

Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости

С. А. Калкаманов, В. Ю. Полозюк
Харьковский институт ВВС, Украина

The numerical method of calculation of the viscous incompressible liquid is described, which is based on the solution of the Navier-Stokes equations in the variable "vorticity-velocity". The integral equation, which expresses the attachment conditions on a body surface, was deduced for the determination of the meanings of the boundary vorticity. The examples of the diffusion vorticity modeling and the examples of the plate and sphere streamline calculations are adduced.

Для математического моделирования обтекания поверхности летательных аппаратов потоком жидкости широкое распространение получили методы гидродинамических особенностей, основанные на теории потенциальных течений. Существенным недостатком указанных методов является невозможность описания эффектов, связанных с вязкостью среды. Для учета сил вязкости применяют методы «вязко-невязкого взаимодействия», основанные на совместном решении уравнений движения идеальной жидкости и уравнений пограничного слоя. При таком подходе возникают трудности сращивания решений уравнений движения в различных областях и, в некоторых случаях, несходимость решения в отрывных зонах. Применение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для моделирования обтекания полной компоновки летательного аппарата вязкой жидкостью сопряжено значительными трудностями вычислительного характера. Одним из альтернативных подходов является использование зонального метода, в соответствии с которым в областях течения жидкости применяются различные упрощенные уравнения движения жидкости. При этом, запись уравнений движения жидкости в переменных «завихренность-скорость» позволяет упростить процедуру сращивания решений в различных областях течения. В работе описан численный метод расчета течения вязкой жидкости, основанный на совместном решении уравнений Навье-Стокса в областях значительной завихренности и уравнений потенциального течения в остальных областях.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в переменных «завихренность-скорость» ($\vec{\omega} - \vec{V}$) имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\omega}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{V} = -\nabla \times \vec{\omega}, \quad (2)$$

где ν - кинематическая вязкость.

Система дифференциальных уравнений (ДУ) (1), (2) решается итерационно по времени. Для заданного поля скоростей \vec{V} из решения ДУ (1) определяется поле завихренности. При расчете кинематической части задачи по формуле Био-

Савара определяются новые значения скоростей в новый расчетный момент времени по известным значениям завихренности. Уравнение (1) решалось как методом конечных разностей (КР), так и методом интегральных уравнений (ИУ). На рис. 1 и рис. 2 представлены поля скоростей в расчетной области в момент времени $t=20 \Delta t$ и $t=200 \Delta t$ для задачи диффузии точечного вихря, помещенного в центре расчетной области заполненной несжимаемой жидкостью.

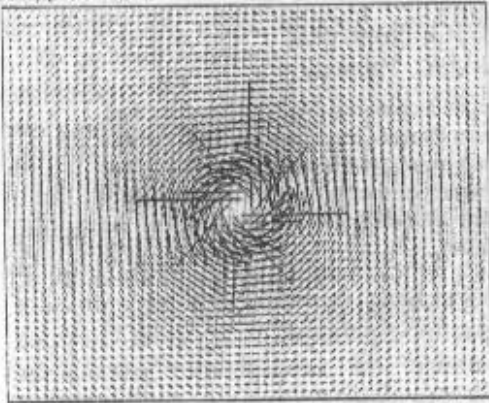


Рис. 1. Поле скоростей при $t=20 \Delta t$

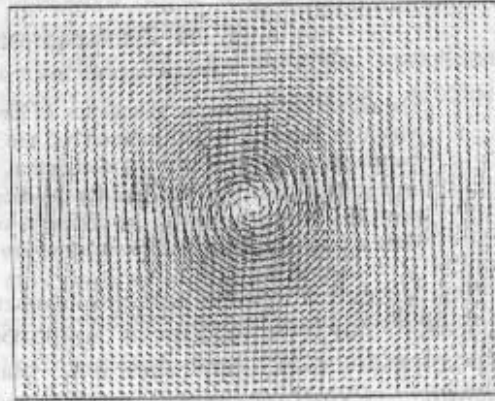


Рис. 2. Поле скоростей при $t=200 \Delta t$

В качестве начальных условий при решении системы уравнений (1) и (2) целесообразно задавать параметры течения, соответствующие обтеканию тела потенциальным потоком идеальной жидкости, являющийся предельным случаем течения жидкости с исчезающей малой вязкостью [2].

Граничное условие для скорости на поверхности тела сводится к условию отсутствия скольжения частиц жидкости (условию прилипания). Определенную трудность представляет задание граничного условия для завихренности на поверхности тела.

В работах [1, 3, 4], посвященных решению уравнений Навье-Стокса в переменных " $\vec{\omega} - \vec{V}$ ", завихренность на поверхности тела - $\vec{\omega}_S$ вычисляется по формуле

$$\vec{\omega}_S = \vec{n} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial n}, \quad (3)$$

которая аппроксимируется односторонними разностями. Было обнаружено [1,3,4], что разностные формулы 1-го порядка точности обеспечивают большую устойчивость численного метода и дают более точное решение, чем формулы 2-го порядка точности.

Рассмотрим процесс генерации завихренности $\vec{\omega}_S$ на поверхности тела S . Пусть в какой-то момент времени t , поле скоростей, индуцированное приграничной завихренностью $\vec{\omega}_S$ и свободной завихренностью (завихренность частиц жидкости, не соприкасающихся с поверхностью тела), удовлетворяет граничным условиям для скорости. По истечению некоторого промежутка времени, завихренность $\vec{\omega}_S$, за счет процессов диффузии и конвекции,

переходит в область завихренности. Поле скоростей и поле завихренности тела и к образованию завихренности [6]. Индуцированная завихренность поле прилипания на S . Завихренности $\vec{\omega}_S$ поверхности тела [завихренности] описывается образованием в некоторой области связь от значений [1,3,4], использующиеся для определения локальных нормали вблизи поверхности $\vec{\omega}_S$ не обеспечивает определение значений завихренности в другой области образования (исчезает) учитывать кинематическое условие S .

В соответствии с векторное поле скорости (потенциального) поля $\vec{V}(P)$

Безвихревая составляющая вектора скорости на поверхности потенциалом возмущения $\vec{V}_n(P)$

Для определения скорости рассмотрим контрольный объем. Обозначим через \vec{r}_S скорость, индуцированную

$\vec{V}(\vec{r}_K)$

Суммарная скорость $\vec{V}(\vec{r}_K)$

переходит в область течения вокруг поверхности тела и становится свободной завихренностью. Перераспределение поля завихренности вызывает изменение поля скоростей и приводит к нарушению условия прилипания на поверхности тела и к образованию нового распределения завихренности по поверхности тела [6]. Индуцированное новыми значениями приграничной и свободной завихренности поле скоростей должно удовлетворять граничному условию прилипания на S . Таким образом, механизм образования (или исчезновения) завихренности $\bar{\omega}_S$ обеспечивается выполнением условия прилипания на поверхности тела [6]. Кинематическая связь между полем скоростей и полем завихренности описывается эллиптическим ДУ (2). Завихренность $\bar{\omega}_{sp}$, образованная в некоторой точке P поверхности S , зависит через кинематическую связь от значений $\bar{\omega}_S$ в других точках поверхности. В численных методах [1,3,4], использующих разностную аппроксимацию формулы (3), значения $\bar{\omega}_S$ определяются локально, по расчетным значениям скорости в узлах сетки по нормали вблизи поверхности тела. Но найденное таким образом распределение $\bar{\omega}_S$ не обеспечивает точного выполнения условия прилипания, так как при определении значения $\bar{\omega}_{sp}$ не учитывается влияние приграничной завихренности в других точках S . Для адекватного моделирования процесса образования (исчезновения) приграничной завихренности, необходимо учитывать кинематическую связь значений $\bar{\omega}_S$ в различных точках поверхности S .

В соответствии с теоремой разложения Гемгольца [5], соленоидальное векторное поле скоростей \vec{V} представим в виде суммы безвихревого (потенциального) поля \vec{V}_Π и вихревого поля \vec{V}_B :

$$\vec{V}(P) = \vec{V}_\Pi(P) + \vec{V}_B(P), \quad (4)$$

Безвихревая составляющая скорости, в общем случае, состоит из суммы вектора скорости набегающего потока и вектора скорости, обусловленной потенциалом возмущенных скоростей φ в начальные моменты времени:

$$\vec{V}_\Pi(P) = \vec{V}_\infty(P) + \nabla\varphi(P), \quad (5)$$

Для определения значения приграничной завихренности введем в рассмотрение контрольную точку на поверхности тела с радиус-вектором \vec{r}_K . Обозначим через \vec{r}_S радиус-вектор точки с приграничной завихренностью $\bar{\omega}_S$. Скорость, индуцированная приграничной завихренностью в точке \vec{r}_K , равна [2]:

$$\vec{V}'(\vec{r}_K) = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\bar{\omega}_S \times (\vec{r}_K - \vec{r}_S)}{|\vec{r}_K - \vec{r}_S|^3} d\Omega \quad (6)$$

Суммарная скорость частиц жидкости на поверхности тела равна:

$$\vec{V}(\vec{r}_K) = \vec{V}_\infty + \vec{V}'(\vec{r}_K) + \nabla\varphi(\vec{r}_K) + \vec{V}''(\vec{r}_K), \quad (7)$$

где $\vec{V}^n(\vec{r}_K)$ - скорость, индуцированная в точке \vec{r}_K свободной завихренностью $\vec{\omega}_\Omega$.

Запишем граничное условие прилипания в следующем виде:

$$\vec{V}(\vec{r}_K) = 0, \quad (8)$$

обеспечивающим отсутствие на поверхности тела как тангенциальной, так и нормальной составляющей скорости.

С учетом выражений (6) и (7), условие (8) запишется в виде

$$\vec{V}_\infty + \vec{V}^n(\vec{r}_K) + \nabla\varphi(\vec{r}_K) + \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\vec{\omega}_s \times (\vec{r}_K - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_K - \vec{r}_s|} d\Omega = 0 \quad (9)$$

Следовательно, значения приграничной завихренности удовлетворяют векторному интегральному уравнению

$$K\vec{\omega}_s = \vec{f}, \quad (10)$$

где $K\vec{\omega}_s, \vec{f}$ - ядро и правая часть, определяемые из выражения (9).

С помощью описанного способа определения значений приграничной завихренности были проведены расчеты обтекания плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для примера, на рисунке 1 приведено поле скоростей в начальный момент времени, соответствующее решению задачи обтекания пластины потенциальным потоком идеальной жидкости. Поле скоростей, соответствующее обтеканию пластины потоком вязкой жидкости (в расчетный момент времени $t=4\Delta t$), приведено на рисунке 2.

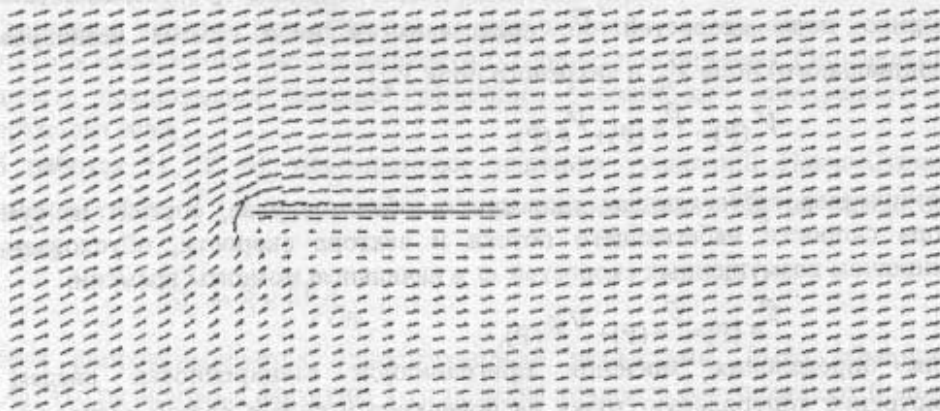


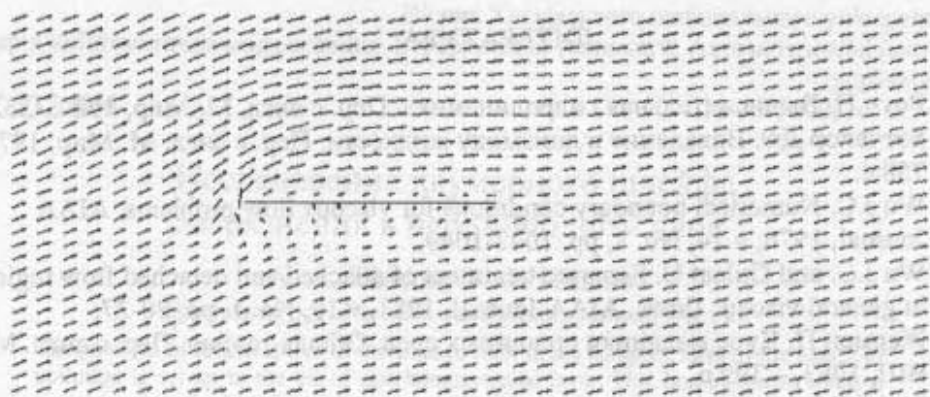
Рис.3. Поле скоростей в начальный момент времени

Анализ приведенного времени течение полн сечения пластины достаточную точность газа.

Были проведены т качестве примера на рисунка) и линии ток

Показанные на ри времени $t = 800 \Delta t$.

Представленные р жидкости. Сравнение расчетным с данным описанного численно численному моделиро жидкости.

Рис.4. Поле скоростей в момент времени $t=4\Delta t$.

Анализ приведенных данных показывает, что на четвертой итерации по времени течение полностью вихревое. Сравнение профиля скоростей в среднем сечении пластины с известными аналитическими решениями показывает достаточную точность численного расчета обтекания пластины потоком вязкого газа.

Были проведены также расчеты обтекания сферы при числах $Re=4...100$. В качестве примера на рис. 5 приведены изолинии завихренности (нижняя часть рисунка) и линии тока (верхняя часть рисунка) при числах $Re=100$.

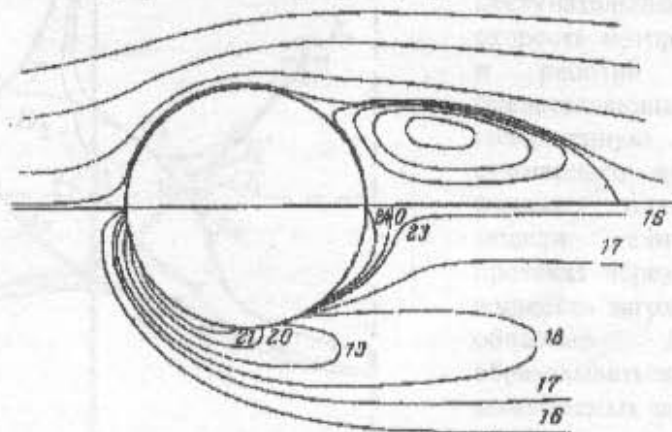


Рис.5. Поле линий тока

Показанные на рисунке линии тока соответствуют расчетному моменту времени $t = 800 \Delta t$.

Представленные результаты относятся к случаю ламинарного течения жидкости. Сравнение результатов численного моделирования опытным и расчетным с данными других авторов показало достаточную точность описанного численного метода. В дальнейшем предполагается перейти к численному моделированию турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Пер. с англ. М.:Мир, 1980. -552 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. Пер. с англ. М.:Мир, 1973. - 758 с.
3. Wu J.C. Numerical boundary conditions for viscous flow problems. AIAA Journal, 1976, v.14, No. 8, pp. 1042-1049.
4. Wu J.C. and Gulcat U. Separate treatment of attached and detached flow regions in general viscous flows. AIAA Journal, 1981, v.19, No. 1, pp. 20-27.
5. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. Пер. с англ. М.: ВШ, 1983. - 399 с.
6. Lighthil 'M.J. Introduction. Boundary layer theory// Laminar boundary layers. New York, Oxford university press, 1963, pp. 54-61.



Рис. 1. План жидкой среды.

Серия «Математич...

УДК 532.546

The problem of pollution is set up... equation of Fred... the problem. Usi... pollution.

1. Проводимые н... водозаборов от загрязн... Пусть область ф... загрязнения, занимаю...

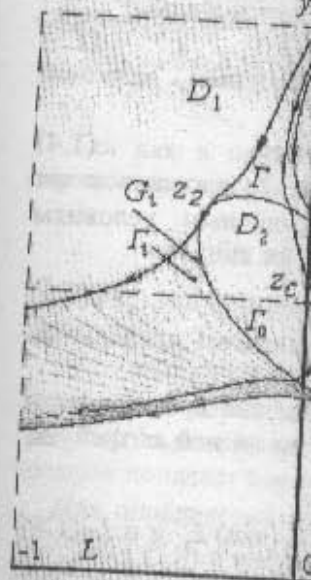


Рис. 1 Картина течения в работающем...

загрязнения $\Gamma - \Gamma_0(\gamma)$ и...

Считаем, что фильтр неоднородном изотропн... линейным законом Дарси...

¹⁾ Работа выполнена при фи...