

Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране

А.В. Антоненц, Ю.В. Гандель

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

In this paper the new approach for the numerical analysis of scattering on planar structures based on pair and hypersingular equations is introduced. The numerical experiment using suggested method is held. Some achieved results are shown.

Методом, предложенным одним из авторов [1], численно анализируется скалярная квазистационарная задача дифракции на плоских экранах. Зависимость потенциала от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$. Экран расположен в плоскости $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

Представим потенциал $U(x)$ в виде суммы потенциалов падающей $u_0(x)$ и рассеянной $u(x)$ волн. Задача сводится к нахождению потенциала $u(x)$, для которого имеем следующую внешнюю краевую задачу:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} u(x) = -\frac{\partial}{\partial \nu_x} u_0(x), \quad x \in \mathcal{E}, \quad (2)$$

условие излучения Зоммерфельда:

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad } u(x) \right) - i k u(x) \rightarrow 0, \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ равномерно по всем}$$

$$\text{направлениям } \frac{x}{|x|}. \quad (3)$$

Кроме того, в окрестности ребер экрана должны выполняться условия Майкснера в интегральной форме:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (|u(x)|^2 + |\text{grad } u(x)|^2) dx < +\infty \quad (4)$$

Обозначим: $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Введем сужения функции $u(x)$:

$u^+(x) = u(x), x_3 > 0$; $u^-(x) = u(x), x_3 < 0$, соответственно на верхнее и нижнее полупространства, и будем искать их в виде:

$$u^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^2} C^\pm(\lambda) e^{i(\lambda, \tilde{x}) \mp \gamma(\lambda)x_3} d\lambda, \quad (5)$$

Здесь $\gamma(\lambda) = \sqrt{|\lambda|^2 - k^2}$, а в соответствии с условием излучения ветвь радикала выбирается таким образом, чтобы $\operatorname{Re} \gamma(\lambda) \geq 0$, а $\operatorname{Im} \gamma(\lambda) \leq 0$.

Кроме граничного условия (2):

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u^+(x) = \frac{\partial}{\partial x_3} u^-(x) = f(x), \quad x \in \mathcal{D},$$

где $f(x) = -\frac{\partial}{\partial x_3} u_0(x)$, должны выполняться условия сопряжения

$$u^+(\bar{x}) = u^-(\bar{x}), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_3} u^+(x) \right|_{x_3=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x_3} u^-(x) \right|_{x_3=0}, \quad \bar{x} \notin \mathcal{D}. \quad (7)$$

Из условий (2) и (7) следует, что:

$$\int_{\mathbb{R}^2} C^-(\lambda) (-\gamma(\lambda)) e^{i(\lambda, \bar{x})} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} C^-(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i(\lambda, \bar{x})} d\lambda, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

откуда имеем

$$-C^-(\lambda) = C^+(\lambda) = C(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

Из (6), с учетом (5) и (8), следует

$$\int_{\mathbb{R}^2} C(\lambda) e^{i(\lambda, \bar{x})} d\lambda = 0, \quad \bar{x} \notin \mathcal{D}. \quad (9)$$

Введем новую неизвестную функцию $\bar{u}(\bar{x})$ — преобразование Фурье функции $C(\lambda)$:

$$\bar{u}(\bar{x}) = u^+(\bar{x}, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} C(\lambda) e^{i(\lambda, \bar{x})} d\lambda.$$

Тогда, с учетом (9), имеем

$$C(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{D}} \bar{u}(\xi) e^{-i(\lambda, \xi)} d\xi$$

Интегральное уравнение для искомой функции $\bar{u}(\bar{x})$ получим, преобразуя граничное условие, записанное в терминах Фурье-представлений

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \gamma(\lambda) C(\lambda) e^{i(\lambda, \bar{x})} d\lambda = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathcal{D}. \quad (10)$$

Используя тождество

$$-\gamma(\lambda) = -|\lambda| + \frac{k^2}{2} \frac{1}{|\lambda|} + \frac{k^4}{2} \frac{1}{|\lambda| \left(|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2 - k^2} \right)^2}$$

перепишем уравнение в виде

$$\int_{\mathfrak{D}} (-|\lambda|) C(\lambda) e^{i(\lambda, x)} d\lambda + \frac{k^2}{2} \int_{\mathfrak{D}} \frac{C(\lambda) e^{i(\lambda, x)} d\lambda}{|\lambda|} + \frac{k^4}{2} \int_{\mathfrak{D}} \frac{C(\lambda) e^{i(\lambda, x)} d\lambda}{|\lambda| \left(|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2 - k^2} \right)^2} = f(x)$$

$-|\lambda|$ - символ псевдодифференциального оператора [2,3]

$$(Au)(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{u(\xi)}{|\xi - \bar{x}|^3} d\xi,$$

а $\frac{1}{|\lambda|}$, как несложно показать, символ оператора

$$(Bu)(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{u(\xi)}{|\xi - \bar{x}|} d\xi$$

Для вычисления третьего интеграла в (10), используем представление (8) для $C(\lambda)$. Находим:

$$\int_{\mathfrak{D}} \frac{C(\lambda) e^{i(\lambda, x)} d\lambda}{|\lambda| \left(|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2 - k^2} \right)^2} = \int_{\mathfrak{D}} K(\xi - \bar{x}) u(\xi) d\xi,$$

где

$$K(\zeta) = 2\pi |\zeta| \int_0^{+\infty} \frac{J_0(t)}{\left(t + \sqrt{t^2 - |\zeta|^2 k^2} \right)^2} dt$$

Окончательно, получаем гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\bar{u}(\xi)}{|\xi - \bar{x}|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\bar{u}(\xi)}{|\xi - \bar{x}|} d\xi + \frac{k^4}{2} \int_{\mathfrak{D}} K(\xi - \bar{x}) \bar{u}(\xi) d\xi = f(\bar{x}) \quad (11)$$

Через решение этого уравнения $\bar{u}(\bar{x})$ выражается потенциал $u(x)$, $x \in R^3$. Учитывая представления для $u(x)$ и $C(\lambda)$, находим:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} Q(\xi - \bar{x}, x_3) \bar{u}(\xi) d\xi, \quad (12)$$

$$Q(\zeta, z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\sqrt{t^2 - k^2}} J_0(|\zeta|t) t dt$$

Используя интеграл Зоммерфельда [4],

$$\int_0^{+\infty} e^{\mp z\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(r\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = \frac{e^{ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \text{при } z > 0 \quad \text{и} \quad z < 0$$

соответственно,

для $Q(\zeta, z)$ окончательно получаем

$$Q(\zeta, z) = \frac{e^{ik\sqrt{|\zeta|^2+z^2}}}{\left(|\zeta|^2+z^2\right)^{3/2}} \left(1 - ik\sqrt{|\zeta|^2+z^2}\right) z$$

Из представления (12) для $u(x)$ получаем выражение для поля в дальней зоне:

$$u(x) \sim F(\theta, \varphi) \frac{e^{ik|x|}}{|x|}$$

$$F(\theta, \varphi) = \int_{\mathcal{E}} (-ik) \cos \theta e^{ik(\xi, \eta)} \tilde{u}_m(\xi) d\xi, \quad (13)$$

где η – радиус-вектор точки (θ, φ) на единичной сфере.

Для построения дискретной математической модели заменяем экран \mathcal{E} системой замкнутых вихревых рамок [3] $\mathcal{E} = \bigcup_{p=1}^m \sigma_p$. На каждом σ_p выберем точку коллокации x_p^0 . Ищем $\tilde{u}(\tilde{x})$ в виде кусочно-постоянной на \mathcal{E} функции $\tilde{u}_m(\tilde{x})$, принимающей на σ_p значения $\tilde{u}(x_p^0)$. Используя для интегралов квадратурные суммы, сводим уравнение (11) к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{q=1}^m \tilde{u}_m(x_q^0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|^3} d\xi + \frac{k^2}{4\pi} \int_{\sigma_q} \frac{1}{|\xi - x_p^0|} d\xi + \frac{k^4}{2} \int_{\sigma_q} K(\xi - x_p^0) d\xi \right) = f(x_p^0),$$

$$p = \overline{1, m} \quad (14)$$

относительно неизвестных $u_m(x_p^0)$.

Решая полученную систему, находим приближенные значения $\tilde{u}(\tilde{x}) - \tilde{u}_m(x_p^0)$, выражаем приближенные значения потенциала (12)

$$u(x) = \sum_{p=1}^m \tilde{u}_m(x_p^0) \int_{\sigma_p} Q(\xi - \tilde{x}, x_3) d\xi$$

и диаграммы направленности

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{p=1}^m \tilde{u}_m(x_p^0) \int_{\sigma_p} (-ik) \cos \theta e^{ik(\xi, \eta)} d\xi.$$

С помощью приведенного выше алгоритма было проведено численный эксперимент. Задача решалась для квадратного экрана $\{\tilde{x} \in [-1, 1] \times [-1, 1], x_3 = 0\}$ при различных значениях волнового числа k . Квадратный экран разбивался на

$n \times n$ рамок и решалась СЛАУ (14), после чего приближенно вычислялась диаграмма направленности.

Некоторые из полученных результатов приведены ниже. На рисунках изображены диаграммы направленности $\operatorname{Re} F(\theta, \varphi)$ в плоскости $\varphi = 0$.

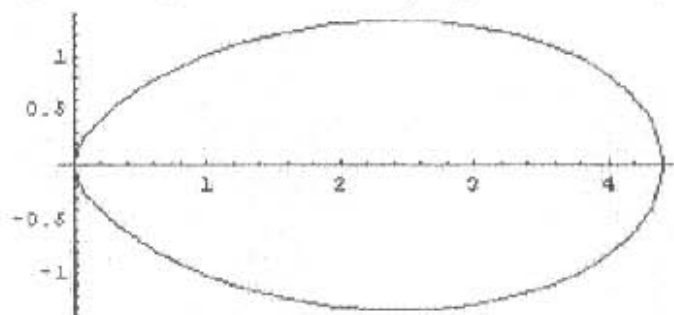


Рис.1. Диаграмма направленности для квадратного экрана $k = \pi, n = 5$

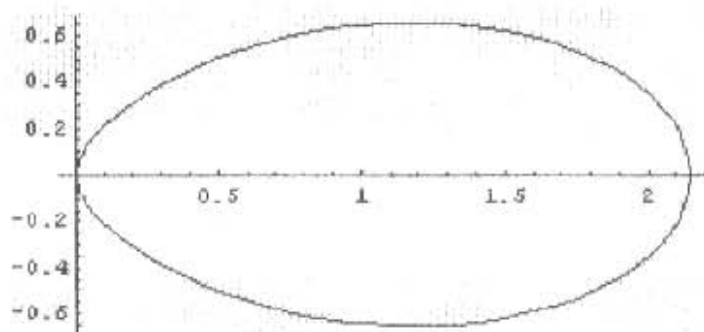


Рис.2. Диаграмма направленности для квадратного экрана. $k = \pi, n = 10$

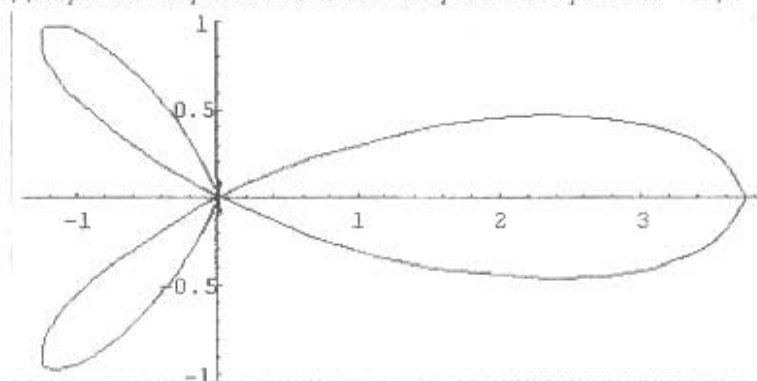


Рис.3. Диаграмма направленности для квадратного экрана. $k = 2\pi, n = 5$

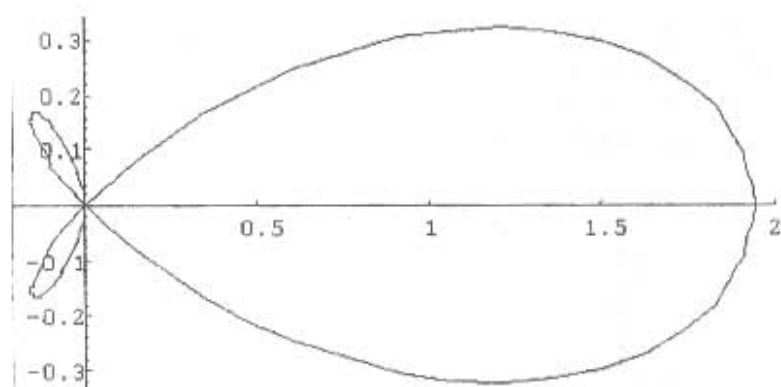


Рис. 4. Диаграмма направленности для квадратного экрана. $k = 2\pi, n = 10$

Предложенный в работе подход может быть применен для численного анализа рассеяния на планарных структурах, как ограниченных, так и бесконечных 2-периодических.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах. – Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2003).» – Харьков-Херсон. – 2003. С. 9-16.
2. Агранович М.С. Спектральные свойства задач дифракции. // В кн. Войтович Н.Н., Кацеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М.: Наука, 1977. – С. 289-416.
3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: "Янус-К", 2001. – 508 с.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч. I. – М.: ИЛ, 1949. – 799 с.