

## Дослідження однієї різницевої схеми для нелінійної задачі теплопровідності

В. П. Ляшенко, Н. Г. Кирилах

*Кременчуцький державний політехнічний університет, Україна  
Інститут економіки та нових технологій, м. Кременчук, Україна*

The nonlinear problem of distribution of heat in an anisotropic medium is considered. The numerical solution is constructed on the basis of the finite differences method. The examination of convergence of the obtained solution is carried out. Key Words: The conservative difference plan, approximation.

В металургії, під час термічної обробки стрижнів та дроту циліндричної форми електричним струмом, виникає необхідність контролю температурного розподілу уздовж зони нагріву. Знання такого розподілу дозволяє керувати температурним полем, що потрібно для формування заданої структури матеріалу. В науковій літературі, при побудові математичних моделей температурних полів, майже не звертається увага на те, що теплофізичні характеристики середовища, що нагрівається, залежать від температури.

**Мета роботи.** Побудова математичної моделі, яка б враховувала залежність основних теплофізичних характеристик середовища, що нагрівається, від температури. Формулювання математичної моделі у вигляді нелінійної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Побудова нелінійної скінченно-різницевої схеми для розв'язку цієї задачі. Дослідження збіжності отриманих чисельних розв'язків.

Розглянемо нестационарну задачу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z}) + \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4} = c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < z < L, \quad t > 0,$$

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad T(r, 0, t) = T_1(t), \quad T(r, L, t) = T_1(t), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\alpha(T)(T - T_c) - \varepsilon \delta (T^4 - T_c^4). \quad (3)$$

$$\text{Де } 0 < \alpha(T) \leq M_1, \quad 0 < \lambda(T) \leq M_2 \in C_2.$$

Для термічно тонкого середовища застосуємо оператор усереднення:

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r T dr \quad \text{і перейшовши до координат і параметрів без розміру [1],}$$

отримаємо задачу в циліндрі  $\bar{\Omega} : \{ 0 \leq x \leq 1, \tau \geq 0 \}$  з поверхнею  $S$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + F(\theta) = Pe \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad 0 < x < 1, \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \theta(0, \tau) = \theta_1(\tau) \quad \theta(1, \tau) = \theta_1(\tau), \quad (5)$$

$$\text{де } \theta = \frac{u - T_0}{T_c}, \quad x = \frac{z}{L}, \quad \rho = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_0}, \quad Po = \frac{l^2 \rho_0 L^2}{\lambda_0 T_c \pi^2 r_0^4}, \quad Pe = \frac{c \rho_n L^2}{\lambda_0 \tau_0}$$

$$\theta_1 = \frac{T_1(t) - T_0}{T_c}, \quad K(\theta) = T_c \gamma \theta + T_1 \gamma + 1 \quad (6)$$

$$F(\theta) = -\mu i \cdot \eta (1 + \mu T_c (\theta - \theta_1)) (\theta + \theta_1 - 1) - \gamma ((\theta + \theta_1)^4 - 1) + Po \kappa (\theta + \theta_1) + Po, \quad (7)$$

$$\mu i = \frac{2\alpha_0 L}{\lambda_0}, \quad \gamma i = \frac{2\varepsilon \delta T_c^3 L^2}{\lambda_0 r_0}, \quad \eta = \frac{L}{r_0}, \quad \kappa = \beta T_c.$$

Шукаємо розв'язок задачі (4)-(5) в банаховім просторі  $U$  функцій, визначених на  $\bar{\Omega}$  з нормою  $\|u(x, \tau)\|_U = \max_{x, \tau \in \bar{\Omega}} |u(x, \tau)|$ . Нехай функції

(6)-(7) додатньо означені і обмежені по нормі

$$\|F(\theta)\|_{C_1} \leq M_3 - \text{const}, \quad \|K(\theta)\|_{C_1} \leq M_4. \quad (8)$$

Розв'язок задачі (4)-(5) шукаємо кінцево-різницеvim методом. Будемо консервативну різницеву схему [2]. Запишемо рівняння (4) в операторному вигляді:

$$L\theta + F(\theta) = Pe \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (9)$$

$$\text{де } L\theta = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \text{ враховуючи} \quad (6)$$

$$L\theta = T_c \gamma \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + K(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10)$$

Введемо в області  $\bar{\Omega}$ : рівномірні сітки:  $\bar{\omega}_h = \{x_m = mh, m=0, 1, \dots, M\}$ ,  $\bar{\omega}_{\Delta\tau} = \{\tau_j = j\Delta\tau, j=0, 1, \dots, j_0\}$  із кроками  $h=1/M$  и  $\Delta\tau = \Delta/j_0$ , і сітку  $\bar{\omega}_{h, \Delta\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_{\Delta\tau} = \{(mh, j\Delta\tau), m=0, 1, \dots, M, j=0, 1, \dots, j_0\}$ , де  $M$  - число інтервалів розбиття області  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\Delta - \text{const}$ ,  $j_0$  - число почасових інтервалів і відповідні сіткові функції  $y_{hw}(x_m, \tau_j)$  визначені в  $\bar{\omega}_{h, \Delta\tau}$ , де  $y_m^j$  - значення сіткової функції у вузлі  $(x_m, \tau_j)$ . Розглянемо функцію

$$w(x, t, \theta) = -K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (11)$$

запишемо для (4) рівняння балансу в області  $x_{\frac{m-1}{2}} \leq x \leq x_{\frac{m+1}{2}}$ ,  $\tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1}$ :

$$Pe \int_{x_{m-0.5}}^{x_{m+0.5}} [\theta(x, t_{j+1}) - \theta(x, t_j)] dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [w(x_{m-1/2}, t, \theta) - w(x_{m+1/2}, t, \theta)] dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} F(\theta) dx \quad (12)$$

Замінімо  $w$  й інтеграл, що містить  $\theta$ , лінійними комбінаціями значень  $\theta$  у вузлах сітки. Для цього скористаємося інтерполяціями в околі вузла  $x_m$  [2]. Припустивши, що:  $\theta = const = \theta_m$  для  $x_{m-1/2} \leq x \leq x_{m+1/2}$ , маємо

$$\int_{x_{m-0.5}}^{x_{m+0.5}} \theta(x, t_{j+1}) dx \approx h \theta_m^{j+1}. \quad (13)$$

Проінтегрувавши рівність:  $\frac{w(x, t, \theta)}{K(\theta)} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$ ,  $x \in [x_{m-1/2}, x_{m+1/2}]$ , отримаємо

$$\theta_{m-1} - \theta_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{w(x, t, \theta)}{K(\theta)} dx. \quad \text{Припускаючи, що } w(x, t, \theta) = \tilde{w}_{m-1/2} = const \text{ при}$$

$$x_{m-1/2} \leq x \leq x_{m+1/2}, \text{ маємо: } \theta_{m-1} - \theta_m = \tilde{w}_{m-1/2} \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{dx}{K(\theta)}.$$

Звідси знаходимо наближене значення  $\tilde{w}_{m-1/2}$

$$\tilde{w}_{m-1/2} = -a_m \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{h} = -a_m \theta_{\bar{x}, m}, \quad (14)$$

де  $a_m = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{dx}{K(\theta)} \right)^{-1}$ . Апроксимуємо інтегралі і похідні, що входять в рівняння (12):  $w_{m-1/2} \approx a_m \theta_{\bar{x}, m}$ ;

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [w(x_{m+1/2}, t, \theta) - w(x_{m-1/2}, t, \theta)] dt \approx \Delta \tau \sigma [w_{m+1/2}^{j+1} - w_{m-1/2}^{j+1}] + \Delta \tau (1 - \sigma) [w_{m+1/2}^j - w_{m-1/2}^j], \quad (15)$$

де  $0 \leq \sigma \leq 1$  - числовий параметр.

Апроксимуємо  $a_m$  - у вигляді  $a_m = 0,5(K(\theta_{m-1}) + K(\theta_m))$ . Звідси випливає, що оператор

$$\Lambda \theta = (a \theta_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} (a_{m+1} \frac{\theta_{m+1} - \theta_m}{h} - a_m \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{h}) \quad (16)$$

апроксимує  $L \theta = \frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial \theta}{\partial x})$  з другим порядком:  $\Lambda \theta - L \theta = O(h^2)$ . При

цьому  $a_m$  - обмежена, додатньо-визначена функція. Далі замінимо

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} F(\theta) dx \approx h \Delta \tau \varphi_m^j, \quad \text{де } \varphi_m^j = \frac{F(\theta_m^{j+1}) + F(\theta_m^j)}{2}. \quad (17)$$

Після підстановки виразів (13), (15), (16), (17) у (12), враховуючи (14), і після заміни  $\theta$  на  $y$ , одержуємо різницеве рівняння для сіткової функції  $y(x_m, \tau_j) = y_m^j$ :

$$Pe \frac{y_m^{j+1} - y_m^j}{\Delta \tau} = \Lambda(\sigma y_m^{j+1} + (1-\sigma)y_m^j) + \varphi_m^{j+1}, \quad (18)$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Приєднавши до нього додаткові умови, що впливають з (5):  $y_m^0 = 0$ ,  $y_0^j = \theta_1(\Delta \tau \cdot j)$ ,  $y_M^j = \theta_1(\Delta \tau \cdot j)$ , одержуємо різницеву крайову задачу:

$$Pe y_\tau = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j) + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad \tau \in \omega_{\Delta \tau}, \quad (19)$$

$$y_m^0 = 0, \quad y_0^j = \theta_1(j \cdot \Delta \tau), \quad y_M^j = \theta_1(j \cdot \Delta \tau), \quad (20)$$

де  $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$ .

У силу того, що функція  $F(\theta)$  - є поліном четвертого ступеня (7) щодо шуканої функції  $\theta(x, \tau)$  сіткову функцію  $\varphi_m^{j+1}$  можемо записати у вигляді:  $\varphi_m^{j+1} = y_m^{j+1} \varphi_m^{*j+1} + M_3$ , де  $M_3 - const$ , а  $\varphi_m^{*j+1}$  - поліном третього ступеня відносно  $y_m^{j+1}$ . Тоді задачу (19)-(20) запишемо у вигляді

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Gamma(P)} B(P, Q)y(Q) + \Phi, \quad P \in \omega_{h\Delta \tau}, \quad Q \in \Gamma(P) \quad (21)$$

$$y(P) = \theta_1, \quad P \in s \quad (22)$$

де  $\Gamma(P) \in \bar{\omega}$  - границя точки  $P$ ,  $s$  - границя області  $\bar{\omega}_h$ ,

$$A(P) = Pe + \frac{\Delta \tau \cdot \sigma}{h^2} (a_{m+1}^{j+1} + a_m^{j+1}) + \varphi_m^{*j+1} \Delta \tau, \quad B(P, Q) = \frac{\Delta \tau \sigma}{h^2} a(P, Q),$$

$$\Phi = (Pe - (1-\sigma) \frac{\Delta \tau}{h^2} (a_{m+1}^j + a_m^j)) y_m^j + \frac{(1-\sigma) \Delta \tau}{h^2} (a_{m+1}^j y_{m+1}^j + a_m^j y_{m-1}^j) + \Delta \tau M_3.$$

Має місце лема.

**Лема** Якщо  $D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \Gamma(P)} B(P, Q) > 0$  усюди на  $\bar{\omega}_h$ , то для розв'язку задачі (21)-(22) вірна оцінка:

$$\|y\|_c \leq \left\| \frac{\Phi}{D} \right\|_c \quad (23)$$

Покажемо, що для задачі (19)-(20) виконуються умови леми. Дійсно

$$A(P) = Pe + \frac{\Delta \tau \sigma}{h^2} (a_{m+1}^{j+1} + a_m^{j+1}) + \varphi_m^{*j+1} \Delta \tau > 0,$$

тому що  $Pe > 0$ ,  $a_m^j > 0$ ,  $\varphi_m^j > 0$ ,

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \Gamma(P)} B(P, Q) = Pe + \frac{\Delta\tau \cdot \sigma}{h^2} (a_{m+1}^{j+1} + a_m^{j+1}) + \varphi_m^{j+1} \Delta\tau -$$

$$- \frac{\Delta\tau \sigma}{h^2} (a_{m+1}^{j+1} + a_m^{j+1}) = Pe + \varphi_m^{j+1} \Delta\tau > 0.$$

Для розв'язку задачі вибираємо безумовно стійку неявну схему ( $\sigma=1$ )

$$Pe \frac{y_m^{j+1} - y_m^j}{\Delta\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{m+1}^{j+1} \frac{y_{m+1}^{j+1} - y_m^{j+1}}{h} - a_m^{j+1} \frac{y_m^{j+1} - y_{m-1}^{j+1}}{h} \right] + \varphi_m^{j+1}, \quad (24)$$

$$y_m^0 = 0, \quad y_0^j = \theta_1(j \cdot \Delta\tau), \quad y_M^j = \theta_1(j \cdot \Delta\tau). \quad (25)$$

Введемо банахів простір  $U_{h\Delta\tau}$  - функцій, заданих на  $\overline{\omega}_{h\Delta\tau}$  з нормою

$$\|y\|_{U_{h\Delta\tau}} = h \max_k |y_k^j|.$$

Розв'язок задачі (24)-(25) приводить на кожному почасовім шарі до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для її розв'язку застосовується метод Ньютона-Канторовича [3].

Питання існування і збіжності чисельного розв'язку (24)-(25) на кожному часовому шарі в просторі  $U_{h\Delta\tau}$  приводить до дослідження матриці Якобі системи. Показано, що дана матриця є невинродженою а з урахуванням (8) і (23), для системи (24)-(25) виконуються всі умови збіжності методу Ньютона-Канторовича [3]. Отже, на кожному часовім шарі розв'язок системи (24)-(25) існує і він єдиний.

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови (8). Тоді початково - крайова задача (4)-(5) має єдиний розв'язок в  $U$ . На кожному часовім шарі існує в  $U_{h\Delta\tau}$  єдиний розв'язок сіткової задачі (24)-(25). Її наближені розв'язки, отримані методом Ньютона-Канторовича  $y^{j\nu} = (y_1^{j\nu}, y_1^{j\nu}, \dots, y_{M-1}^{j\nu})$ , збігаються до розв'язку задачі (4)-(5) на вузлах сітки зі швидкістю

$$\|u_{m,n}^j - y_{m,n}^{j\nu}\|_{U_{h\Delta\tau}} = O(h^2 + \Delta\tau) + o\left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right). \quad (26)$$

Для доведення збіжності різницевої схеми розглянемо на кожному часовому шарі різницю:  $z_m^j = y_m^j - u_m^j$ . Тоді  $y_m^j = z_m^j + u_m^j$ . Підставимо цей вираз для  $y_m^j$  в сіткову задачу (24)-(25)

$$Pe(z_m + u_m)_\tau = \Lambda((z_m^{j+1} + u_m^{j+1})) + \varphi^j, \quad (27)$$

$$x \in \omega_h, \quad \tau \in \omega_{\Delta\tau},$$

$$z_m^0 + u_m^0 = 0, \quad z_0^j + u_0^j = \theta_1(j \cdot \Delta\tau), \quad z_M^j + u_M^j = \theta_1(j \cdot \Delta\tau), \quad (28)$$

Звідси для визначення погрішності апроксиміції  $z_m^{j+1}$  на кожному часовім шарі отримуємо задачу

$$Pez_\tau = \Lambda(z^{j+1}) + \varphi^j(z) + \psi(u) + \alpha((u^{j+1} z^{j+1})_\tau)_x + \psi_1(u, z), \quad (29)$$

$$z_m^0 = 0, \quad z_0^j = 0, \quad z_M^j = 0, \quad (30)$$

де  $\alpha = \gamma T_c$ , нев'язка  $\psi(u) = \Lambda(u^{j+1}) + \varphi(u) - Pe \cdot u$ , залишок

$$\psi_1(u, z) = -2uz(\mu\eta\mu\Gamma_c + 6\gamma\theta_1^2 + 2\gamma \cdot u^2 + 2\gamma \cdot z^2 + 3\gamma \cdot u \cdot z + 6\gamma\theta_1 u + 6\gamma\theta_1 z) \quad (31)$$

Зробимо оцінку нев'язки. В силу побудови різницевого оператора  $\Lambda$ , можемо записати

$$\begin{aligned} \|\psi^j\|_{U_{h\Delta\tau}} &= \|\Lambda u^{j+1} + \varphi(u^j) - Pe u_j\|_{U_{h\Delta\tau}} = \\ &= \|\Lambda u^{j+1} + \varphi(u^{j+1}) - Pe u_j - Lu^{j+1} - F(u^{j+1}) + Pe \frac{\partial u^{j+1}}{\partial \tau}\|_{U_{h\Delta\tau}} \leq \\ &\leq \|\Lambda u^{j+1} - Lu^{j+1}\|_{U_{h\Delta\tau}} + \|F(u^{j+1}) - \varphi(u^{j+1})\|_{U_{h\Delta\tau}} + \left\| Pe \frac{\partial u}{\partial \tau} - Pe \cdot u \right\|_{U_{h\Delta\tau}} = \\ &= O(h^2) + O(h^2 + \Delta\tau) + O(\Delta\tau), \end{aligned}$$

тобто  $\|\psi^j\|_{U_{h\Delta\tau}} = O(h^2 + \Delta\tau)$ .

$$\begin{aligned} \|\alpha((u^{j+1} z^{j+1})_{\bar{x}})_x\|_{U_{h\Delta\tau}} &= \alpha \left\| \frac{u_{m+1}^{j+1} z_{m+1}^{j+1} - u_m^{j+1} z_m^{j+1}}{h^2} - \frac{u_m^{j+1} z_m^{j+1} - u_{m-1}^{j+1} z_{m-1}^{j+1}}{h^2} \right\|_{U_{h\Delta\tau}} \leq \\ &\leq \alpha \max |z_h|_{U_{h\Delta\tau}} \left\| \frac{u_{m+1}^{j+1} - u_m^{j+1}}{h} - \frac{u_m^{j+1} - u_{m-1}^{j+1}}{h} \right\|_{U_{h\Delta\tau}} \leq C_1 \max |z_h|_{U_{h\Delta\tau}} \end{aligned}$$

Враховуючи (31), можемо стверджувати, що функція  $\psi_1(u, z) \leq 0$ . Тоді

$$\|\alpha((uz)_x)_{\bar{x}} + \psi_1(uz)\|_{U_{h\Delta\tau}} \leq \alpha \|((uz)_x)_{\bar{x}}\| \leq C_1 \max |z_h| \leq C_2 \|z\|,$$

де  $C_1, C_2 \rightarrow 0$ .

Аналогічно [3], маємо,

$$\begin{aligned} \|z^{j+1}\|_{U_{h\Delta\tau}} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} C \left( \sum_{j=0}^l \Delta\tau \|\psi^j + \psi_1^j + \alpha((u^{j+1} z^{j+1})_{\bar{x}})_x\|_{U_{h\Delta\tau}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} C \cdot \\ &\left( \sum_j \Delta\tau (\|\psi^j\|^2 + 2\|\psi^j\| \cdot \|\psi_1^j + \alpha((u^{j+1} z^{j+1})_{\bar{x}})_x\| + \|\psi_1^j + \alpha((u^{j+1} z^{j+1})_{\bar{x}})_x\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

так як в останньому виразі доданок  $\|\psi^j\| \cdot \|\psi_1^j + \alpha((u^j z^j)_{\bar{x}})_x\|$  є нескінченно малою величиною, більш високого порядку малості, ніж  $O(h^2 + \Delta\tau)$ , тому ним можна знехтувати. Отже, маємо

$$\begin{aligned} \|z^{j+1}\|_{U_h} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} C \left( \sum_{j=0}^l \Delta\tau (\|\psi^j\|^2 + \|\psi_1^j + \alpha((u^j z^j)_{\bar{x}})_x\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} C \left( \sum_{j=0}^l \Delta\tau \|\psi^j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} C \left( \sum_{j=0}^l \Delta\tau \|\psi_1^j + \alpha((u^j z^j)_{\bar{x}})_x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} C \left( \sum_{j'=0}^j \Delta \tau \| \psi^{j'} \|^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{j'=0}^j \Delta \tau (C_2 \| z \|_{U_h})^2 \right)^{1/2}.$$

Так, як  $C_2 \rightarrow 0$ , то маємо право стверджувати, що

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{j'=0}^j \Delta \tau (C_2 \| z \|_{U_h})^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Звідси слідує, що схема (19)-(20) збіжна і збігається до розв'язку крайової задачі (4)-(5) зі швидкістю  $O(h^2 + \Delta \tau)$ .

**Висновки.** Для перевірки якості запропонованих чисельних алгоритмів розв'язку нелінійної задачі можна використати тести. Для цього візьмемо аналітичні розв'язки задачі з [1], в якій теплофізичні параметри середовища розглядаються як величини, що не залежать ні від координати, ні від температури. На рис.1 зображено температурний розподіл, отриманий аналітично [1] і чисельно за розв'язками (19)-(20) з тими ж параметрами, що і в [1], а також розв'язки нелінійної задачі із змінними параметрами. Вони отримані по розв'язкам задачі (19)-(20). На рис.1 видно, що аналітичний і чисельний розв'язки у вузлах сітки співпадають між собою. Це свідчить про високу точність побудованого чисельного алгоритму. Застосування його до нелінійної задачі з'ясовує вплив втрат тепла за рахунок випромінювання і змінних теплофізичних параметрів – цей вплив суттєвий. Його потрібно враховувати при проектуванні пристроїв відпалу. Запропоновані різницеві схеми можуть бути застосовані при розв'язанні та дослідженні аналогічних нелінійних задач теплопровідності та дифузії.

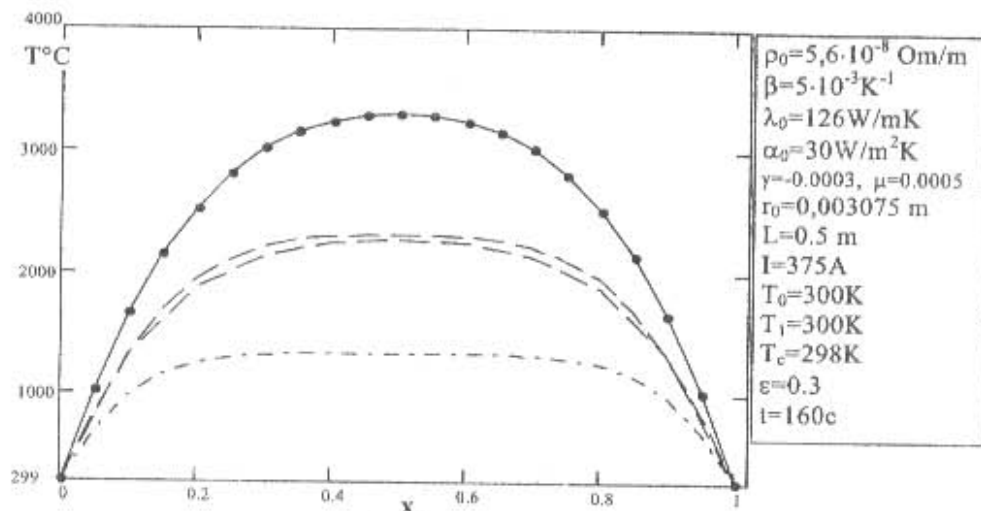


Рис.1

Температурні розподіли, отримані:

за аналітичними розв'язками [1] - суцільна лінія;

за розв'язками задачі (19)-(20) з тими ж параметрами [1] - крапки;

за розв'язками нелінійної задачі (19)-(20) зі змінними параметрами.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшенко В.П., Кирилах Н.Г. Температурное поле осесимметричного изотропного тела, разогреваемого внутренними источниками тепла // Вісник Запорізького державного університету. Фіз.-мат. науки. - 2002. - С.61-64.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем.— М.: "Наука", 1983.— 616с.
3. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. — М.: "Наука", 1977.- 440 с.

Се  
УДКЗад  
латент  
характ  
опред  
поддан  
КЖ. Н  
работ  
федер  
сознан

1. С

Пу  
частн  
 $x^{(1)}, x^{(2)}$   
 $x^{(1)}$   
 $x^{(2)}$   
 $x^{(3)}$   
 $x^{(4)}$   
 $x^{(5)}$   
 $x^{(6)}$   
 $x^{(7)}$   
 $x^{(8)}$   
 $x^{(9)}$   
 $x^{(10)}$   
преступ  
 $x^{(11)}$   
 $x^{(12)}$ 

жизнеде