

**Нелинейные интегральные преобразования,
регионально-структурный, проекционные и итерационные
методы в нелинейной нестационарной задаче радиационно-
конвективного теплообмена**

А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

On the basis of combined use of the finite difference method, the method of substitutions, the regional-analytical method and the variation method, a numerical-analytical solution of the nonlinear transient boundary value problem of heat exchange in which the influence of flame on structural elements of buildings as well as with taking under consideration the dependence of thermalphysic characteristics of the material on the temperature is given.

Рассматривается воздействие пламени заданной интенсивности на колонны с поперечным сечением канонической и неканонической формы для двух предельных случаев изменения температуры среды во времени: кривой E-119 Американского общества специалистов по испытанию материалов (ASTM) и кривой температуры пламени для случая кратковременного высокоинтенсивного нагрева. Воздействие пламени с температурной кривой E-119 при сильном радиационном воздействии относится к наиболее тяжелому условию.

В качестве конкретных задач рассматривались нелинейные нестационарные краевые задачи теплообмена для однородных и неоднородных колонн с поперечным сечением канонической и неканонической формы, которые подвергаются воздействию пламени заданной интенсивности. Для решения указанных задач с учетом зависимости теплофизических характеристик материала от температуры совместно применяются метод конечных разностей [1], подстановок [2], регионально-аналитический [3] и вариационный [4] метод.

Введение новой функции U , связанной с функцией T интегральным соотношением [2]

$$U = \int_0^T \lambda(T) dT,$$

линеаризует правую часть уравнения исходной задачи, граничные условия второго рода и условия равенства тепловых потоков на поверхностях контакта разнородных материалов. Нелинейное граничное условие радиационно-конвективного теплообмена и условие равенства температур на поверхностях контакта разнородных материалов несложно видоизменяются в соответствующие нелинейные граничные условия.

Нелинейная краевая задача для функции T преобразуется к виду

$$\frac{c(T)\rho(T)}{\lambda(T)} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta u \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, t_1) \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad t \in (0, t_1), \quad (2)$$

$$-\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_2} = [\alpha f_1(u) + \varepsilon \sigma f_2(u)]_{\Gamma_2}, \quad t \in (0, t_1), \quad (3)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(T_0) \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (4)$$

Применение неявной разностной схемы по временной переменной позволяет нелинейную нестационарную задачу радиационно-конвективного теплообмена свести к последовательности соответствующих нелинейных стационарных задач для каждого момента времени t_k

$$\Delta u - \frac{W(u_{k+1})}{\Delta t} u_{k+1} = -\frac{W(u_k)}{\Delta t} u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad (6)$$

$$-\left. \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_2} = [\alpha f_1(u_{k+1}) + \varepsilon \sigma f_2(u_{k+1})]_{\Gamma_2}, \quad (7)$$

где $W(u_k) = c(T_k)\rho(T_k)/\lambda(T_k)$.

В первом варианте точного учета нелинейности построим аналитическую структуру решения, точно удовлетворяющую нелинейному условию (7) в виде

$$u_{k+1} = \Phi_{k+1} - \omega \left(\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \omega [\alpha f_1(\Phi_{k+1}) + \varepsilon \sigma f_2(\Phi_{k+1})] \quad (8)$$

где функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям [5]:

$$\omega|_{\Gamma_2} = 0; \quad \omega > 0, (x, y) \in \Omega; \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_2} = 1, \quad (9)$$

а функция Φ_{k+1} может быть выбрана в виде

$$\Phi_{k+1} = \sum_{i,j=0}^n C_{k+1,i,j} P_i(x) P_j(y), \quad (10)$$

где $P_i(x), P_j(y)$ — нормированные полиномы Чебышева. В этом случае, подставляя функцию (8) в уравнение (5) и применяя метод взвешенных невязок в форме Галеркина [3], получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_{k+1,i,j}$ для каждого момента времени. Данную систему уравнений можно решить, применяя один из итерационных методов [6].

В прикладном разделе доклада рассмотрим задачу

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, Fo_1), \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, Fo_\tau), \quad (12)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \nu} = Bi(T - T_{cp}) + Sk(T^4 - T_{cp}^4) \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0, Fo_\tau), \quad (13)$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (14)$$

В задаче (11) – (14) Γ_1 – граница, на которой отсутствует тепловой поток в силу геометрической симметрии поверхности, ограничивающей колонну, и симметричности температурного поля; Γ_2 – внешняя граница колонны, которая непосредственно подвергается воздействию пламени; Ω – область, являющаяся поперечным сечением колонны с учетом симметрии; Bi, Sk, Fo – безразмерные числа Био, Старка, Фурье соответственно; ν – направление внешней нормали к границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ области Ω ; T и T_{cp} – температура колонны и пламени соответственно.

Во втором варианте учета нелинейности используется линеаризация нелинейных граничных условий по методу Ньютона для каждого момента времени k . Неизвестные коэффициенты $C_{k,j}$ региональных структур решения для каждого момента времени k определяются на базе совместного применения метода взвешенных невязок в форме Галеркина и одного из итерационных методов [6].

Построим аналитическую структуру решения для каждого момента времени $k+1$ в виде

$$T_{k+1} = \Phi_{k+1} - \omega \left(\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \omega [Bi\Phi_{k+1} + Sk\Phi_{k+1}^4] + \omega [BiT_{cp} + SkT_{cp}^4],$$

где функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям (9). Последовательность линейных задач для каждого момента времени эквивалентна последовательности задач о минимуме соответствующих квадратичных функционалов [4]. Воспользовавшись необходимым условием минимума соответствующего функционала для определения неизвестных параметров $C_{k+1,i,j}^{l+1}$ структуры решения, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i,j=0}^n C_{k+1,i,j}^{l+1} \left\{ \int_{\Omega} \left(\nabla \varphi_{ij} \nabla \varphi_{pq} + \frac{1}{\Delta Fo} \varphi_{ij} \varphi_{pq} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_2} \alpha'_{k+1} \varphi_{ij} \varphi_{pq} d\Gamma_2 \right\} = \int_{\Omega} \frac{T_k}{\Delta Fo} \varphi_{pq} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \alpha'_{k+1} T_{cp,k+1}^l \varphi_{pq} d\Gamma_2, \quad pq = \overline{0, n}, l = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots$$

где $\varphi_{ij}, i, j = \overline{0, n}$ – полная линейно-независимая система базисных функций [3].

При численных расчетах в качестве зависимости температуры внешней среды от времени $T_{cp}(Fo)$ были взяты обе зависимости температуры пламени от времени, использованные в [7]. На рис.1,2 представлены семейства температурных кривых для квадратной колонны в угловой точке ее

поверхности, полученные авторами работы [7], а точками отмечены результаты данного исследования.

На рис. 3,4 представлены температурные зависимости от времени в угловой точке для шестиугольной колонны при тех же значениях теплофизических характеристик для кривой температуры пламени E-119 и для кривой температуры пламени в функции времени при кратковременных высокоинтенсивных тепловых нагрузках.

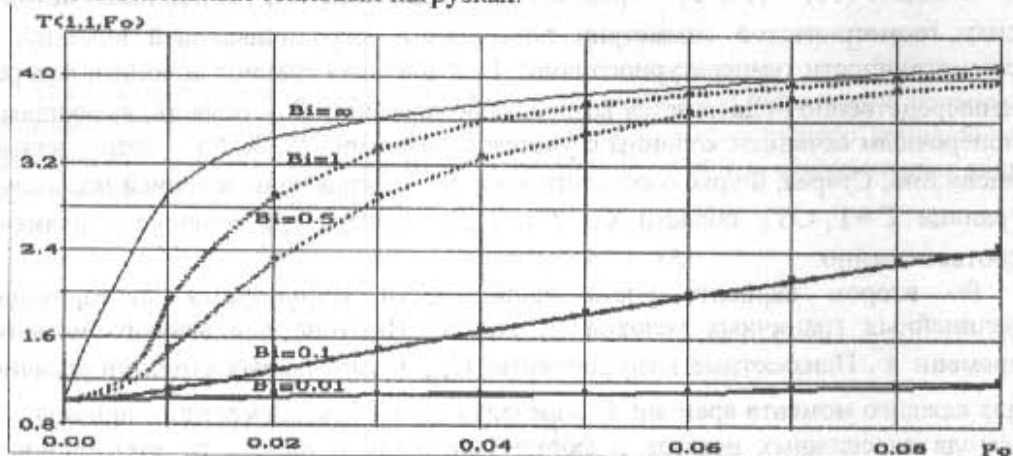


Рис. 1. Семейство температурных кривых для колонны прямоугольного сечения, температурная кривая E-119.

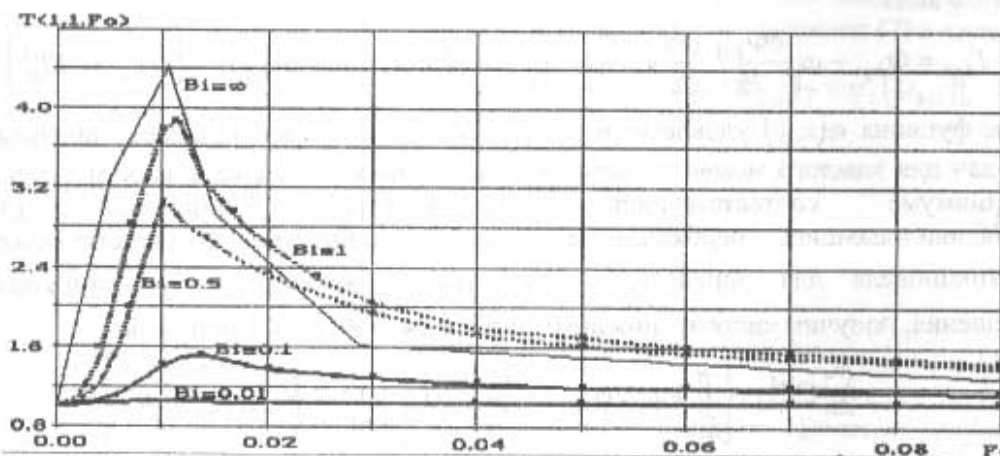


Рис. 2. Семейство температурных кривых для колонны прямоугольного сечения для случая кратковременного воздействия пламени высокой интенсивности.

Т(1,1,
4.0
3.2
2.4
1.6
0.8
0.0
Рис.

Дан
строи
провод
различ
зависи
парам

Т(1,1,
4.0
3.2
2.4
1.6
0.8
0.0
Рис.

1. Са
- 552
2. Ма
- тех
3. Сл
- мет

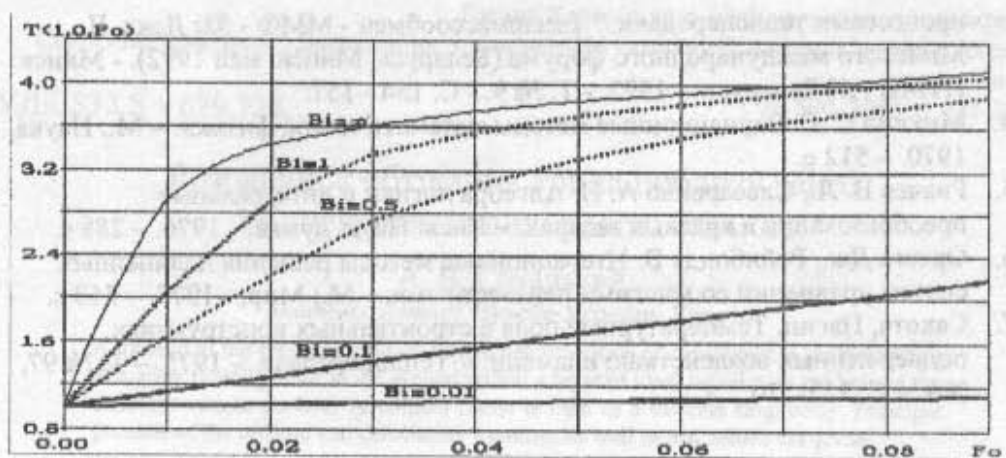


Рис. 3. Семейство температурных кривых для колонны шестиугольного сечения, температурная кривая E-119.

Данный подход сохраняет свою эффективность и в тех случаях, когда строительный материал анизотропен или армирован и позволяет эффективно проводить расчеты температурных полей для колонн и строительных элементов различных поперечных сечений, а также проводить качественный анализ зависимостей температурных полей в этих элементах от их геометрических параметров.

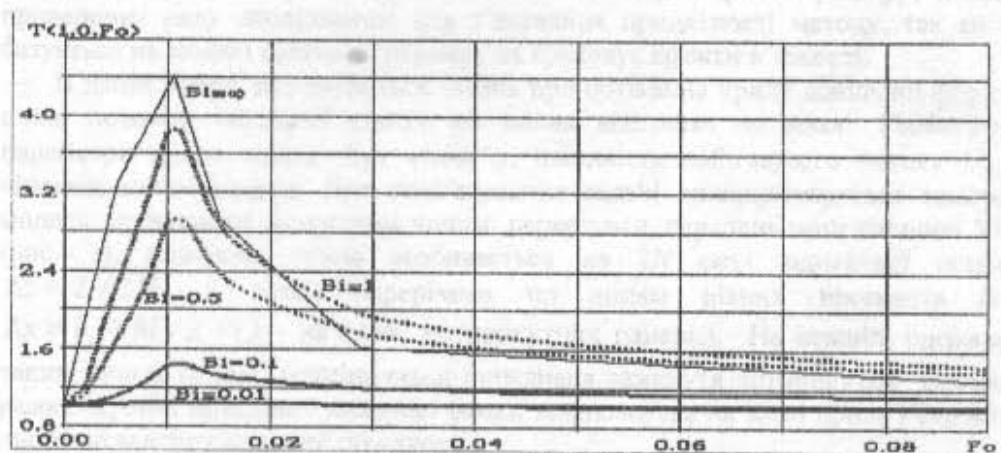
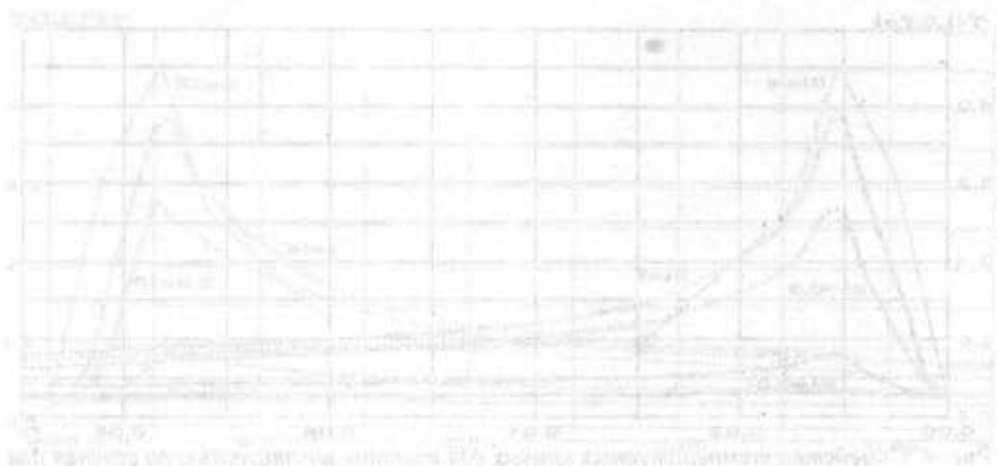


Рис. 4. Семейство температурных кривых для колонны шестиугольного сечения для случая кратковременного воздействия пламени высокой интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, - 1971. — 552 с.
2. Мацевитый Ю. М. Электрическое моделирование нелинейных задач технической теплофизики. — Киев: Наук. думка, - 1977. — 254 с.
3. Слесаренко А. П. Регионально-аналитический и проекционно-разностный методы в математическом моделировании, оптимизации и управлении

- процессами теплопередачи // Теплообмен - ММФ - 92: Докл. II Минского международного форума (Беларусь, Минск, май 1992). - Минск: ИТМО АН Беларусі. - 1992. - Т. № 9. - С. 154 - 157.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физики. - М.: Наука, - 1970. - 512 с.
 5. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. - Киев: Наук. думка, - 1976. - 288 с.
 6. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, - 1975. - 558 с.
 7. Сахота, Пагни. Температурные поля в строительных конструкциях, подверженных воздействию пламени. // Теплопередача. - 1975. - Т. № 97, №4. - С. 113-120.



ЛІТОВАЦІЯ

Літванія А. А. Багачук і інш. - М.: Наука, - 1971. - 222 с.

Літванія С. М. - М.: Наука, - 1971. - 222 с.

Літванія П. - М.: Наука, - 1971. - 222 с.

Сен
УДК

До
відста
можл
лігаль
відста
аерод
викор
Застос
землі,
прове
базуєт
В
плані
парам
відста
модел
(рис.
 $\Delta z =$
 $\Delta x =$
таким
рамка
нього
Зас
і пото
в вигл

де Φ_{∞}
вихор