использования.

Таким образом, метод оптимизации сети ВТ должен иметь низкую трудоемкость и предусматривать рассмотрение неодносвязных областей, а также то, что участки могут иметь форму, отличную от прямоугольной.

2. Постановка основной оптимизационной задачи

На плоскости Oxy задана сетка S с узлами $s_{i,j}$, ($i=0,1,\dots,n_i$; $j=0,1,\dots,n_j$; $s_{0,0}=O$), равномерно распределенными вдоль осей Ox и Oy с шагом a и b , $a>b$, соответственно.

Наряду с сеткой S , определяющей геометрические характеристики рассматриваемой задачи, рассмотрим граф $G_S = \{V_S, R_S, C_S, W_S\}$, вершины $v \in V_S$, ребра $r \in R_S$ и ячейки $c \in C_S$ которого совпадают с соответствующими элементами сетки S , а вес $w \in W_S$ всякого ребра задан величиной a или b .

Тогда всякой простой ломаной [8] (как линии без петель и самопересечений), составленной из ребер сетки S , соответствует простая цепь [9] на G_S (как связанная последовательность ребер без повторения ребер и вершин), и наоборот. При этом замкнутой простой ломаной (гомотопной окружности) соответствует простой цикл.

Пусть на графе G_S задан простой цикл Γ . Тогда определяемая им ломаная γ ограничивает на плоскости односвязную область Ω , содержащую некоторую совокупность ячеек $C_\Omega = \{c_i\}_{i \in I_C}$. Соответственно, множество ребер и вершин, попавших в область Ω , обозначим R_Ω, V_Ω , а образуемый ими граф – G_Ω . Объединение графа G_Ω с циклом Γ обозначим G_Γ (рис. 1). Заметим, что $G_\Omega \subset G_\Gamma \subset G_S$ и граф G_Ω может быть несвязным.

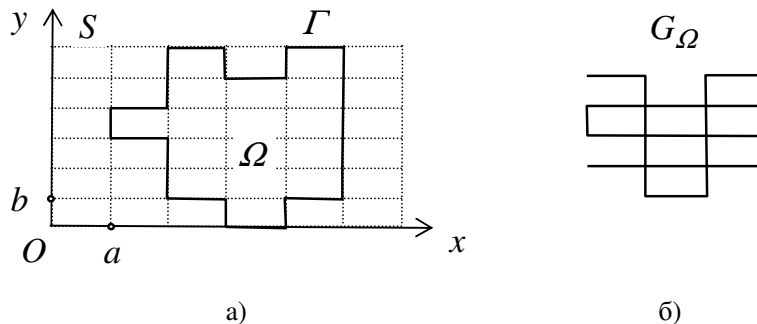


Рис. 1. Рассматриваемые графы на сетке S

а – граф G_Γ образован вершинами и ребрами, лежащими на Γ и в области Ω ;

б – граф G_Ω образован вершинами и ребрами, лежащими в области Ω .

На границе Γ выделено непустое множество $D = V_D \cup H_D$, которое может содержать изолированные вершины V_D , определяющие тупиковые окончания существующих МП, и попарно несвязные цепочки H_D , определяющие фрагменты МП, идущих вдоль границы рассматриваемой области трассировки (т.е. области Ω). В предельных случаях множество D может содержать от одной вершины до контура Γ . Назовем множество D рубежом, а его элементы – линейными (H_D) и точечными (V_D) источниками. От любой вершины рубежа ВТ могут быть продолжены в область Ω по ребрам графа $G_0 = G_\Gamma \setminus D$.

Пусть T – связное множество ребер в G_0 , хотя бы одно концевое ребро которого имеет общую вершину с рубежом D . Назовем его остовом. Тогда каждую ячейку c_j , $j \in I_T$, граница которой содержит хотя бы одну вершину v из T , считаем достижимой из T , и просто достижимой, если некоторая ее вершина принадлежит множеству $T \cup D$. С практической точки зрения это означает достижимость участка (ячейки c_j) как минимум с «угла» (через вершину v), или даже по примыкающему участку ВТ (т.е. по ребру, инцидентному вершине v), если такой имеется.

Пусть $T = \{T_i\}_{i=1, n_T}$ – система остовов, попарно не имеющих общих вершин в G_0 (они могут иметь общие концевые вершины в D). Назовем систему остовов T полной, если всякая ячейка $c \in C_\Omega$ достижима.

Соответственно, сумму длин ребер, входящих в остов T_i , обозначим w_i и положим

$$w_T = \sum_{i=1}^{n_T} w_i. \quad (1)$$

Полную систему остовов T , совместно с рубежом D , назовем VR -покрытием $T_D = T \cup D$ области Ω .

Наконец, пусть τ – множество систем остовов для заданных множеств Ω и D , которые обладают свойством полноты. Тогда основная задача минимизации длины системы ВТ, обеспечивающих подъезд ко всем участкам, ставится следующим образом.

Основная оптимизационная задача (ООЗ):

$$\text{найти } T_* = \arg \min_{T \in \tau} w_T. \quad (2)$$

3. Основные свойства оптимального VR -покрытия T_*

Свойство 1. Если T_* не пустое множество, то всякий его остов – дерево.

Если все ячейки достижимы из рубежа D , то T_* – пустое множество. Пусть $T \in T_*$, $T \neq \emptyset$ и T содержит цикл, определяемый последовательностью вершин $\dots v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots$; $v_1 = v_{k+1}$. Тогда удаление из T любого ребра вида $v_i v_{i+1}$, ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$), не лишает ни одну из ячеек, достижимых из T , этого свойства при рассмотрении остова $T' = T \setminus v_i v_{i+1}$, поскольку вершины v_i, v_{i+1} не выводятся

из остова T' . Но это противоречит тому, что остов T_* имеет минимальную длину.

Не теряя общности будем рассматривать далее нетривиальные VR -покрытия $T \in T_*$ где $T \neq \emptyset$.

Свойство 2. Всякий остов $T \in T_*$ имеет одну и только одну общую вершину с рубежом D .

Допустим, что остов T имеет с рубежом D две общие вершины v, v' . Тогда в силу связности остова существует цепь v_1, v_2, \dots, v_k , где $v_1 = v$ и $v_k = v'$. Но в этом случае удаление любого ребра $v_i v_{i+1}$, ($i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$) из $T = T' \cup v_i v_{i+1} \cup T''$ не лишает достижимости ни одну из ячеек, так как вершины v_i, v_{i+1} остаются в несвязных остовах T', T'' , каждый из которых связан с рубежом (либо является им). Но это противоречит тому, что остов T_* имеет минимальную длину.

Далее, допустим для удобства анализа, что рубеж D – дерево или лес [9] (т.е. совокупность несвязных деревьев). Это допущение может быть нарушено только при $D = \Gamma$; но и в этом случае исключение произвольного ребра из Γ не исключает из рассмотрения ни одной вершины рубежа и не устраняет достижимость ячеек. В этом случае из свойств 1 и 2 вытекает

Теорема 1. Оптимальное VR -покрытие $F_* = D \cup T_*$ это лес $D \cup \{T_i\}_{i=1, n_T}$, каждый остов которого T_i имеет одну и только одну общую вершину с одной из компонент $V_D \cup H_D$ рубежа D .

Вместе с тем, топология леса F_* не исключает следующей возможности.

Свойство 3. Некоторое дерево T' леса F_* может содержать несколько компонент из системы остовов T_* , причем соответствующие пары из них могут иметь общую вершину из D .

Данная ситуация иллюстрируется на рис. 2; решение для случая $a < 2b$: рубеж D и два остова T_1 и T_2 , имеющие общую вершину v . Ячейки 1, 2 и 4, 7 и 8 достижимы из D ; ячейки 3, 5, 6, 9 и 10 – только из T_1 , а 11 и 12 – из T_2 . В случае $a > 2b$ вместо дерева T_2 к дереву T_1 добавится фрагмент T' , обозначенный стрелкой.

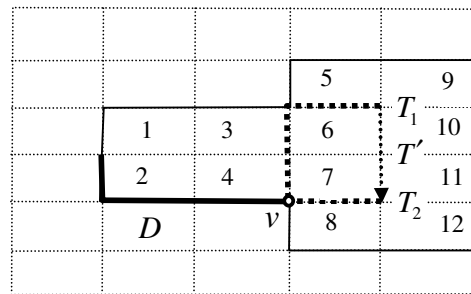


Рис 2. Варианты остовов при различном соотношении параметров сетки

Свойство 4. В оптимальном VR-покрытии некоторые ячейки могут быть достижимы из различных компонент.

Иллюстрацией для этого свойства служит рис. 3, где ячейка c достижима из обеих компонент T_1 и T_2 с точечными источниками D_1 и D_2 .

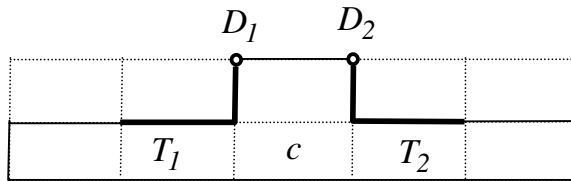


Рис. 3. Иллюстрация возможности достижимости ячейки из нескольких компонент системы остовов VR-покрытия области

Свойство 5. Оптимальное VR-покрытие может содержать только самые длинные ребра графа G_0 .

Иллюстрацией для этого свойства служит рис. 4, где задан точечный источник D и кратчайший остов T , выделенный жирной горизонтальной линией.

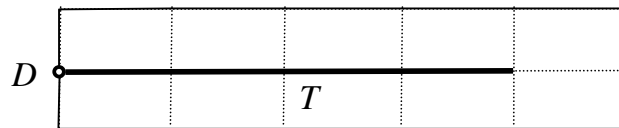


Рис. 4. Кратчайший остов T , составленный из ребер максимальной длины

Таким образом, хотя оптимальное VR-покрытие представляет собой лес, как показывают приведенные выше свойства, к решению ООЗ, как минимум – в прямой постановке, не применимы известные методы поиска кратчайших остовов (даже в случае перехода к рассмотрению двойственного к G_0 графа G'_0 , вершины которого являются ячейками графа G_0), которые основаны на использовании пометок и кратчайших ребер. Это связано с тем, что некоторые ячейки могут быть достижимы из разных остовов, а оптимальное решение может состоять из ребер максимальной длины и, в то же время, кратчайшее остовое дерево [10] может оказаться избыточным.

Ввиду этих решение ООЗ предлагается искать с помощью метода поисковой оптимизации. В этом случае можно ввести в рассмотрение иные функции цели, которые более адекватно описывают потребности прикладных задач. Среди них важное место занимает критерий средней удаленности L_T участков от рубежа для системы остовов T . Если устремить эту величину к минимуму, топология системы T будет иметь структуру леса, состоящего из большого числа коротких, но разветвленных деревьев. Если устремить эту величину к максимуму, топология системы T будет иметь структуру леса, состоящего из малого числа деревьев, имеющих большой индекс вложения.

Так, пусть L_i – минимальное расстояние до ячейки i , ($i=1, 2, \dots, N_C$) от рубежа D . Тогда критерий средней удаленности участков от рубежа примет вид

$$L_T = \frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} L_i. \quad (3)$$

При этом критерий (3) не заменяет (1), а используется в лексикографическом смысле $W_T \succ L_T$ как задающий предпочтение для систем остовов оптимальных (или близких по значению в пределах заданного допуска Δ_w) в смысле критерия (1).

4. Базовый алгоритм решения ООЗ

Пусть N_S – число ячеек графа G_0 и T_* – оптимальная система остовов. Тогда, удаляя в произвольном порядке, но по одному, листья (т.е. ребра со свободным концом) из остовов, входящих в T_* , на некотором шаге получим пустое множество. Поэтому и решение T_* может быть получено в обратном порядке, добавлением листьев к рубежу. Поскольку порядок, соответствующий оптимальному решению T_* , неизвестен, рассмотрим алгоритм построения леса, начиная с вершин рубежа D , с соблюдением полученных необходимых условий оптимальности, который приводит к получению допустимого, хотя может быть и не оптимального по длине VR -покрытия.

Пусть $\tau_k = \{T_i\}_{i=1,k}$ – лес из остовов $T_i \neq \emptyset$, который получен на некотором шаге последовательного присоединения листьев. Будем строить это VR -покрытие τ_k таким образом, чтобы каждый остов удовлетворял условию теоремы 1 (имел одну и только одну общую вершину с некоторой компонентой рубежа и не образовывал циклов) и не исключал возможности появления ситуаций, рассмотренных в свойствах 3-5. С этой целью на каждом шаге разрастания системы остовов τ_k будем производить анализ и/или изменение следующих пометок для ребер r и ячеек s графа G_T .

Пометка p определяет, куда отнесено ребро r

$$p_r = \begin{cases} -1, & \text{если } r \in D; \\ i, & \text{если } r \in T_i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $p_r \neq 0$ значение этой пометки считаем постоянным.

Для ребра с пометкой $p_r = 0$ используем вспомогательную пометку

$$q_r = \begin{cases} -1, & \text{если добавление ребра } r \text{ приводит к появлению цикла;} \\ i, & \text{если ребро } r \text{ может быть добавлено, но лишь к остову } T_i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $q_r \neq 0$ значение этой пометки считаем постоянным. Заметим, что если ребро r с пометкой $q_r > 0$ в последующем и будет присоединено к некоторому

остову, пометка p_r примет значение i и вспомогательная пометка q_r более не рассматривается.

Для ячеек s_l , ($l = 1, 2, \dots, N_S$) используем пометку

$$s_l = \xi,$$

где ξ – число компонент рубежа и не связанных с ними остовов, из которых она достижима; если ячейка не достижима, полагаем $\xi = 0$.

Далее, пусть задан критерий

$$f(k, p, q, s),$$

который определяет предпочтительность добавления очередного ребра с пометкой $p_r > 0$ по значениям указанных параметров, и критерий $F(\tau_k)$, который, определяет значение функции цели для системы остовов τ_k , которая задана соответственно (1), (3), $W_T \succ L_T$ либо иным образом.

Любая вершина рубежа D в зависимости от ее положения (на прямолинейном участке рубежа, в точке излома или в изолированной вершине) может служить начальной вершиной от одного до четырех остовов, либо ни одного (рис. 5). Для первой альтернативы обозначим все потенциально возможные остовы $\{T_i\}_{i=1, N_D}$.

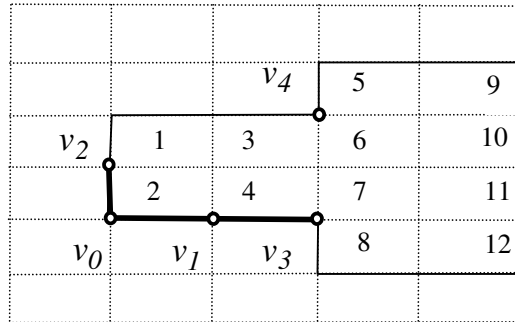


Рис. 5. Потенциальное число остовов с началом в вершине рубежа D , содержащего ломаную $v_2v_0v_1v_3$ и изолированную вершину v_4 , равно индексу вершины

Множество ребер $W = \{r \mid q_r > 0\}$ назовем активными: в соответствии с принятым принципом разрастания остовов от рубежа, присоединяемое к остову ребро может быть взято лишь из этого множества.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Инициализация.

Задаем пометки p и q следующим образом.

$$p_r := \begin{cases} -1, & \text{если } r \in D; \\ 0, & \text{если } r \in G_0. \end{cases}$$

$$q_r := \begin{cases} -1, & \text{если } D \cup r \text{ образует цикл;} \\ i, & \text{если ребро } r \notin D \text{ инцидентно вершине } v_i \in D; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Число непустых остовов обозначим k ; поскольку на данном этапе остовов нет, полагаем $k := 0$, $T_i = \emptyset$, $(i = 1, 2, \dots, N_D)$.

Пометки s_l для ячеек задаем, рассматривая лишь вершины рubeжа. Число этих пометок с ненулевым значением обозначим n_s .

Если $n_s = N_s$ (все ячейки помечены из вершин рubeжа), переход к шагу 4; иначе формируем множество активных $W = \{r \mid q_r > 0\}$.

Шаг 2. Присоединение ребра $r \in W$ к остову.

2.1. По критерию $f(k, p, q, s)$ выбираем ребро $r \in W$, $q_r = i$, и относим его к остову T_i . Свободную вершину этого ребра обозначим v_r .

2.2. Обновляем пометки для ребер:

$$p_r := i;$$

для всех ребер $\rho \in G_0$, которые инцидентны вершине v_r и имеют временные пометки $p_\rho = 0$, обновляем пометки q_ρ , соответственно ситуации задавая значение -1 или i .

2.3. Обновляем пометки s_l для ячеек, инцидентных вершине v_r и общее число n_s достижимых ячеек, если добавление ребра r привело к увеличению этих параметров.

Шаг 3. Проверка достижимости всех ячеек.

Если $n_s = N_s$, переход к шагу 4; иначе – к шагу 2.

Шаг 4. Формирование результата.

Пологаем $T_D = D \cup T$, где система остовов $T = \{T_j\}_{j=1, N_T}$ составлена из деревьев $T_j = \{r : p_r = j\}$, $(j = 1, 2, \dots, N_T)$, содержащих ребра с пометками $p_r = j$. Конец.

По построению алгоритм 1 приводит к получению VR -покрытия в виде леса T_D , не имеющего структурно-реберной избыточности в том смысле, что удаление любого ребра из T_D делает хотя бы одну ячейку не достижимой. Однако, он не обеспечивает минимизацию критерия (1) или (3), пока критерий $f(k, p, q, s)$ остается неопределенным. Поэтому назовем лес T_D , полученный в результате применения алгоритма 1, допустимым решением основной задачи.

Оценим теперь трудоемкость построения допустимого решения, рассмотрев два экстремальных типа рubeжа.

Допустим, что $D = \Gamma$, а область Ω – квадрат с числом ячеек N ; в практических задачах это значение, с некоторыми вариациями, по порядку величины имеет значение $N \approx 40$.

Тогда число ребер, составляющих рубеж, можно оценить величиной $n_D \approx 4\sqrt{N}$. Эта же величина определяет и число ячеек, достижимых из D . В результате остается $n_0 \approx N - 4\sqrt{N}$ ячеек, не достижимых из D . Добавление одного ребра к рубежу приводит, в общем, к тому, что две новые ячейки становятся достижимыми. Поэтому для достижимости n_0 ячеек следует добавить порядка

$$n_\Gamma \approx \frac{n_0}{2} = \frac{N - 4\sqrt{N}}{2} \text{ (ребер)},$$

что при среднем числе ячеек дает значение порядка $n_\Gamma \approx 7$ (ребер).

Рассмотрим теперь другой крайний случай, когда рубеж задан одной изолированной вершиной. Тогда для достижимости $N-2$ ячеек следует добавить порядка

$$n_v \approx \frac{N-2}{2} \text{ (ребер)},$$

что при среднем числе ячеек дает значение порядка $n_v \approx 19$ (ребер).

В среднем получим

$$\bar{n} = \frac{n_\Gamma + n_v}{2} \approx N/2 - \sqrt{N} \text{ (ребер)},$$

что для типовой ситуации составляет величину порядка 13.

Таким образом, трудоемкость алгоритма 1 составляет величину порядка

$$\kappa_1 \approx \kappa_0 \cdot \bar{n} \text{ (оп)},$$

где κ_0 – трудоемкость шага 2, выраженная числом логических операций по выполнению следующих основных действий: выбор ребра $r \in W$, обновление от 0 до 3 пометок q_p для ребер, инцидентных вершине v_r и обновление пометок s_l для двух ячеек, инцидентных вершине v_r . Если по порядку величины оценить трудоемкость этих действий 10 операциями, средняя трудоемкость применения алгоритма 1 составит величину порядка

$$\kappa_1 \approx 10 \cdot (N/2 - \sqrt{N}) \text{ (оп)}.$$

Следовательно, линейная (по числу ячеек) и достаточно низкая в абсолютном измерении (по числу логических операций) трудоемкость применения алгоритма 1, обеспечивающего получение структурно не избыточного VR -покрытия, удовлетворяющего условию теоремы 1, позволяет эффективно применять его для построения решения ООЗ в рамках методов поисковой оптимизации.

5. Методы адаптивного и случайного поиска для решения ООЗ

Рассмотрим вначале метод случайного поиска, основанный на случайном переборе VR -покрытий из множества всех допустимых вариантов. Для этого положим, что на шаге 2 алгоритма 1 критерий $f(k, p, q, s)$ имеет вид $f_{MC}(q)$ и определяет выбор ребра $r \in W$ по методу Монте-Карло, т.е. на равновероятной основе.

Пусть m – номер итерации, m_* – максимально допустимое число итераций, а Δ_* – допустимая длина VR-покрытия. В этом случае решение ООЗ сводится к применению следующего алгоритма.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Инициализация.

Полагаем $w_* = \infty$, $T_* = G_\Gamma$, $m := 0$.

Шаг 2. Построение допустимого VR-покрытия.

Полагаем $m := m + 1$.

Выполняя алгоритм 1 для критерия $f_{MC}(q)$, получаем VR-покрытие T с весом (1) w_T .

Шаг 3. Анализ полученного допустимого покрытия.

Если $w_T < w_*$, полагаем $w_* := w_T$, $T_* := T$.

Шаг 4. Проверка критерия останова.

Если $m < m_*$ и $w_* > \Delta_*$, переход к шагу 2;

иначе – VR-покрытие T_* принимается за решение задачи 1. Конец.

Ясно, что вариант условия останова на шаге 4 может варьироваться соответственно ситуации: например, условие $w_* > \Delta_*$ может быть исключено.

Принципиальным обобщением данного алгоритма является его адаптация на топологические и геометрические особенности системы остовов. Это предлагается делать, задавая вероятности для ребер $r \in W$ так, чтобы при этом выдерживались интересующие пользователя тенденции в структуре системы остовов.

Например, для того, чтобы стимулировать построение длинных и разветвленных остовов, можно задавать вероятность присоединения ребер из W к остову T_i пропорционально числу включенных в него ребер $N(p_r = i)$; наоборот, чтобы стимулировать построение коротких, но разветвленных остовов можно задавать вероятность присоединения ребер из W к остову T_i обратно пропорционально средней удаленности его вершин от начальной вершины, принадлежащей рубезу. Соответствующие модификации критерия $f_{MC}(q)$ с учетом значений параметров ребер из W обозначим $f_{MC}(k, p, q, s)$.

Наконец, для лексикографической оптимизации $W_T \succ L_T$ по критериям (1) и (3) алгоритм 2 достаточно модифицировать следующим образом.

Пусть L_T^* – допустимая средняя удаленность ячейки от рубеза, а w_{**} – допустимая суммарная длина остовов (она может быть получена увеличением значения w_* для решения, полученного для однокритериальной задачи (2)).

Алгоритм 3.

Шаг 1. Инициализация.

Полагаем $l_* = \infty$, $T_* = G_\Gamma$, $m := 0$.

Шаг 2. Построение допустимого VR - покрытия.

Полагаем $m := m + 1$.

Выполняя алгоритм 1 для критерия $f_{MC}(k, p, q, s)$, получаем VR - покрытие T с весами w_T (1) и L_T (3).

Шаг 3. Анализ полученного допустимого покрытия.

Если $w_T < w_{**}$ и $L_T < l_*$ полагаем $l_* := L_T$, $T_* := T$.

Шаг 4. Проверка критерия останова.

Если $m < m_*$ и $l_* > L_T^*$, переход к шагу 2;

иначе – VR - покрытие T_* принимается за решение ООЗ. Конец.

Как и в случае алгоритма 1, варианты условий принятия текущего покрытия (в зависимости от его длины) на шаге 3 и останова на шаге 4 могут варьироваться соответственно требованиям прикладной задачи. Например, на шаге 3 можно рассматривать условия по обоим критериям; но это уже вопрос практической настройки метода оптимизации на особенности задачи, интересующие лицо, принимающее решение (ЛПР).

6. Модели и методы решения ООЗ в случае неортогональной сетки, неодносвязной области и заданных фрагментов внутренних МП

В некоторых случаях определенные ячейки сетки S , лежащие в области Ω , могут исключаться из рассмотрения. Тогда, если на этапе инициализации считать эти ячейки помеченными, то предложенные алгоритмы не будут принимать их в рассмотрение, заканчивая работу при построении системы остовов, обеспечивающих достижимость лишь требуемых ячеек. Поэтому предложенные алгоритмы поисковой оптимизации применимы к решению ООЗ и в случае неодносвязной области Ω .

В определенных случаях границы ячеек могут не иметь ортогональной структуры во всей области Ω или в некоторой ее подобласти. Это может быть связано с особенностями границ области Ω , существующим МП и иными обстоятельствами. И в этом случае предложенные модели сохраняют свою адекватность, поскольку ортогональность ребер и индекс ветвления не составляют сути предложенных алгоритмов; изменится лишь операция выделения ребер, инцидентных вершине v_r , за счет вариации индекса ветвления в вершинах сети S . Поэтому предложенные алгоритмы поисковой оптимизации применимы к решению ООЗ и в случае представления области Ω сеткой с ячейками, имеющими криволинейные границы, и вершинами, имеющими различный индекс ветвления.

Наконец, представляет интерес случай, когда некоторая сеть МП d проходит внутри области Ω , которая, по усмотрению ЛПР, должна определять структуру проектируемой сети ВТ. Но и в этом случае на этапе инициализации достаточно отнести их к рубежу D , чтобы предложенные алгоритмы сохранили свою адекватность.

7. Заключение

В работе предложены модель и метод решения задачи о прокладке сети ВТ, обеспечивающих достижимость каждого отдельного участка области трассировки. Построенная модель позволяет рассматривать неодносвязную область Ω для проектирования системы ВТ, где места потенциальной трассировки могут иметь не только прямоугольную структуру, но и описываться кривыми, причем с произвольным индексом ветвления в местах их пересечения. При этом исходные рубежи, от которых следует проводить ВТ, могут находиться как на границе области Ω , так и внутри нее.

Введенные в рассмотрение основные критерии эффективности системы ВТ определяют суммарную длину сети и среднюю удаленность участка от рубежа. Показано, что в этих условиях даже ООЗ о поиске кратчайшей сети ВТ на ортогональной сетке существенно отличается от родственных задач в теории графов, поскольку оптимальное решение может достигаться в условиях многократной достижимости ячеек, на ребрах максимальной длины и др. В связи с этим были получены основные свойства оптимальных решений, включая необходимое условие экстремума для данной задачи.

На основе проведенного анализа предложен метод решения задачи трассировки для общего случая, который основан на использовании алгоритма построения *VR*-покрытия (системы остовов, связывающих участки с рубежами), которое обладает свойством полноты и структурно-реберной минимальности. Этот алгоритм, как структурная единица, используется в алгоритмах случайного и адаптивного поиска оптимального *VR*-покрытия.

Полученные оценки трудоемкости алгоритма построения *VR*-покрытия для экстремальных типов рубежей и типовых значений числа участков показывают его линейную трудоемкость от числа участков, причем с малым коэффициентом пропорциональности, определяющим затраты на выполнение порядка десятка операций сравнения, что, наряду с неприменимостью существующих методов построения кратчайших остовов, делает целесообразным использование этого алгоритма в методах случайного поиска.

Сами алгоритмы случайного поиска оперируют с рядом параметров задачи, которые имеют очевидный практический смысл и актуальность для ЛППР. Возможность настройки алгоритмов по этим параметрам позволяет получать более эффективные решения задачи трассировки, чем лишь в случае использования формализованных критериев – суммарной длины системы ВТ и средней удаленности участков от рубежа.

Развитие данной работы может состоять в разработке интеллектуальной надстройки для создания интерактивной системы решения ООЗ с учетом рассмотренных и иных критериев и ограничений, ввиду естественной возможности их интеграции в предложенные модели и алгоритмы, реализующие принципы последовательного разрастания коммуникационной сети, возможность априорного задания части ВТ (в интерактивном режиме) и отбора лучших вариантов, полученных в процессе случайного поиска.

Дальнейшее развитие приложений настоящей работы к проектированию сети ВТ может также лежать на пути совместного решения задач разбиения области на участки и прокладки системы ВТ с целью генерации вариантов для ЛППР,

которые в наиболее полной мере отражают многообразие формализованных критериев и ограничений и допускают коррекцию в процессе диалогового проектирования, минимизируя тем самым непроизводительные затраты на обработку промежуточных данных.

Рекомендуется применение полученных результатов для решения задачи разбиения и трассировки в радиоэлектронике, коммунальном хозяйстве, АПК и др. В частности, на основании учета особенностей проектирования сетей полевых дорог [12] и обработки полей [13], законодательства Украины в области землеустройства [14] и земельной реформы [15] нетрудно проверить, что характерные прикладные размерности и конфигурации полностью соответствуют области эффективности для параметров разработанной системы алгоритмов, решающих ООЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элькин А.Б. Математическая модель прикладной задачи оптимизации разбиения геометрической области // Вісник Харк. нац. ун-ту. № 775. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи керування". – Х.: ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – 2007. – Вип. 7. – С. 258 – 267.
2. Путятин В.П., Элькин А.Б. Математическая модель задачи оптимизации разбиений в АПК // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Х.: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 18. – С. 98 – 105.
3. Элькин А.Б. Модель задачи оптимизации разбиения области по заданному критерию // Управління розвитком. Зб. наукових статей. – Х.: ХНЕУ, 2007. – Вип. 3. – С. 121 – 122.
4. Патент. № 22708. Україна, МПК (2006) G 06 F 5/06. Пристрій для моделювання та оптимізації трас / В.П. Путятін, О.Б. Елькін (Україна). – № u200613268; Заявл. 15.12.2006; Опубл. 25.04.2007. Бюл. № 5 – 4 с.
5. Патент. № 22623. Україна, МПК (2006) G 06 F 17/00. Пристрій для комбінаторної оптимізації розміщення об'єктів та трасування / В.П. Путятін, О.Б. Елькін (Україна). – № u200612839; Заявл. 05.12.2006; Опубл. 25.04.2007. Бюл. № 5 – 4 с.
6. Смеляков С.В., Путятин В.П., Элькин А.Б. Решение задачи оптимизации сети полевых дорог // II-я Международная научная конференция «Современные информационные системы. Проблемы и тенденции развития»: Сб. материалов конференции. – Х.: ХНУРЭ, 2007. – С. 154 – 155.
7. Элькин А.Б. Модели задач разбиений и трассировки в АПК // Матеріали Міжнародного Форуму молодих вчених «Ринкова трансформація економіки: стан, проблеми, перспективи». – Х.: ХНТУСГ ім. П. Василенко, 2007. – С. 219 – 220.
8. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. – М.: Гостехиздат, 1950. – 428 с.
9. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
10. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

11. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
12. Строительные нормы и правила. Внутрихозяйственные автомобильные дороги в колхозах, совхозах и других сельскохозяйственных предприятиях и организациях // СНиП 2.05.11-83. – Москва, 1984. – 27 с.
13. Мельник В.И., Чигирин А.Г., Миронов П.А. Анализ задачи выбора оптимального направления сплошной обработки поля с учетом его рельефа // Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. – 2003. – Вип. 20. – С. 285-296.
14. Про землеустрій: Закон України від 22 травня 2003 р. // Відомості Верховної Ради. – 2003. – № 36. – с. 282.
15. Про порядок виділення в натурі (на місцевості) земельних ділянок власникам земельних часток (паїв): Закон України від 5 червня 2003 р. // Відомості Верховної Ради. – 2003. – № 38. – с. 314.