

## Метод дискретных особенностей в волновом анализе модели гиротрона

Ю. В. Гандель, Г. И. Загинайлов, С. А. Степенко

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина  
Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Украина*

A new approach to the solution of spectral problem for gyrotron with longitudinal corrugations is developed. This approach is based on strict statement of boundary value problem for Maxwell equations, its reducing to singular integral equation, which is numerically analysed with use of the method of discrete singularities. The offered method is applicable in any frequency band for arbitrary size corrugations.

### 1. Введение

В последнее время появился ряд работ, посвященных анализу коаксиального гиротрона с гофрированной вставкой [1,2]. В них используется упрощенная модель поверхностного импеданса, согласно которой поле внутри щелей считается однородным, и собственные значения определяются из некоторых трансцендентных уравнений. При использовании такого подхода переход к высоким частотам может привести к значительным вычислительным ошибкам.

В этой работе использован новый подход к волновому анализу гиротронов такого типа в строгой постановке задачи. Он основан на постановке краевой задачи для уравнений Максвелла и учитывает все гармоники поля. Предложенный метод применим в любом диапазоне частот при произвольных размерах гофров.

### 2. Постановка задачи

Проблема определения магнитных мод гиротрона приводит к граничной задаче для однородного уравнения Гельмгольца в поперечном сечении устройства (рис. 1)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + (\chi/R_0)^2 H_z = 0$$

с однородными условиями Неймана на стенках. Здесь  $\chi = R_0 \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \Gamma^2}$  – безразмерный частотный параметр,  $\Gamma$  – постоянная распространения,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Кроме того, должно выполняться условие на ребре (условие конечности энергии в любой ограниченной области).

Собственные значения определяются как значения безразмерного поперечного волнового числа  $\chi$ , при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи.

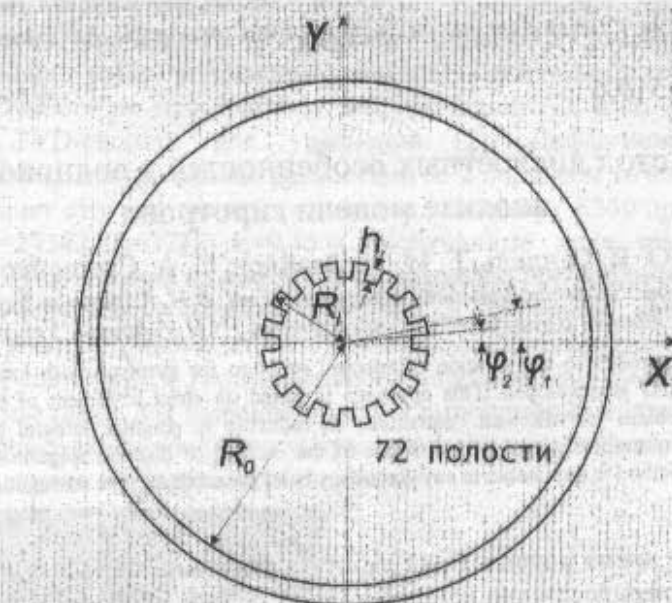


Рис. 1. Сечение гиротрона

### 3. Интегральные уравнения задачи

Используя параметрические представления сингулярных интегральных преобразований, получаем интегральное уравнение с логарифмической особенностью в ядре:

$$\int_{-\varphi_2}^{\varphi_2} [K_m^{(1)}(\varphi - \theta) - K_m^{(2)}(\varphi - \theta) - K_m^{(2)}(\varphi + \theta + 2\varphi_2)] F(\theta) d\theta = 0.$$

Здесь  $m=0, \dots, N-1$  – азимутальный индекс искомой моды,  $F(\varphi) = \frac{\partial H_z}{\partial r}(R_1, \varphi)$

– неизвестная функция,

$$K_m^{(1)}(x) = \frac{1}{2\varphi_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{m+nN}(x, x/C) e^{i(m+nN)x},$$

$$K_m^{(2)}(x) = \frac{1}{2\varphi_2} \left[ \frac{1}{2} W_0(x/C', x/C) + \sum_{n=1}^{\infty} W_{\xi_n}(x/C', x/C) \cos(\xi_n x) \right],$$

$$C = R_0/R_1, \quad C' = R_0/(R_1 - h), \quad \xi_n = n\pi/2\varphi_2,$$

$$W_\nu(a, b) = (J'_\nu(a)Y_\nu(b) - Y'_\nu(a)J_\nu(b)) / (J'_\nu(a)Y'_\nu(b) - Y'_\nu(a)J'_\nu(b)).$$

Как известно, непосредственное решение интегрального уравнения с логарифмической особенностью – сложная вычислительная задача. Поэтому предлагается продифференцировать это уравнение и получить сингулярное уравнение первого рода. Дополнительное условие для выделения единственного

решения может быть логарифмической осе

### 4. Алгоритм нахождения

Для решения дополнительным условием являются особенности [3]. Так как эксперименты, достигающие точности, учитывающей точность квадратурные формулы Якоби. В работе [4] модели – системы линейных систем зависят от собственных значений. Для использования метода нахождения собственных значений

### 5. Численные результаты

Для демонстрации вычисления собственных значений реального гиротрона на одном из сечений  $\varphi_2 = 35\pi/(66N)$ . Результаты вычисления особенностей. Во втором случае учета точного поведения дискретизации, т.е. с точностью до  $1e-7$ .

Таблица 1.

Результаты вычисления особенностей

n	X <sub>31,17</sub>
1	94,63
2	94,64
3	94,64
4	94,64
5	94,64
10	94,64
20	94,64
30	94,64
40	94,64

решения может быть получено интегрированием исходного уравнения с логарифмической особенностью.

#### 4. Алгоритм нахождения собственных значений

Для решения полученного сингулярного интегрального уравнения с дополнительным условием предлагается использовать метод дискретных особенностей [3]. Такой подход максимально прост и, как показали численные эксперименты, достаточно эффективен. Возможен и другой подход, учитывающий точное поведение поля в окрестности ребер. Он использует квадратурные формулы интерполяционного типа с узлами в нулях полиномов Якоби. В работе [4] построены соответствующие дискретные математические модели – системы линейных алгебраических уравнений. Элементы матриц этих систем зависят от спектрального параметра  $\chi$ , что позволяет определять собственные значения как нули детерминанта матрицы. Для этого удобно использовать метод сингулярного разложения, позволяющий одновременно находить собственные колебания.

#### 5. Численные результаты

Для демонстрации работы предложенных методов приводим результаты вычисления собственного значения  $\chi$ , соответствующего рабочей моде  $TE_{31,17}$  реального гиротрона Forschungszentrum Karlsruhe [5]. Параметры соответствуют одному из сечений гиротрона:  $N=72$ ,  $R_0=26.38425$ ,  $R_f=7.71946$ ,  $h=0.45$ ,  $\varphi_2=35\pi/(66N)$ . Результаты в первой таблице были получены методом дискретных особенностей. Во второй таблице представлены результаты, полученные при учете точного поведения поля вблизи ребер. Здесь  $n$  – число точек дискретизации, т.е. размер матрицы. Матричные элементы вычислялись с точностью до  $1e-7$ .

Таблица 1.

Результаты вычисления собственного значения  $\chi_{31,17}$  методом дискретных особенностей

$n$	$\chi_{31,17}$
1	94,632711874
2	94,646576961
3	94,645294198
4	94,645102862
5	94,645022786
10	94,644937760
20	94,644923566
30	94,644921730
40	94,644921225

Таблица 2.  
Результаты вычисления собственного значения  $\chi_{31,17}$  вторым способом

$n$	$\chi_{31,17}$
1	94,632711874
3	94,644915529
4	94,644907864
5	94,644912573
6	94,644917864
7	94,644918747
8	94,644919839
9	94,644920050
10	94,644920361

Начиная с некоторого  $n$ , значения в первой таблице убывают, оставаясь больше значений в первой таблице. А значения во второй таблице с ростом  $n$  наоборот возрастают. Таким образом, одновременно используя оба подхода, мы можем получать нижнюю и верхнюю оценки для искомого спектрального параметра. На рис. 2 представлен график для азимутальной компоненты напряженности электрического поля вдоль радиуса гиротрона, проходящего через середину щели.

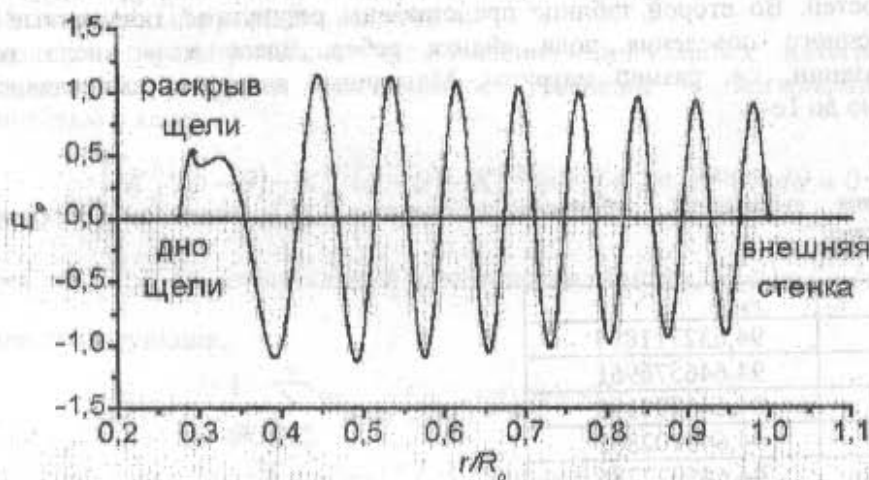


Рис. 2.  $E_\varphi$  вдоль радиуса гиротрона.

Новые результаты отличаются от результатов, полученных с использованием модели поверхностного импеданса. При этом, как показано в [6], при изучении конкуренции мод для гиротрона, создаваемого в рамках проекта ITER, эти различия значительны.

1. Iatrou C.T., Ke conductor for g – pp. 56-64.
2. Barroso J.J., Co corrugated inne Theory Tech. –
3. Гандель Ю.В. Вопросы кибер
4. Гандель Ю.В., аналитический Радиопизика и
5. Iatrou C.T., Bra 165-GHz, 1.5-M Plasma Sci. – 1
6. Dumbrajs O., G gyrotron cavity Waves, San-Die



## ЛИТЕРАТУРА

1. Iatrou C.T., Kern S., Pavelyev A.B. Coaxial cavities with corrugated inner conductor for gyrotron // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1996. – vol. 44. – pp. 56-64.
2. Barroso J.J., Corrêa A.C., Castro P.J. Gyrotron coaxial cylindrical resonators with corrugated inner conductor: theory and experiment // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1998. – vol. 46. – pp. 1221-1230.
3. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – М.: Изд. АН СССР, 1986. – ВК-124. – С. 166-183.
4. Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стещенко С.А. Новый численно-аналитический метод волноводного анализа коаксиального гиротрона // Радиофизика и электроника. – 2002. – Т. 7, Спец. вып. – С. 196-207.
5. Iatrou C.T., Braz O., Dammertz G., et. al. Design and experimental operation of a 165-GHz, 1.5-MW, coaxial-cavity gyrotron with axial RF output // IEEE Trans. Plasma Sci. – 1997. – vol. 25. – pp. 470-479.
6. Dumbrajs O., Gandel Y.V., Zaginaylov G.I. Full wave analysis of coaxial gyrotron cavity with corrugated insert // 27th Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves, San-Diego. – 2002. – pp. 185-186.