

Вычислительный эксперимент на базе численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для прямоугольной области

А. В. Гахов, В. О. Мищенко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Our Ada program for numerical solution of hypersingular integral equations (HSIE) for rectangular areas is based on the well-known modern approach that generalizes the hydrodynamic method of closed vortex frames. We demonstrated the applicability of the computer-based experiment on the basis of such an algorithm for the solution of real problems by the example of the approximate factorization of density potential of a double layer for oblong regions. When computer-based modeling under conditions of scarce resources is the method used for the solution of the problem, it is possible to apply the developed definition of the problem, the scheme of computations planning as well as the analysis of their results in diffraction problems and other applications.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Современный вычислительный эксперимент должен опираться на строгое математическое обоснование для модельных частных случаев, а в более сложных ситуациях использовать выверенное с той же строгостью программное обеспечение для чисто экспериментальных исследований на компьютере [1].

Этим требованиям вполне удовлетворяли вычислительные эксперименты на базе методов дискретных особенностей (МДО) в двумерных задачах [2-5].

Прогресс в исследовании гиперсингулярных интегральных уравнений (ГСИУ) на поверхностях в 3-мерном пространстве [5-8] делает актуальным поиск схем вычислительного эксперимента, сочетающих обоснованность их плана с возможностью проведения в условиях ресурсных ограничений.

К решению ГСИУ определения плотности для потенциала двойного слоя на поверхности в 3-мерном пространстве приводят важные задачи гидродинамики и дифракции [5-8]. Например, в акустическом случае задача рассеяния плоской волны на твёрдом бесконечно тонком экране Σ , то есть внешняя краевая задача Неймана уравнения Гельмгольца с условиями излучения на бесконечности (и условием Майкснера на ребре экрана, если оно имеется), может решаться [6,8] методом отыскания плотности $g(M)$, $M \in \Sigma$ из уравнения вида

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_{M_0}} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_M} \left(\frac{e^{ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) \cdot g(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in \Sigma \quad (1)$$

в подходящем классе функций. Здесь $f(M_0)$ определяется по падающему полю, $r_{MM_0} = |\vec{r}_{MM_0}| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$, ν_M, ν_{M_0} — орты внешней нормали к экрану в точках $M(x, y, z), M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$. Для достаточно

гладкой Σ дифференцируя его как гиперповерхность области

$$\Sigma = [-0$$

и f , которая соответствует

2. Истоки исследования

Настоящая работа обеспечивает сходимость ГСИУ в определённой области достаточно гладкой области приближенных решений

3. Нерешенные проблемы

Однако на тестовых численных решениях (ГСИУ) по крайней мере, «удовлетворительного» требуется разбиение по тактовой частоте программы решения ГСИУ для экспериментов для решения таких расчётов рассматриваемого вида программной реализации вычислений решающей Алголе или Фортране коллективного исправления программ, гарантирующей данных алгоритмов.

Поэтому целями нас

- разработка на языке программы на публикуемой ч...
- разработка и реализация ограниченных плотностей $g(M)$

4. Используемый метод

Необходимая для пр...

исходной области вида

прямоугольников разби...

гладкой Σ дифференцирование по V_{M_0} можно внести под знак интеграла, трактуя его как гиперсингулярный. В наших численных экспериментах берётся область

$$\Sigma = [-0.5, 0.5] \times [0, 1] \quad (2)$$

и f , которая соответствует нормально падающей плоской волне вдоль $-e_z$.

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на метод [5-8] дискретизации ГСИУ типа (1), обеспечивающий сходимость приближенных решений к точному решению ГСИУ в определённых метриках, как для разомкнутой, так и для замкнутой достаточно гладкой области Σ [8]. Подтверждается и практическая сходимость приближенных решений в вычислительном эксперименте [7-10].

3. нерешенные проблемы и цели работы

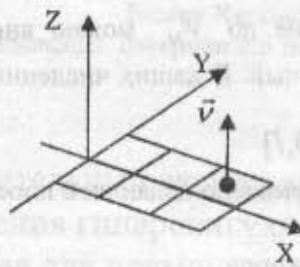
Однако на тестовых примерах [7] видно, что достижение точности численного решения (1) порядка 2% даже при $k = 0$ требует разбиения области, по крайней мере, на 30×30 ячеек. Согласно оценок [9-10] для «удовлетворительного результата», например при $k = 8\pi$, в нашем случае требуется разбиение примерно на 18×18 ячеек. На персональном компьютере, тактовая частота процессора которого 1.2-1.7 ГГц, время расчёта одного решения ГСИУ для 31×31 ячеек составляет 15-25 мин. Вычислительные эксперименты для решения научных и прикладных задач требуют, как минимум, сотен таких расчётов. Другая проблема: алгоритмы решения ГСИУ рассматриваемого вида авторами публикаций [6-10] описаны, но без деталей программной реализации. Между тем, в судьбе классических методов вычислений решающую роль сыграли публикации реализующих программ на Алголе или Фортране. В результате ревизии их кода специалистами и коллективного исправления ошибок сложились стандартные версии этих программ, гарантирующие определённые выгоды прикладникам при выборе ими данных алгоритмов.

Поэтому целями настоящей работы являются:

- разработка на основе рассматриваемого метода решения ГСИУ программы на языке Ада, реализующей описанный в статье алгоритм и публикуемой через Internet в исходном коде
- разработка и реализация схемы вычислительного эксперимента при ограниченных ресурсах на примере исследования разложимости плотности $g(M) = g(x, y)$ на множители $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

4. Используемый метод решения ГСИУ и его программная реализация

Необходимая для приближенного решения (1) дискретизация $\Sigma = \bigcup_{m=1}^{M_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} \Sigma_{mj}$ исходной области вида $\Sigma = [a_y, b_y] \times [a_x, b_x]$ определяется угловыми точками прямоугольников разбиения Σ_{mj} :

Рис. 1. Область Σ .

$$M_{mj} = \left(a_x + \frac{b_x - a_x}{N_x} (m-1), a_y + \frac{b_y - a_y}{N_y} (j-1) \right), m = 1..N_x, j = 1..N_y$$

С центрами этих прямоугольников

$$M_0^{mj} = \left(a_x + \frac{b_x - a_x}{N_x} (m - 1/2), a_y + \frac{b_y - a_y}{N_y} (j - 1/2) \right), m = 1..N_x, j = 1..N_y \quad (3)$$

связем искомые значения плотности $g_{mj} = g(M_0^{mj})$. Полагая, как в [5-10], $g(M)$ при $M \in \Sigma_{mj}$ приближенно постоянным, превращаем (1) в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно этих констант:

$$\sum_{m=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} g_{mj} \cdot \int_{\Sigma_{mj}} \frac{\partial}{\partial v_M} \frac{\partial}{\partial v_{M_0^l}} \left(\frac{e^{ikr_{MM_0^l}}}{r_{MM_0^l}} \right) ds_M = f(M_0^l), l = 1..N_x, s = 1..N_y \quad (4)$$

Использование формулы типа Стокса [6] позволяет, преобразовать гиперсингулярные интегралы

$$\int_{\Sigma_{mj}} \frac{\partial}{\partial v_M} \frac{\partial}{\partial v_{M_0^l}} \left(\frac{e^{ikr_{MM_0^l}}}{r_{MM_0^l}} \right) ds_M$$

в (4) к виду где остаются только контурные интегралы от непрерывных функций по $\partial\Sigma_{mj}$ и интегралы по Σ_{mj} :

$$-k^2 \int_{\Sigma_{mj}} \frac{e^{ikr_{MM_0^l}}}{r_{MM_0^l}} ds_M - ik \oint_{\partial\Sigma_{mj}} (\vec{dl} \times \vec{v}) \cdot \frac{\vec{r}_{MM_0^l}}{r_{MM_0^l}^2} e^{ikr_{MM_0^l}} + \oint_{\partial\Sigma_{mj}} (\vec{dl} \times \vec{v}) \cdot \frac{\vec{r}_{MM_0^l}}{r_{MM_0^l}^3} e^{ikr_{MM_0^l}} \quad (5)$$

В последних, если и есть особенность ($m=l, j=s$), то она устраняется переходом к полярным координатам. Для формирования матрицы СЛАУ (4) эти интегралы вычисляются по формулам Симпсона (для отрезков и для прямоугольников) с оценкой погрешности методом Рунге (см., напр., [11]).

При надлежащей индексации матрица СЛАУ (4) для приближенного решения ГСИУ имеет «блочнo-трёхдиагональное» преобладание. Поэтому используемый при решении (4) метод Гаусса вычислительно устойчив.

Описанный алгоритм приближенного решения (1) реализован на языке программирования Ада (главная программа - Diffraction_On_Rectangle) с

вычислением графики рассеянной волны. Отладка-тестирование системы www.act.org

По методу, согласно которому рассчитаны общая программа программированию тенденцией, выявленной усложнения задач, усовершенствования структурой, интерфейсом A , зависящее $PHd = 1000b \cdot symbol$

5. План экспериментов

Для эксперимента решения (1) для прямой $g(x, y) \approx \phi(l)$ целесообразно решать $l = 2.5, 5.0$

Результат эксперимента равенства (6) с ростом l выяснять, будет ли l нормированный) численности. Если и эту гипотезу мы попытаемся выяснить, периодической с периодом

Ограничение на $N_x \cdot N_y < C$

В экспериментах с $N_y = n, N_x = n$

Поэтому, задав диапазон $\pi \leq k \leq 8\pi$,

мы предварительно вычисляем, на котором приближенно частного случая - квадрат

величины $\Lambda_{m,n} = |g_n(x)$

возрастании m до n и

вычислением графиков комплексной плотности g , диаграмм направленности рассеянной волны (Main_Calc_Diagram) и их визуализацией (Draw_Plot). Отладка-тестирование производились с помощью распространяемой через сайт www.act.org системы Ада-программирования GNAT (ACT) под Windows 9x/NT.

По методу, согласованному с [12,13], для этой программной реализации рассчитаны общая спецификационная энергия $E = 67\text{kHd}$ и работа по программированию $A = 3.6\text{kHd}$. Эти значения находятся в согласии с тенденцией, выявленной в [13] по выборке дипломных работ. А именно, по мере усложнения задач, решаемых методами дискретных особенностей, и усовершенствования их программного обеспечения величина E , определяемая структурой, интерфейсом и методом разработки программ [13], растёт быстрее, чем A , зависящее в основном от объёма программного кода. Единица $1\text{Hd} = 1000b \cdot \text{symbol}$ была предложена в [12] в честь М. Холстеда [12].

5. План экспериментов и оценка точности численного решения ГСИУ

Для экспериментального выяснения возможности и точности представления решения (1) для прямоугольной Σ (2) при «больших» l в виде

$$g(x, y) \approx \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad (6)$$

целесообразно решать (1) для значений l , образующих прогрессию, например,

$$l = 2.5, 5.0, 10.0, \quad (7)$$

Результат эксперимента следует признать положительным, если точность равенства (6) с ростом l будет увеличиваться. Тогда можно попытаться выяснить, будет ли при фиксированном y множитель $\psi(y) = \psi(y; l)$ (как-то нормированный) численно стремиться к некоторому пределу $\Psi(y)$ при $l \rightarrow \infty$. Если и эту гипотезу можно будет признать обоснованной, то далее естественно попытаться выяснить, стремиться ли численно функция $\varphi(x)$ при $l \rightarrow \infty$ к периодической с периодом, соответствующим величине $k/2\pi$.

Ограничение на потребление вычислительных ресурсов зададим в форме:

$$N_x \cdot N_y < C = 1024 \quad (8)$$

В экспериментах с удлинением области

$$N_y = n, \quad N_x = l \cdot n \Rightarrow l < C/n^2 \quad (9)$$

Поэтому, задав диапазон для волнового числа в экспериментах как

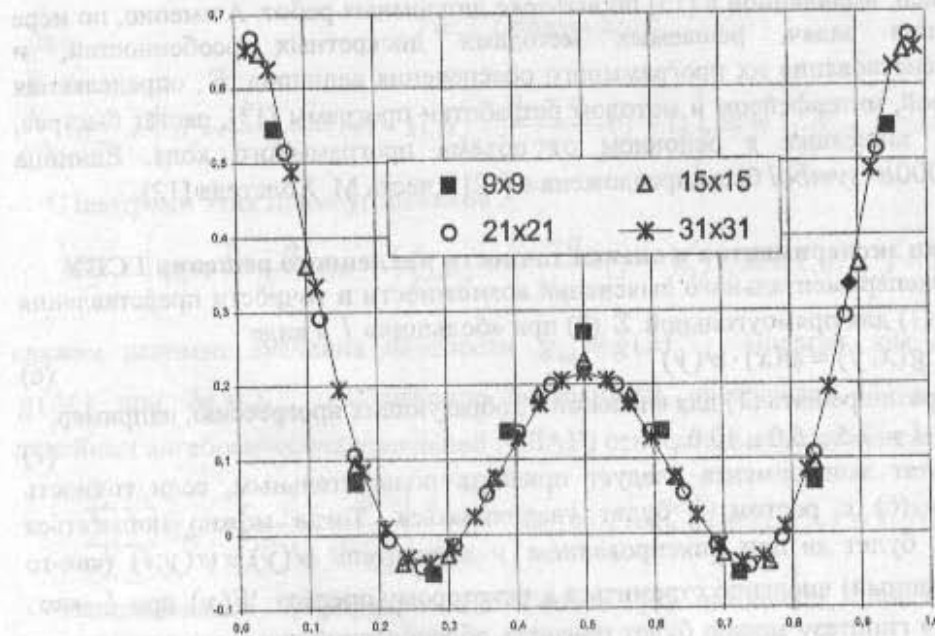
$$\pi \leq k \leq 8\pi, \quad (10)$$

мы предварительно выясняли минимальное зависящее от k значение n , при котором приближенное решение (1) можно считать «приемлемым», исходя из частного случая - квадратной области ($l = 1, N_x = N_y = n$). Характер убывания величины $\Lambda_{m,n} = |g_n(x, y) - g_m(x, y)|$, где $n = 31$ - максимальное (см.(8)) при возрастании m до n иллюстрирует Табл.1.

Табл. 1. Пример «практической сходимости» при $k = 4\pi$, $x = 0.5$, $y = 0$.

m	7	9	15	21	29
$\Lambda_{m,31}$	0,09775	0,05707	0,02018	0,00867	0,001252

Проводилась визуализация численной сходимости с ростом m «по форме». Так

Рис. 2. Графики $f_m = f_m(x_h)$ при $k = 4\pi$ ($m = 9, 15, 21, 31$)

на Рис. 2 даны графики $f_m(x_h) = \text{Im } g_m(x_h, 0)$ ($x_h = \frac{h-1/2}{n}$) при $k = 4\pi$ (для

$\text{Re } g_m$ сходимость лучше). Видим, что с некоторого $m = n$ значения $f_m(x_h)$ лежат «практически» на одной кривой, интерполирующей $f_{31}(x_h)$. Для «приемлемости» n важно также, чтобы кривая, интерполирующая $f_n(x_h)$ была выпукла вверх на концах $x = 0, x = 1$. Окончательный выбор n указан в Табл. 2.

Табл. 2. Минимальные n , при которых g_n «приемлемо» в экспериментах

k	π	2π	3π	4π
n	5	10	15	20

6. Вычислительный эксперимент: обоснование алгоритмов и реализация

На Рис. 3 дан график модуля комплексной функции плотности g , полученной численным решением (1) с помощью программы, описанной выше в разделе 4. Этот и другие рисунки (просматривались также графики вещественной и

мнимой частей) показаны на Рис. 3 в увеличенном масштабе (по оси абсцисс и ординат) для

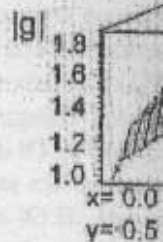


Рис. 3. График

Произвол в выборе комплексной постоянной α (при условии на модуль $|\alpha|$ от величины!).

Неравенство Коши (в приближенной фактической приложениях и имеющей минимизировать функцию

$$F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$$

где в качестве переменных

нормировочная константа N уравнений для стационарных значений модуль комплексного

$$\sum_{i=1}^N |\psi_i|^2$$

превратим часть уравнений

$$\text{Re } \varphi_j =$$

$$\text{Im } \varphi_j =$$

Остается для одной из

$$\text{Im } \psi_{i_0} =$$

и придать остальным

мнимой частей) показывает, что факторизация (6) возможна даже при малом удлинении l .

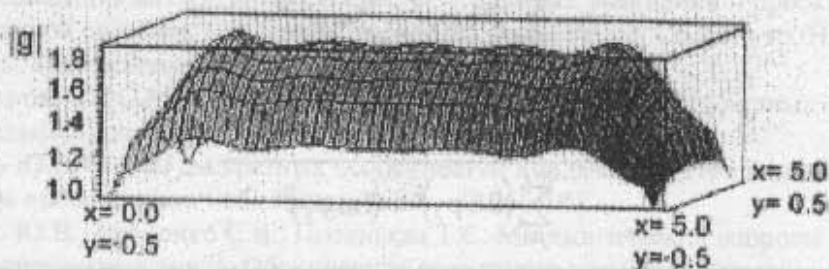


Рис.3. График модуля рассчитанной плотности $|g(x, y)|$ при $k = 2\pi$

Произвол в выборе сомножителей ограничивается умножением-делением на комплексную постоянную. Его можно ликвидировать выбором двух условий: условия на модуль одной величины и условия на аргумент (в общем, другой величины!).

Неравенство Коши даёт оценку погрешности при замене решения (1) g приближенной факторизацией (6) в интегралах, которые возникают в приложениях и имеют регулярные ядра. Из этой оценки вытекает, что следует минимизировать функционал метода наименьших квадратов:

$$F = \frac{c}{N_x N_y} \sum_{i,j} |g(M_{ij}^y) - \psi_i \cdot \varphi_j|^2 \quad (11)$$

где в качестве переменных берём $\text{Re } \varphi_j, \text{Im } \varphi_j, \text{Re } \psi_i, \text{Im } \psi_i$, $c = 1/g(0, l/2)^{-2}$ нормировочная константа. Для численной минимизации F рассмотрим систему уравнений для стационарных точек этого функционала. Выбирая условие на модуль комплексного вектора

$$\sum_{i=1}^{N_y} |\psi_i|^2 = 1, \quad (12)$$

превратим часть уравнений в выражения для исключения части неизвестных:

$$\text{Re } \varphi_j = \sum_i \text{Re } g_{ij} \cdot \text{Re } \psi_i + \text{Im } g_{ij} \cdot \text{Im } \psi_i, \quad j=1..N_x$$

$$\text{Im } \varphi_j = \sum_i \text{Im } g_{ij} \cdot \text{Re } \psi_i - \text{Re } g_{ij} \cdot \text{Im } \psi_i, \quad j=1..N_x \quad (13)$$

Остаётся для однозначности потребовать (условие на аргумент!), чтобы

$$\text{Im } \psi_{I_0} = 0 \quad (I_0 = \left[\frac{N_y + 1}{2} \right]) \quad (14)$$

и придать остающимся уравнениям вид, подходящий для простых итераций:

$$\operatorname{Re} \psi_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \operatorname{Re} g_{ij} \cdot \operatorname{Re} \varphi_j + \operatorname{Im} g_{ij} \cdot \operatorname{Im} \varphi_j}{\sum_{j=1}^{N_x} (\operatorname{Re} \varphi_j)^2 + (\operatorname{Im} \varphi_j)^2}, \quad i=1..N_y$$

$$\operatorname{Im} \psi_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \operatorname{Im} g_{ij} \cdot \operatorname{Re} \varphi_j - \operatorname{Re} g_{ij} \cdot \operatorname{Im} \varphi_j}{\sum_{j=1}^{N_x} (\operatorname{Re} \varphi_j)^2 + (\operatorname{Im} \varphi_j)^2}, \quad i=1..N_y \quad (15)$$

Тестирование вытекающего отсюда алгоритма показывает, что, если приближенная факторизация возможна, то бывает достаточно и одной итерации.

Для численно найденных для (6) приближений $\{\varphi_j\}, \{\psi_i\}$ критерий F (11) не превышает $4.2E-06$ даже для квадратных областей. Для областей с удлинением от 2.5 заметна тенденция к уменьшению критерия примерно в 4 раза при двукратном удлинении области. При фиксированном k с ростом удлинения области множитель $\psi_i = \psi_i(k)$ численно стремится к некоторому пределу даже при $i = I_0$, где это происходит наиболее медленно: см. табл.3 (напомним, что ψ_{I_0} вещественно, см. (14)).

Табл. 3. Пример "численной сходимости" множителя ψ ($k = 2\pi, y = 0$)

l	1.0	2.5	5.0	10.0
$\psi(0.0)$	7.37E-02	7.09E-02	6.82E-02	6.89E-02

Для численной проверки функции $\varphi(x)$ на периодичность при $l \rightarrow \infty$ вытекающее из (8) ограничение на l оказалось непреодолимым препятствием.

Отметим, что экстраполяционная оценка показывает: $\operatorname{Re} \psi(y)$ при $y = \pm 0.5$ обращается в ноль, так что при $l \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re} \Psi(-0.5) = \operatorname{Re} \Psi(0.5) = 0$.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Исходные тексты программы `Diffraction_On_Rectangle` и вспомогательных к ней доступны на сайте www.dsm.com.ua. Поэтому все утверждения о ней и проведенные вычислительные эксперименты доступны для проверки наравне с используемыми математическими фактами статьи. Показано, что для ГСИУ 3-мерной задачи дифракции при нормально падающей плоской волне даже при суровых ограничениях на число ячеек дискретизации возможно качественное исследование решения (факторизуемость (6)). Дан и пример, когда близкое по смыслу исследование невозможно. В дальнейшем можно искать рациональные средства преодоления ресурсных ограничений. А также сравнить результаты настоящей работы по факторизации с численными решениями 2-мерных ГСИУ, которые выводятся для дифракции на сильно вытянутых плоских экранах.

1. Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Электродинамика и программная система. Ин-т математики Украины. Ин-т математики Украины.
2. Белоцерковский С. Интегральные уравнения.
3. Гандель Ю.В. Методы решения. Вопросы кибернетики.
4. Гандель Ю.В., Ерёмов В.И. Метод дискретных элементов. Особенности решения. Учебное пособие. Ч. 1.
5. Лифанов И.К. Методы экспериментальной математики.
6. Anfinogenov A. Yu., *planar and spatial diffraction* – 1992. – Vol. 7, N 5.
7. Захаров Е.В., Лифанов И.К. Гиперсингулярные интегральные уравнения вычислительной математики.
8. Вайникко Г.М., Лифанов И.К. Гиперсингулярные интегральные уравнения «Янус-К». – 2001.
9. Антоненко А.В. Методы решения волн на сфере. // Прикладная математика. Львів, 18-21 квітня 2001.
10. Зінченко М.С. Методы акустических волн на конференция з прикладної математики. Львів, 18-21 квітня 2001.
11. Бахвалов Н.С., Жидков И.И., Кутузов Г.П. Численные методы. Наука. – 1987. – 600 с.
12. Холстед М.Х. Начала численного анализа. 1981. – 128 с.
13. Мищенко В.О. Применимость метода дискретных элементов в анализе проекта проволочных решетчатых экранов // Труды Института математики НАН Украины. С.117-120.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Мищенко В.О. Математическое моделирование в электродинамике на базе сингулярных интегральных уравнений и проект программной системы. // Математическое моделирование. Сб. науч. тр./НАН Украины. Ин-т математики. – Киев, 1996. – С.70-74.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, - М.: Наука, 1985. – 256с.
3. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1986. – С.166-183.
4. Гандель Ю.В., Ерёменко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Часть II. – Харьков: Харьк. ун-т, 1992. – 145с.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.
6. Anfinogenov A.Yu., Lifanov I.I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction problems. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 1992. – Vol. 7, N 5, P. 387-404.
7. Захаров Е.В., Лифанов И.К., Лифанов П.И. Численное исследование гиперсингулярного интегрального уравнения на сфере. – М.: Институт вычислительной математики РАН, 2001. – 21с.
8. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – Москва: «Янус-К». – 2001. – 508 с.
9. Антоненко А.В. Метод дискретних вихорів у задачі дифракції акустичних хвиль на сфері. // П'ята всеукраїнська студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2002. Тези доповідей. – Львів, 18-21 квітня 2002 року. – С.30-31.
10. Зінченко М.С. Метод дискретних вихорів у задачі дифракції стаціонарних акустичних хвиль на кубі. // П'ята всеукраїнська студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2002. Тези доповідей. – Львів, 18-21 квітня 2002 року. – С.72-73.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Г.М., Кобельков Н.П. Численные методы. – М.: Наука.- 1987.- 600 с.
12. Холстед М.Х. Начала науки о программах. - М.: Финансы и статистика, 1981. – 128 с.
13. Мищенко В.О. Применение математического моделирования в системном анализе проекта программного обеспечения методом дискретных особенностей // Труды VII Международного «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Феодосия, 1997. – С.117-120.