

## О схемах численной реализации некоторых задач давления системы штампов на упругую полуплоскость

М. В. Лосаберидзе, К. Р. Нинидзе, Г. С. Силагадзе

*Грузинский политехнический университет, Грузия*

*Институт Вычислительной Математики им. Н. И. Мухелишвили АН Грузии, Грузия*

A contact problem on the interaction between a system of two rigid stamps and elastic half-plane is considered. The solution for the various stamps bases equations is given in terms of Cauchy kernel singular integrals and regular integrals. Numerical results are obtained by application of specially written quadratures for MATLAB language

### 1. Постановка задачи

Предположим, что упругая среда занимает нижнюю полуплоскость  $y < 0$  и два штампа, движущиеся с постоянной скоростью, воздействуют на неё. Требуется определить напряженное состояние упругой полуплоскости, т.е. компоненты вектора напряжений\*  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , которые удовлетворяют известным дифференциальным уравнениям движения. При этом

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \sigma_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \end{aligned} \right. \quad (1)$$

здесь  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе,  $u, v$  — компоненты вектора смещений\*. Искомые функции должны удовлетворять упомянутым уравнениям, соотношениям (1), однородным начальным условиям  $\sigma_x|_{t=0} = \sigma_y|_{t=0} = \dots = v|_{t=0}$  и следующим граничным условиям

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, & -\infty < x < \infty, y = 0, \\ \sigma_y &= 0, & x \in I_{(1)}, \\ v &= f_k(x) = const, & x \in I_{(2)}, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

\* Для краткости письма здесь и далее опущены аргументы функций: следует читать  $\sigma_x = \sigma_x(x, y, t)$  и т.д.

где обозначено:  $l_1 = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$ ,  $l_2 = (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, \infty)$ , причем

$$f_k(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a_1, b_1] \\ f_2(x), & x \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

считается, что

второго штампов соответственно.

Введением аналога функции напряжений и переходом к комплексному переменному исходная задача сводится [1] к отысканию двух аналитических функций  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$ , через которые искомые компоненты напряжения выражаются следующим образом

$$\begin{cases} \sigma_x = -2 \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta_1^2 - \frac{1}{2} \beta_2^2 \right) F_1'(z_1) + \frac{1}{2} (1 + \beta_2^2) F_2'(z_2) \right], \\ \sigma_y = (1 + \beta_2^2) \operatorname{Re} [F_1'(z_1) + F_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} = 2 \operatorname{Im} \left[ \beta_1 F_1'(z_1) + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_2^2} F_2'(z_2) \right], \end{cases} \quad (3)$$

где  $z_1 = \xi + i\beta_1\eta$ ,  $z_2 = \xi + i\beta_2\eta$ ,  $\beta_1 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}$ ,  $\beta_2^2 = 1 - \frac{c^2}{c_2^2}$ , а в свою очередь,  $\xi = x - ct$ ,  $y = \eta$ . Под  $c$  подразумевается скорость движения штампов, под  $c_1$  и  $c_2$  скорости распространения продольных и искажённых волн.

Функции  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  должны удовлетворять граничному условию (2), причем условие для  $\tau_{xy}$  дает  $F_2'(z) = -\frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)} F_1'(z)$ . Решение данной задачи, следуя формуле Келдыша-Седова [2], будем искать (в зависимости от действующей системы штампов) в виде (вариант А – штамп и сосредоточенная сила):

$$\begin{aligned} F_1^*(z) &= \frac{\mu(1+\beta_2^2)}{\pi i \beta_1 (\beta_1^2 - 1) g(z)} \left[ \int_{a_1}^b \frac{f_1'(\xi) g(\xi) d\xi}{\xi - z} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1 + \beta_2^2}{[(1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2]} \int_{a_2}^b \frac{g(\xi) g(\xi) d\xi}{\xi - z} \right] + \frac{id_0}{g(z)}, \\ F_2^*(z) &= -\frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_2^2)} F_1^*(z), \quad z = \xi + i\eta, \end{aligned}$$

или в виде (вариант В – два штампа):

$$F_1^*(z) = -\frac{(1 + \beta_2^2)\mu}{4\pi\beta_1(\beta_2^2 - 1)g(z)} \left[ \int_{a_1}^b \frac{f_1'(\xi) g(\xi) d\xi}{\xi - z} + \int_{a_2}^b \frac{f_2'(\xi) g(\xi) d\xi}{\xi - z} \right] + \frac{d_0 z + d_1}{g(z)} i,$$

$$F''_2(z) = -\frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)} F''_1(z).$$

Под  $g(z) = \sqrt{R(z)}$ , где  $R(z) = \prod_{i=1}^2 (z-a_i)(z-b_i)$ , подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль  $l^{(2)}$  плоскости такая, что  $\sqrt{R(z)}$  принимает на оси  $Ox$  положительные значения при  $x > b_i$ , ( $i=1,2$ ). Постоянные  $d_0, d_1$  определяются из граничных условий

$$\int_{a_1}^{b_1} (\sigma_y)_{y=0} = -p_1 \text{ для сл. А и } \int_{a_1}^{b_1} (\sigma_y)_{y=0} = -p_1, \int_{a_2}^{b_2} (\sigma_y)_{y=0} = -p_2 \text{ для сл. В} \quad (4)$$

здесь  $P_1, P_2$  - нормальные усилия с которыми штампы воздействуют на упругую среду.

## 2. Численная реализация

Схема приближенного решения рассматриваемой задачи, приведенная ниже, была применена для различных случаев задания исходных данных. В частности, в варианте А были рассмотрены следующие параметры:

а)  $q(\xi) = p = const$  и б)  $q(\xi) = p\delta(a+\xi)$ , где  $\delta$  - функция Дирака,  $a$  - некоторое заданное число. Для этих двух случаев задача решалась для

$$1) f'(\xi) = 0; \quad 2) f'(\xi) = 0.1\xi.$$

Функция  $g(z)$  для варианта А принимает вид:  $g(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}$ .

Приведем также формулировку задач, реализованных для случая В:

$$1) f'_1(\xi) = 0, f'_2(\xi) = 0; \quad 2) f'_1(\xi) = 0.1\xi, f'_2(\xi) = 0.05\xi^2;$$

$$3) f'_1(\xi) = 0; f'_2(\xi) = 0.1\xi;$$

Функция  $g(z)$  для случаев 1) и 2) варианта А принимает вид:

$$g(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)(z-a_2)(z-b_2)}, \text{ а для 3) } g(z) = \frac{\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}}{\sqrt{(z-a_2)(z-b_2)}}.$$

Для рассмотрения реализованных вычислительных схем ниже более детально рассмотрен вариант А, поскольку остальные случаи не приносят дополнительных осложнений с вычислительной точки зрения. Как уже отмечалось, для нахождения компонентов напряжения необходимо из граничного условия (4) определить число  $d_0$ . Рассмотрим подробнее выражение

$\sigma_y$  для случая  $q(\xi) = p = const$ ;  $f'_1(\xi) = 0.1\xi$ . Отметим, что случай

$$\frac{d_0 z + d_1}{g(z)},$$

$q(\xi) = p\delta(a+\xi)$ , где  $\delta(\xi)$  -- функция Дирака более прост, т.к. нет нужды вычислять соответствующий интеграл. Для  $\sigma_y$  из (4) имеем

$$\sigma_y = M_4 \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{M_2}{10\pi g(z_1)} I_1(z_1) + \frac{M_2 M_3 p}{\pi i g(z_1)} I_2(z_1) \right] + \frac{id_0}{g(z_1)} + \right. \\ \left. + \frac{M_1 M_2}{10\pi g(z_2)} I_1(z_2) + \frac{M_1 M_2 M_3}{\pi i g(z_2)} I_2(z_2) + \frac{M_1 id_0}{g(z_2)} \right\}$$

где обозначено

$$I_1(z) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\xi g(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad I_2(z) = \int_{a_2}^{b_2} \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

$$M_1 = -\frac{4\beta_1\beta_2}{M_4}, \quad M_2 = \frac{\mu M_4}{\beta_1(\beta_1^2 - 1)}, \quad M_3 = \frac{M_4}{M_4 - 4\beta_1\beta_2}, \quad M_4 = 1 + \beta_2^2.$$

Переходя к пределу при  $y \rightarrow 0$ , получим

$$\sigma_y^-(x) = M_4 \operatorname{Re} \left[ \frac{M_2(1+M_1)}{10g(x)} I_1^-(x) + \frac{(1+M_1)M_2 M_3 p}{\pi i g(x)} I_2^-(x) + \frac{(1+M_1)id_0}{g(x)} \right]$$

Применение формулы Сохоцкого-Племеля для сингулярного интеграла  $I_1^-(x)$  дает:

$$I_1^-(x) = x\sqrt{(x-a_1)(b_1-x)} - \frac{1}{\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\xi \sqrt{(\xi-a_1)(b_1-\xi)} d\xi}{\xi-x}$$

$$\frac{I_1^-(x)}{g(x)}$$

Отделяя действительную часть в  $\frac{I_1^-(x)}{g(x)}$ , получаем

$$\operatorname{Re} \left( \frac{I_1^-(x)}{g(x)} \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a_1)(b_1-x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\xi \sqrt{(\xi-a_1)(b_1-\xi)} d\xi}{\xi-x} \quad (5)$$

Регулярный же интеграл  $I_2^-(x)$  представляет собой действительную функцию, так как интегрирование ведется по отрезку действительной оси и  $b_1 < a_2$ . Следовательно, можем написать

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\pi i g(x)} I_2^-(x) \right) = -\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a_1)(b_1-x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{g(\xi) d\xi}{\xi-x} \quad (6)$$

Окончательно для  $\sigma_y^-(x)$  получаем

$$\sigma_y^-(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a_1)(b_1-x)}} [0.1(1+M_1)M_2 M_4 I_1^-(x) - \\ - (1+M_1)M_2 M_3 M_4 p I_2^-(x) + (1+M_1)\pi d_0]$$

где под  $I_1^-(x), I_2^-(x)$  подразумеваются выражения (5) и (6) соответственно.

Нетрудно заметить, что выражение в правой части последней формулы представляет собой функцию класса Гельдера что позволяет утверждать существование интеграла в (4).

К вычислению сингулярного интеграла  $I_1^-(x)$  применялась квадратурная формула предложенная и исследованная в [3]. В частности, для интеграла вида

$$S(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} \quad (7)$$

в [3] построена следующая квадратурная формула

$$S(f; x) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-(x_k^{(n)})^2} U_{n-1}(x) - 1}{x - x_k^{(n)}} f(x_k^{(n)})$$

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

(предполагается, что функция  $f(x)$  принадлежит классу Гельдера). К

вычислению регулярного интеграла  $I_2^-(x)$  применялась квадратурная формула

Эрмита (см., напр., [4]). Для определения постоянной  $d_0$  из граничного условия (4) необходимо вычислить двукратные интегралы

$$\int_a^b \frac{I_1^-(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx, \quad \int_a^b \frac{I_2^-(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$$

К вычислению этих последних также применялась квадратурная формула Эрмита. На рис. 1,2 приведены графики  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  вычисленных для момента  $t_1 = 0.0001 \text{сек}$ . На рис. 3,4 приведены отношения  $\max \tau_{xy}$  к  $\sigma_x$  в соот. точках для  $t_1$  и  $t_2 = 0.0014 \text{сек}$ .

Из числа созданных для рассмотренной задачи программ отметим процедуру-функцию для системы MATLAB sansin, которая приближенно вычисляет сингулярные интегралы вида

$$S(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}$$

автоматически приводя их к виду (7).

Все созданные программные модули протестированы для версий MATLAB 5.2 и MATLAB 6.0.

Следует отметить, что стандартные процедуры численного интегрирования системы MATLAB (в частности процедура quadl) для вычисления большинства перечисленных интегралов не оказались эффективными. Здесь же следует оговориться, что для рассмотренного конкретного варианта задачи возможно точное (аналитическое) взятие упомянутых интегралов, однако в общем случае

это не всегда удается, в связи с чем предпочтение изначально было отдано их приближенному вычислению.

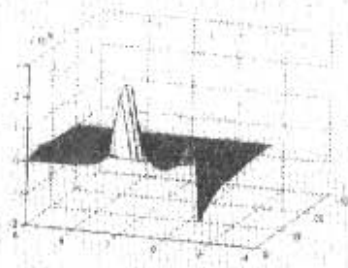


Рис.1  $\sigma_x, t = t_1$

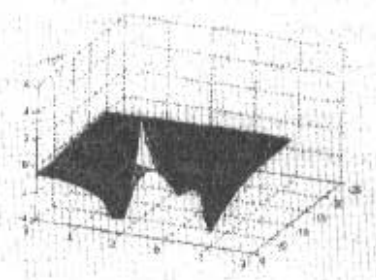


Рис.2  $\tau_{xy}, t = t_1$

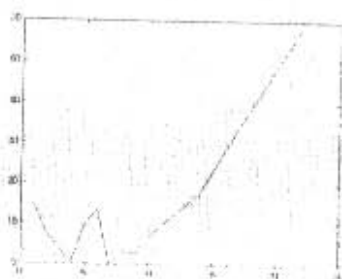


Рис.3  $\frac{\max \tau_{xy}}{\sigma_x}, t = t_1$

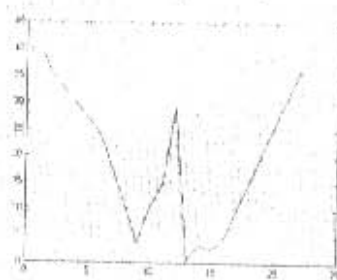


Рис.4  $\frac{\max \tau_{xy}}{\sigma_x}, t = t_2$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Losaberidze, Т. Iamanidze. On Dinamic Effect Causing by Stamps
2. Moving on the Boundary of Elastic Body // Bul. of Geor. Acad. of Sci. v 164, N 2, 2001
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — Москва: Физматгиз, — 1962. — 600 с. М: Наука, 1968. 512 с.
4. Саникидзе Д. Г. О порядке приближения некоторых сингулярных операторов квадратурными суммами // Изв. АН Арм. ССР V № 4, 1970
5. Натансон И. П. Конструктивная теория функций М. — Л.:
6. Гостехиздат, — 1949 — 688 с.