

Применение комбинированного метода
граничных элементов и дискретных вихрей для решения
некоторых задач гидродинамического взаимодействия в
плоских потоках

Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков
Днепропетровский национальный университет, Украина

The hydrodynamic interaction problem is considered. Among a lot of forms of hydrodynamic interactions, the hydrodynamic interaction between vortical structures and solid body in plane flows is chosen as an object of investigation in the present work. It is shown that the method of combined boundary element and discrete vortex is quite effective for this problem. Several problems about interaction of vortical structures and solid bodies are solved numerically to illustrate the developed algorithm.

Проблема расчета гидродинамического взаимодействия является одной из наиболее сложных задач вычислительной гидромеханики. Хотя физические аспекты данной проблемы, как правило, достаточно просты, сложная геометрическая форма и многосвязность областей решения, а также более широкий спектр физических явлений, подлежащих учету при решении задачи, приводят при решении задач гидродинамического взаимодействия к вычислительным трудностям, несоизмеримым с аналогичными задачами для уединенного тела. На протяжении длительного времени задачи гидродинамического взаимодействия вызывали значительный интерес (достаточно, например, упомянуть решение задачи о биплане в плоском потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, данное в монографии Л.И. Седова [1]), но ввиду упомянутых трудностей в целом было получено весьма ограниченное число результатов. Существенный прогресс в данной области был достигнут лишь после применения для численного решения задач гидродинамического взаимодействия методов граничных интегральных уравнений (панельный метод, метод дискретных вихрей, метод граничных элементов) [2-4], одним из главных достоинств которых является возможность эффективно работать с областями очень сложной геометрической формы.

Объектами гидродинамического взаимодействия могут быть твердые тела в потоке, твердые границы потока, свободные границы потока и границы раздела несмешивающихся жидкостей, включения в поток иных жидкостей или газов, струи, вдуваемые в поток, пограничные слои, вихревые следы и другие вихревые структуры. Понятно, что при столь широком спектре рассматриваемых объектов число форм их возможного взаимодействия чрезвычайно велико, поэтому целесообразно выделение отдельных классов гидродинамических взаимодействий и разработка специальных методов их исследования. Предметом рассмотрения настоящей работы является влияние твердых тел, находящихся в плоском потоке, на эволюцию вихревых структур,

движущихся в потоке. Данную задачу следует рассматривать как часть общей проблемы гидродинамического взаимодействия. Следует отметить, что в настоящее время указанная форма влияния исследована слабо, поскольку представляет скорее теоретический, нежели практический интерес. Обзор работ данного направления для плоских потоков можно найти в монографиях [6,7]. Принципиальный интерес представляет эффект генерации вихрем в результате взаимодействия с твердой границей собственной скорости, чего не наблюдается в классической задаче эволюции вихревой структуры в неограниченной жидкости. Эффект этот хорошо изучен для прямолинейных стенок, однако в случае криволинейной стенки он может проявиться достаточно неожиданным образом.

Как отмечалось выше, численное решение задач гидродинамического взаимодействия требует разработки специальных численных методов. Отличительной чертой рассматриваемой задачи является необходимость расчета движения вихревой структуры в непосредственной близости от твердой границы, так как при удаленном взаимодействии исследуемые эффекты незначительны. Метод дискретных вихрей, традиционно применяемый для расчета эволюции вихревых структур, не обеспечивает достаточной точности расчета поля скоростей вблизи границы области (за исключением случая применения достаточно трудоемких алгоритмов, основанных на использовании функций Грина [7]). Для того, чтобы устранить указанную трудность в настоящей работе был использован комбинированный метод граничных элементов и дискретных вихрей [8], который обеспечивает достаточно высокую точность расчета поля скоростей вблизи границы области, особенно при использовании регулярного алгоритма с интегрированием вдоль реальной границы [9, 10].

1. Комбинированный метод граничных элементов и дискретных вихрей

Сформулируем задачу о плоском течении в терминах функции тока – завихренность. Уравнение для функции тока:

$$\Delta \Psi = -\omega, \quad (1)$$

и уравнение переноса завихренности для невязкого потока:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Для уравнений (1), (2) ставятся необходимые начальные и граничные условия. Согласно комбинированному методу граничных элементов и дискретных вихрей в случае вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости этом завихренность в области течения моделируется дискретными вихрями, а границы области течения – граничными элементами [8]. Основанный на таком подходе алгоритм будет сочетать эффективность метода граничных элементов с простотой метода дискретных вихрей для моделирования вихревых структур. Таким образом, при рассмотрении уравнения (1) завихренность в правой части будет иметь вид:

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^M \omega_i \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (3)$$

где M – количество

Рассмотрим инте

$c(x_0)$

$-\int_{\Gamma} \Psi$

где $\bar{\Psi}$ – возмущен

соотношением $\bar{\Psi} =$

D – область течения

точки, определенн

представление (4) пр

$C(x)$

$-\int_{\Gamma} \Psi$

после чего к уравн

граничных элементо

элементов скорости

$u =$

$-\int_{\Gamma} \Psi$

$v =$

$+\int_{\Gamma} \Psi$

Дискретные вихр

скорости жидкости

системой уравнений

$\dot{x}_k =$

где точки обозначаю

скорости, определяе

системы уравнений (

$x_k^{(i+1)}$

где $x_k^{(i)}, y_k^{(i)}, u_k^{(i)}, v_k^{(i)}$

момент времени.

где M – количество свободных вихрей, ω_i – их интенсивности.

Рассмотрим интегральный аналог уравнения (1)

$$c(x_0, y_0) \bar{\Psi}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} \varphi_0(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, y)}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \bar{\Psi}(x, y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(x, y, x_0, y_0) ds + \int_D \omega(x, y) \varphi_0(x, y, x_0, y_0) dx dy, \quad (4)$$

где $\bar{\Psi}$ – возмущенная функция тока, связанная с обычной функцией тока соотношением $\bar{\Psi} = \Psi - \psi$, φ_0 – фундаментальное решение уравнения Лапласа, D – область течения, Γ – ее граница, C – функция расположения контрольной точки, определенная обычным образом. С учетом (3) интегральное представление (4) примет вид

$$C(x_0, y_0) \bar{\Psi}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} \varphi_0(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, y)}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \bar{\Psi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(x, y, x_0, y_0) ds + \sum_{i=1}^M \omega_i \varphi_0(x_i, y_i, x_0, y_0), \quad (5)$$

после чего к уравнению (5) можно применить стандартный алгоритм метода граничных элементов [4, 5]. После решения краевой задачи методом граничных элементов скорость в любой точке потока может быть вычислена по формулам

$$u = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y_0} + 1 = 1 + \oint_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \bar{\Psi} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial n \partial y_0}(x, y, x_0, y_0) ds + \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}(x_i, y_i, x_0, y_0), \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_0} = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n} ds + \oint_{\Gamma} \bar{\Psi} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial n \partial x_0}(x, y, x_0, y_0) ds - \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}(x_i, y_i, x_0, y_0). \quad (7)$$

Дискретные вихри движутся, как жидкие частицы, и их скорость равна скорости жидкости в данной точке. Таким образом, движение их описывается системой уравнений

$$\dot{x}_k = u(x_k, y_k), \dot{y}_k = v(x_k, y_k), (k = 1 \dots M), \quad (8)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени, u, v – соответствующие скорости, определяемые соотношениями (6), (7). Как правило, для решения системы уравнений (8) применяется схема Эйлера:

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + u_k^{(i)} \Delta t, y_k^{(i+1)} = y_k^{(i)} + v_k^{(i)} \Delta t, \quad (9)$$

где $x_k^{(i)}, y_k^{(i)}, u_k^{(i)}, v_k^{(i)}$ – координаты и скорости k -го дискретного вихря в i -ый момент времени.

2. Учет дипольных эффектов

Рассмотрим пару вихрей знака, расположенных один около другого в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , соответственно, таким образом, функция тока для такого течения:

$$\Psi(x, y) = \omega_1 \varphi_0(x, y, x_1, y_1) + \omega_2 \varphi_0(x, y, x_2, y_2)$$

Заменим функцию тока ее разложением в ряд Тейлора и отбросим члены вплоть до второго порядка точности включительно:

$$\Psi(x, y) = (\omega_1 + \omega_2) \varphi_0(x, y, x_0, y_0) + (\omega_1 h_1 - \omega_2 h_2) \frac{\partial \varphi_0}{\partial h} + \dots \quad (10)$$

где точка (x_0, y_0) – положение новой конструкции, аппроксимирующей пару вихрей, h_1 – расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_0, y_0) , h_2 – между точками (x_2, y_2) и (x_0, y_0) . Нетрудно показать, что величины h_1 и h_2 совпадают с толщинами вытеснения соответствующих пограничных слоев. Но $\frac{\partial \varphi_0}{\partial h}$ – это представление диполя. Таким образом, вихревая пара аппроксимируется диполем, интенсивностью $\omega_1 h_1 - \omega_2 h_2$, и вихрем, интенсивностью $\omega_1 + \omega_2$. Поскольку h_1 и h_2 – малые величины, на больших расстояниях поля функции тока и скоростей определяются величиной вихря, но диполь доминирует для ближнего поля. Такой подход особенно интересен в случае вихрей разного знака. Такая модель может быть использована для любой вихревой пелены, которая образуется, как результат слияния двух пограничных слоев. Значения h_1 и h_2 для вихревой пелены могут быть точно определены только после полного расчета пограничных слоев. Фактически предложенная конструкция в первом приближении принимает во внимание влияние вязких эффектов на отрывающийся вихревой след. Предпочтительнее определять уменьшение интенсивности диполя и скорость вращения оси диполя из анализа вязкого течения, но для быстрых процессов, например, распад вихревой пелены и сильное взаимодействие вихрей вблизи тела, величина диполя может считаться постоянной. Введение диполей существенно меняет поле скоростей вблизи сингулярности. В результате комбинированная дипольно-вихревая пелена распадается на замкнутые вихревые структуры, которые более устойчивы, чем спиральные структуры, в которые сворачивается чисто вихревая пелена. Действительно, если разность между интенсивностями пограничных слоев мала, то чистая вихревая пелена может сворачиваться в спираль достаточно долго, и вихревая спираль будет оставаться устойчивой в течение достаточно долгого времени, что не соответствует экспериментальным данным о неустойчивости следа. В то же время распад вихревого следа на кольцевые дипольно-вихревые структуры при использовании предложенной дипольно-вихревой модели происходит быстро и не зависит от условий устойчивости образующейся вихревой структуры.

3. Результат

На рис. 1 п...
разного знака,
относительно
системе цилинд

На рис. 2 п...
вихревые стру...
симметричные
цилиндра. Как...
отношению к си

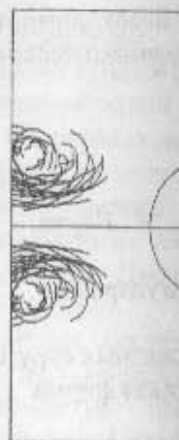


Рис.2. Траектории
знака, в различные

3. Результаты расчетов

На рис. 1 представлены траектории движения двух дискретных вихрей разного знака, в начальный момент времени расположенных симметрично относительно обтекаемого цилиндра. Какое-либо внешнее по отношению к системе цилиндр – дискретные вихри движение отсутствует.

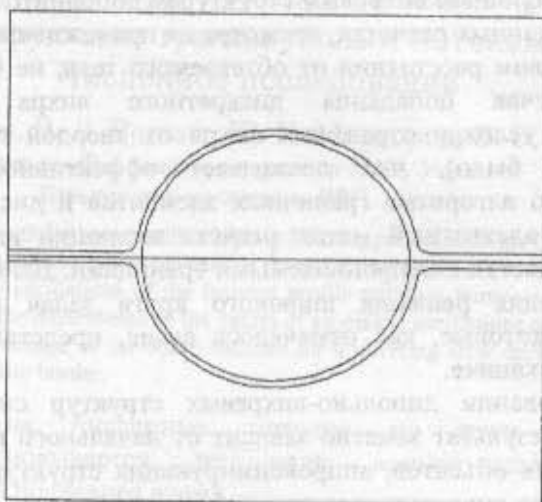


Рис. 1.

На рис. 2 представлены траектории дискретных вихрей, образующих две вихревые структуры разных знаков, в начальный момент времени симметричные и расположенные симметрично относительно обтекаемого цилиндра. Как и в случае, показанном на рис. 1, какое-либо внешнее по отношению к системе цилиндр – вихревые структуры движение отсутствует.

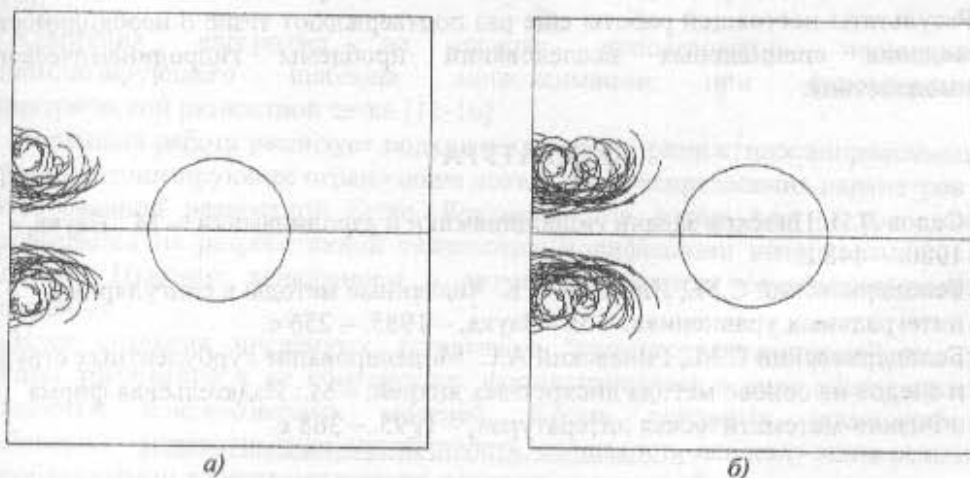


Рис. 2. Траектории дискретных вихрей, образующих вихревые структуры разного знака, в различные последовательные моменты времени (а – г)

4. Выводы

Эволюция вихревых структур при обтекании непроницаемых контуров, пример которой представлен на рис. 2, заметным образом отличается от эволюции вихревых структур в неограниченной жидкости [3,7,11], во-первых, вихревая структура заметно вытягивается в направлении движения, во-вторых, обтекаемое тело сообщает вихревым структурам дополнительную скорость.

Во всех проведенных расчетах, несмотря на прохождение вихревых структур на достаточно малом расстоянии от обтекаемого тела, не было зафиксировано ни одного случая попадания дискретного вихря внутрь цилиндра (принудительное условие отражения вихря от твердой стенки в программе реализовано не было), что доказывает эффективность предложенного комбинированного алгоритма граничных элементов и дискретных вихрей. То есть, предложен адекватный метод расчета эволюции вихревых структур в многосвязных областях с непроницаемыми границами. Данный алгоритм может быть применен для решения широкого круга задач гидродинамического взаимодействия, которые, как отмечалось выше, представляют несомненный интерес в гидромеханике.

При моделировании дипольно-вихревых структур системой дискретных вихрей-диполей результат заметно зависит от начального взаиморасположения дипольно-вихревых объектов, аппроксимирующих структуру, но, в целом, для эволюции дипольно-вихревых структур наблюдаются те же закономерности, что и для чисто вихревых структур.

Очевидными направлениями развития данной работы являются увеличение числа вихревых структур, включение в рассмотрение внешнего потока, переноса вихревых структуры, и усложнение формы области до уровня сложности областей реально встречающихся в авиационной и ракетно-космической техники. Кроме того, было бы крайне желательно рассмотреть аналогичные задачи при более сложной модели завихренности.

Результаты настоящей работы еще раз подтверждают тезис о необходимости проведения специальных исследований проблемы гидродинамического взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, – 1980. – 448 с.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, – 1985. – 256 с.
3. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», – 1995. – 368 с.

Серія «Математика»

УДК 517:518

Ста

пу

В. А. П

И

Monotone
gas equati
steady air-
We empha
and mome
through th

Введение. Р
эффективности
сформировавши

Особенности
способность ул

на достаточно г

1. Адаптивни
выполнить неск

Адаптация з

фиксированном
[1-10].

Адаптация

монотонизирую

геометрической

Настоящая ра

через монотониз

фиксированной

основывается на

полинома Ньют

управления.

Идея создан

важных требова

разработки кон

требований - апп

с необходимыми

(полная консерва

исходной задачи

независимы, но

представляется в