Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.853
№ 833, 2008, с.3-16

Поиск прямоугольной оболочки минимальной площади для набора ориентированных прямоугольников

А. В. Бабкина, Н. Ю. Гуляева, А. В. Карташов
Харьковский национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковського «ХАИ», Украина

The problem of search of a global extremum in a problem of minimization of the area of a rectangular hull for a set of the oriented rectangulars is considered. It is offered to apply modification of a method of the consecutive analysis of the variants using specificity of mathematical model of the given problem to solve the problem.

1. Введение

Рассматриваемая в данной работе задача принадлежит классу задач раскроя-упаковки (Cutting&Packing, C&P). Задачи раскроя-упаковки представляют собой важный прикладной раздел оптимизационного геометрического проектирования. Внимание, которое уделяется совершенствованию методов решения этих задач, обуславливается как широким практическим применением задач в различных отраслях производства, так и их принадлежностью к NP-трудным проблемам [1].

В рамках класса задач упаковки и раскроя все проблемы объединены единой логической основой, а именно: наличием двух видов объектов – малых и крупных, для которых решается задача оптимального размещения малых объектов в крупные. В задачах *ортогональной* упаковки прямоугольных объектов в качестве малых объектов выступают заготовки прямоугольной формы, ящики различных размеров, а в качестве крупных – материал, поступающий в виде рулонов, полос, прямоугольных листов, стержней, контейнеры различной емкости. Стороны размещаемых прямоугольников должны быть параллельны сторонам области размещения.

О научной и практической значимости задач *ортогональной* упаковки свидетельствует обилие научных публикаций на эту тему. В этой области известны работы Санкт-Петербургской (В.В.Бухвалова, И.В.Романовский), Новосибирской (В.Л. Береснев, Э.Х.Гимади, А.А.Колоколов, Ю.А.Кочетов), Петрозаводской (В.А.Воронин, В.А.Кузнецов), Уфимской (А.Ф.Валеева, Э.А.Мухачева), Харьковской (Ю.Г.Стоян, С.Л. Магас, М.В.Новожилова) школ. За рубежом многие ученые занимаются этой проблемой. Наиболее известны работы Х.Дикхоффа (H.Dyckhoff) [2, 3], А.Бортфельда (A.Bortfeld), И.Фолкнера (E.Folkenauer), Е.Хоп-пер (E.Hopper) [4], С.Имахори (S.Imahori), С.Мартелло (S.Martello), Г.Шайтхауера (G.Sheithauer) [2, 5], П.Ванг (P.Wang), Г.Вешера (G.Wascher) и другие.

Для задач с достаточно большим количеством размещаемых объектов чаще всего применяются приближенные методы. Ниже обобщены результаты работ, опубликованных за последнее десятилетие учеными упомянутых выше школ, которые являются продолжением и развитием работ, проводимых уже более 40 лет в области оптимизационного геометрического проектирования.

В работе [6] ученые Уфимской школы Мухачева Э.А. и Мухачева (Филиппова) А.С. используют *блочную* модель упаковки для решения задачи ортогонального размещения. Эта технология позволяет свести двумерную задачу размещения к набору одномерных задач, которые можно решить методами линейного программирования с помощью простых эвристик. В работе [7] приводятся теоретические основы блочной технологии, блочный способ определения нижних границ и поиска локально-оптимального решения в их окрестности, основные способы конструирования упаковок на базе блочных структур: «замещения» и «двойных списков», их базовые и улучшенные версии. В работах [7-9] к задачам двумерной упаковки применяют генетические алгоритмы блочной структуры с различными декодерами. В диссертационной работе Валеевой А.Ф. [10] n-мерная ($n = 1,2,3$) задача ортогональной упаковки решается в рамках единого метода динамического перебора в детерминированном и рандомизированном вариантах, основанного на декомпозиции задачи на множество задач 0-1 рюкзак. Также предложен метод перебора с усечением на базе перебора различных вариантов упаковки путем обмена предметов между контейнерами. В этой и других работах, посвященных разработке методов решения задач ортогональной упаковки, автор также использует метаэвристики муравьиной колонии и имитации отжига.

В результате исследований, проведенных учеными Новосибирской школы, также разработан набор эффективных эвристических методов для решения данных задач. В своих работах [11, 12] Ю.А. Кочетов использовал кодирующую схему "Ориентированные деревья" (O-Tree) в стандартной схеме имитации отжига, поиск чередующихся окрестностей (Variable Neighborhood Search), представляя допустимые решения задачи в виде графа.

В Московском Институте системного программирования (ИСП) Российской академии наук (РАН) сотрудники группы «Дискретная математика и ее приложения» также решают ортогональную задачу размещения, используя приближенные методы, в частности, онлайновые и шельфовые алгоритмы [13-17].

Данный краткий обзор показывает, что к настоящему времени разработано и подробно описано множество достаточно эффективных эвристических методов решения, определяющих некоторое хорошее допустимое решение задачи ортогональной упаковки, которое, как правило, является локальным экстремумом. Однако построению точных методов глобальной оптимизации посвящено значительно меньшее число работ.

Среди задач размещения геометрических объектов более изученной является задача размещения их в полубесконечной полосе с минимизацией длины ее занятой части. Для этой задачи построена адекватная математическая модель с линейной функции цели и разработаны методы поиска глобального [18,19] и локального экстремума [20-22].

В работе Магаса С.Л. [18] впервые построена математическая модель этой задачи, позволяющая находить глобальный экстремум. Эта модель была основана на использовании структур линейных неравенств. Метод, предлагаемый в этой работе, заключается в формировании и переборе всевозможных выпуклых подмножеств области допустимых решений по методу ветвей и границ и решении в каждой вершине дерева задачи линейного программирования для получения нижней оценки.

В работе Новожиловой М.В. [19] рассматривается та же математическая модель задачи и предлагается метод и алгоритм решения, использующий тот факт, что решение лежит в крайней точке области допустимых решений. Данный метод предполагает построение множества систем уравнений, описывающего все вершины области допустимых решений. Число систем уравнений, которые необходимо решить для определения системы уравнений, задающей точку глобального минимума, меньше числа систем неравенств, определяющих выпуклые подобласти области допустимых решений и построенных по методу, предложенному в работе [18].

Задача минимизации площади прямоугольной оболочки размещаемых прямоугольников решается в работе [11], но приближенными методами. Задача нахождения прямоугольной оболочки минимальной площади для двух непересекающихся многоугольников рассматривалась в работах [23, 24] и в общем случае в работах [25,12]. В работе [25] показано, что эта задача является NP-полной, а в работе [12] рассматривается применение эвристического метода для ее решения.

Целью данной работы является модификация метода поиска глобального минимума, описанного в работе [19], для задачи нахождения прямоугольной оболочки минимальной площади для набора размещаемых прямоугольников.

2. Постановка задачи исследования

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется область $S_0 = \left\{ (x^1, x^2) \middle| x^1 \geq 0, x^2 \geq 0 \right\}$ и n прямоугольников.

Каждый прямоугольник $T_i, i = \overline{1,n}$, задается своими размерами $a_i^1 \times a_i^2$. Прямоугольник T_i, координаты левого нижнего угла которого определяются вектором $\vec{X}_i^{\,T} = (x_i^1, x_i^2)$, будем обозначать как $T_i(\vec{X}_i), i = \overline{1,n}$, (рис. 1). Необходимо разместить прямоугольники $T_i, i = \overline{1,n}$, т.е. определить такие значения векторов $\vec{X}_i^T = (x_i^1, x_i^2)$, $i = \overline{1,n}$, при которых площадь их прямоугольной оболочки будет минимальной, и прямоугольники не будут пересекаться между собой.

Задача рассматривается в пространстве всех переменных задачи – R^{2n}. Вектор переменных задачи $\vec{X}^T = (x_i^1 \quad x_i^2 \quad \dots \quad x_n^1 \quad x_n^2) \in R^{2n}$. Математическая постановка рассматриваемой задачи может быть представлена следующим образом:

$$\text{найти} \min_{X \in D \subset R^{2n}} Z$$

где функция цели

$$Z = (\max_{i=1,n}(x_i^1 + a_i^1)) \cdot (\max_{i=1,n}(x_i^2 + a_i^2)), \qquad (2.1)$$

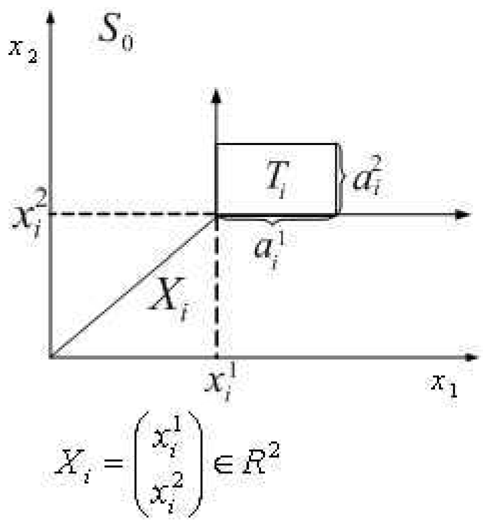

Рис.1. Основные обозначения

Область допустимых решений D описывается условиями:

а) Прямоугольники должны принадлежать области S_0:

$$T_i\left(\vec{X}_i\right) \subseteq S_0,\ \forall i = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

б) Прямоугольники не должны пересекаться между собой:

$$\operatorname{int} T_i(\vec{X}_i) \bigcap \operatorname{int} T_j(\vec{X}_j) = \varnothing,\ \begin{matrix} i = \overline{1, n-1} \\ i < j \le n \end{matrix} \tag{2.3}$$

Условие (2.2) задает условия размещения прямоугольника $T_i\left(\vec{X}_i\right)$ в области S_0 и включает в себя неравенства вида:

1) $T_i\left(\vec{X}_i\right)$ касается или находится правее левой грани области: $x_i^1 \ge 0$.

Обозначим $f_{0i}^1\left(\vec{X}_i\right) = -x_i^1$, тогда

$$f_{0i}^1\left(\vec{X}_i\right) \le 0 \tag{2.4}$$

2) $T_i\left(\vec{X}_i\right)$ касается или находится выше нижней грани области: $x_i^2 \ge 0$.

Обозначим $f_{0i}^2\left(\vec{X}_i\right) = -x_i^2$, тогда

$$f_{0i}^2\left(\vec{X}_i\right) \le 0 \tag{2.5}$$

Выполнение условия (2.2) для всех прямоугольников будет определяться предикатом:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{2} f_{0i}^k\left(\vec{X}_i\right) \le 0$$

Условие (2.3) определяет условия взаимного непересечения прямоугольников $T_i(\vec{X}_i)$ и $T_j(\vec{X}_j)$, $i, j = \overline{1,n}, i \neq j,$ и включает в себя следующие четыре случая:

1) $T_i(\vec{X}_i)$ лежит правее $T_j(\vec{X}_j)$ (рис. 2а):

$$x_i^1 - x_j^1 \geq a_j^1 \text{ или } f_{ji}^1\left(\vec{X}_j, \vec{X}_i\right) = x_j^1 - x_i^1 + a_j^1,$$

$$f_{ji}^1\left(\vec{X}_j, \vec{X}_i\right) \leq 0; \tag{2.6}$$

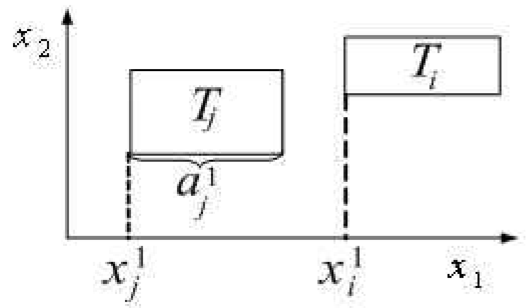

Рис.2а. T_i расположен правее T_j

2) $T_i(\vec{X}_i)$ лежит выше $T_j(\vec{X}_j)$ (рис. 2б):

$$x_i^2 - x_j^2 \geq a_j^2 \text{ или } f_{ji}^2\left(\vec{X}_j, \vec{X}_i\right) = x_j^2 - x_i^2 + a_j^2,$$

$$f_{ji}^2\left(\vec{X}_j, \vec{X}_i\right) \leq 0; \tag{2.7}$$

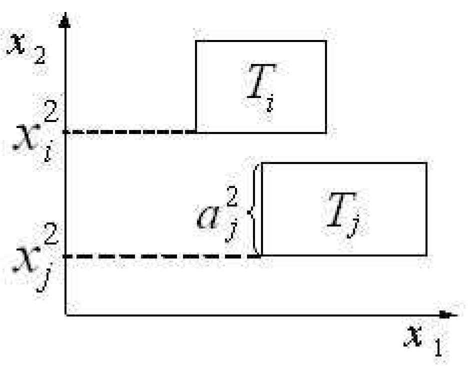

Рис.2б. T_i расположен выше T_j

3) $T_i(\vec{X}_i)$ лежит левее $T_j(\vec{X}_j)$ (рис. 2в):

$$x_j^1 - x_i^1 \geq a_i^1 \text{ или } f_{ij}^1\left(\vec{X}_i, \vec{X}_j\right) = x_i^1 - x_j^1 + a_i^1,$$

$$f_{ij}^1\left(\vec{X}_i, \vec{X}_j\right) \leq 0; \tag{2.8}$$

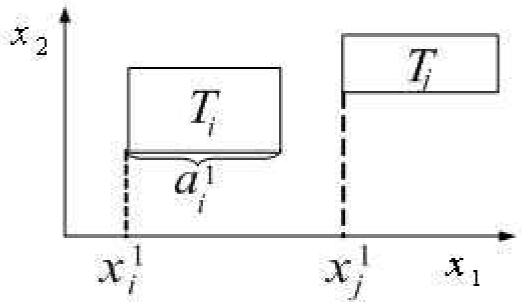

Рис.2в. T_i *расположен левее* T_j

4) $T_i(\vec{X}_i)$ лежит ниже $T_j(\vec{X}_j)$ (рис. 2г):

$x_j^2 - x_i^2 \ge a_i^2$ или $f_{ij}^2(\vec{X}_i, \vec{X}_j) = x_i^2 - x_j^2 + a_i^2$,

$$f_{ij}^2(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \le 0\,. \tag{2.9}$$

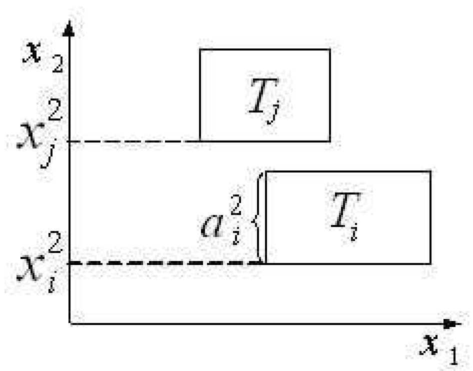

Рис.2г. T_i *расположен ниже* T_j

Для выполнения условия (2.3) для одной пары прямоугольников $T_i(\vec{X}_i)$ и $T_j(\vec{X}_j)$ достаточно выполнения одного из неравенств (2.6)-(2.9), т.е. условие (2.3) описывается предикатом:

$$\left(\bigvee_{k=1}^{2}\left(f_{ij}^k(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \le 0\right)\bigvee_{k=1}^{2}\left(f_{ji}^k(\vec{X}_j, \vec{X}_i) \le 0\right)\right)$$

Для всех пар прямоугольников $T_i(\vec{X}_i)$ и $T_j(\vec{X}_j)$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$, условие (2.3) эквивалентно выполнению предиката:

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1}\bigwedge_{j=i+1}^{n}\left(\bigvee_{k=1}^{2}\left(f_{ij}^k(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \le 0\right)\bigvee_{k=1}^{2}\left(f_{ji}^k(\vec{X}_j, \vec{X}_i) \le 0\right)\right)$$

Таким образом, область D в предикатном виде:

$$D = \left\{ \vec{X} \in R^{2n} \left| \begin{array}{l} \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \bigwedge\limits_{j=i+1}^{n} \left(\bigvee\limits_{k=1}^{2} \left(f_{ij}^{k}(\vec{X}_i, \vec{X}_j) \le 0 \right) \bigvee\limits_{k=1}^{2} \left(f_{ji}^{k}(\vec{X}_j, \vec{X}_i) \le 0 \right) \right) \\ \qquad\qquad \bigwedge\limits_{k=1}^{2} \bigwedge\limits_{i=1}^{n} f_{0i}^{k}\left(\vec{X}_i\right) \le 0 \end{array} \right. \right.$$

Математическая модель задачи построена в пространстве R^{2n}, которое порождается переменными задачи.

Свойства математической модели:

1) Функция цели - квадратична и псевдовогнута на области допустимых решений D. Псевдовогнутость функции цели была доказана в работе [26].

2) Решение задачи лежит в крайней точке области D. Это следует из псевдовогнутости функции цели. (См. например, [27]).

3) Область D – невыпукла при n>1 и имеет кусочно-линейную границу.

4) Количество неравенств, которое задает область D, равно $m=2n+2n(n-1)$.

5) В крайней точке области D обращаются в точное равенство как минимум $2n$ ограничений вида (2.4-2.9).

6) Задача многоэкстремальная с верхней оценкой локальных экстремумов - C_m^{2n}.

7) Система уравнений, описывающая крайнюю точку, должна иметь единственное решение, а значит, можно построить биекцию между переменными задачи и уравнениями системы, при этом каждой переменной будет соответствовать уравнение, ее содержащее.

8) Пусть имеется допустимое размещение объектов. Если есть возможность уменьшить для i-го объекта значение переменной x_i^1 и (или) x_i^2 при сохранении допустимости решения, то значение функции цели не увеличится. Значит, можно описать крайние точки только как пересечение уравнений, соответствующим ограничениям вида (2.4-2.7).

3. Метод решения задачи

Свойства (2.2-2.3) позволяют применить для решения рассматриваемой задачи модификацию метода последовательного анализа вариантов**,** предложенного в работе [19] для минимизации длины занятой части полосы.

На основании последнего свойства будем искать подозрительную на экстремум точку, соответствующую расположению объектов, при котором каждый объект касается грани области или другого объекта левой и нижней стороной. Тогда всегда найдется объект, который находится в углу области, т.е. для которого как точные равенства одновременно выполняются ограничения (2.4) и (2.5), и все прямоугольники можно упорядочить таким образом, что для каждого размещаемого T_i будут выполняться как точные равенства только следующие ограничения:

а) размещение по оси x_1:

ограничения вида (2.4) – T_i левой гранью касается грани области *или* ограничения вида (2.6) – T_i левой гранью касается одного из уже расположенных объектов.

б) размещение по оси x_2:

ограничения вида (2.5) – T_i нижней гранью касается грани области *или* ограничения вида (2.7) – T_i нижней гранью касается одного из уже расположенных объектов.

3.1. Построение дерева решений

Сформулированные выше правила позволяют находить подозрительные на экстремум точки в результате последовательного размещения всех объектов. Для перебора всех таких решений необходимо построить дерево решений на перестановках объектов. Фрагмент дерева для перестановки $(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_i,\ \ldots,\ k_n)$ изображен на рисунке 3.

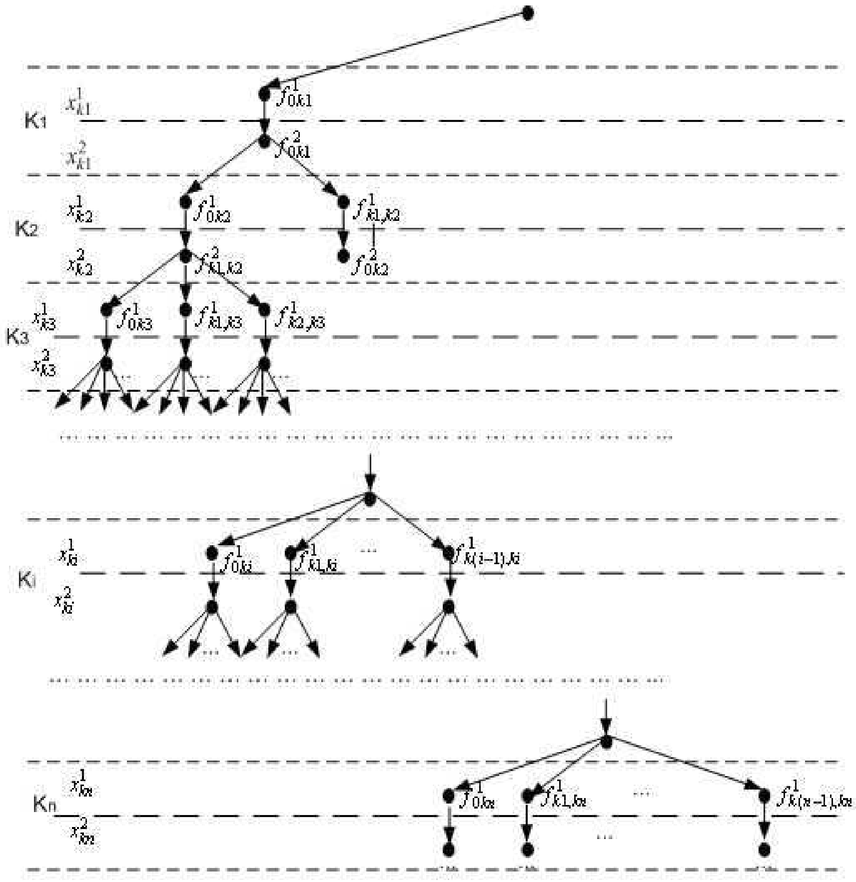

Рис.3. Фрагмент дерева для перестановки $(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_i,\ \ldots,\ k_n)$

Всего уровней дерева $2n$, каждые два последующих уровня соответствуют размещению очередного k_i-го объекта. Нечетный уровень определяет координату x_{ki}^1 объекта, а четный – x_{ki}^2.

Правило ветвления на четном уровне. При размещении k_i-го объекта выбирается одно из i уравнений касания левой стороной объекта грани области или одного из *(i-1)* уже размещенных объектов.

Правило ветвления на нечетном уровне. При размещении k_i-го объекта выбирается одно из уравнений касания нижней стороной объекта грани области или одного из *(i-1)* уже размещенных объектов, кроме того объекта, которого k_i-й объект касается левой стороной. Другими словами, если на нечетном уровне выбрано уравнение $f_{ki,kj}^1$, то на следующем уровне нельзя выбрать уравнение $f_{ki,kj}^2$. Иначе это приведет к случаю, изображенному на рис.4, который, очевидно, может только ухудшить функцию цели. Это правило запрещает размещения, при котором один прямоугольник касается другого сверху и справа одновременно.

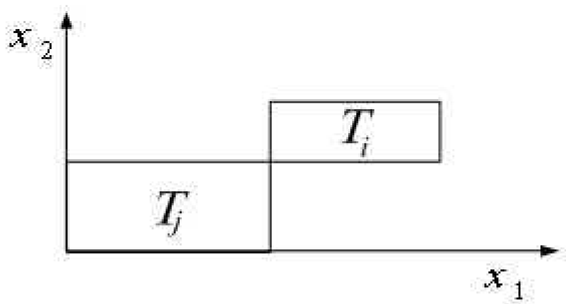

Рис.4. Размещение, исключаемое правилом ветвления на нечетном уровне

Таким образом на каждом четном уровне для очередного размещаемого k_i-го объекта определяются обе координаты. Вариантов выбора уравнения для переменной x_{ki}^2 при уже выбранном уравнении для x_{ki}^1 оказывается *(i-1)*. Для каждого такого варианта проверяются четыре правила отсечения, позволяющие всегда оставить не более одного варианта. Именно это показано на рис.3.

3.2. Правила отсечения

Правило 1. Добавив на четном уровне уравнение $f_{ki,kj}^2$, мы получаем конкретные значения для вектора $\overrightarrow{X}^T = \begin{pmatrix} x_{k1}^1 & x_{k1}^2 & x_{k2}^1 & x_{k2}^2 & \ldots & x_{kj}^1 & x_{kj}^2 \end{pmatrix}$. Проверяем, удовлетворяют ли эти значения неравенствам (2.6-2.7). Это позволит исключить из рассмотрения случаи, когда $\vec{X} \notin D$.

Проиллюстрируем данное правило на примере. Для перестановки (1, 2, 3) фрагмент дерева изображен на рисунке 5а, а расположение, соответствующее концевой вершине f_{03}^2 - на рисунке 5б. Очевидно, что для прямоугольников T_2 и T_3 условия (2.6)-(2.7) не выполняются.

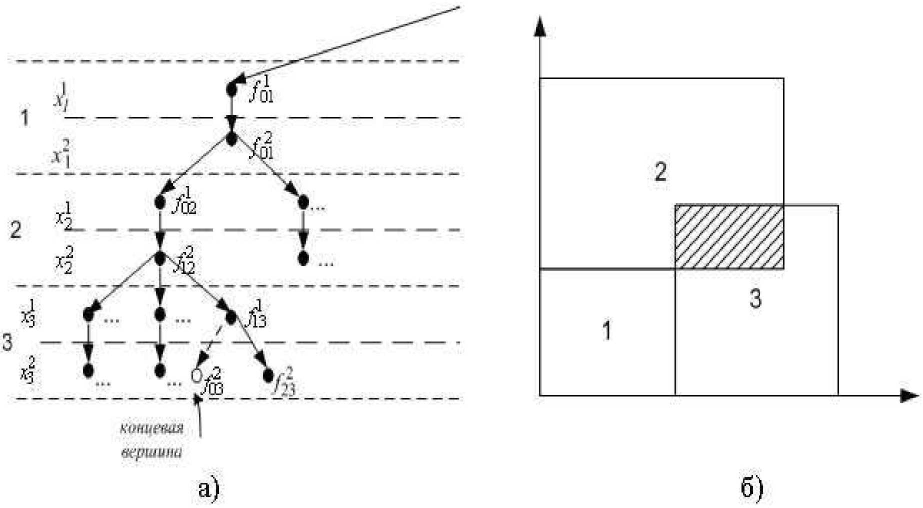

Рис.5. Правило отсечения 1

Правило2. Пусть при размещении прямоугольника T_i, в систему добавляются уравнения f_{ji}^1 (T_i левее T_j) и f_{ki}^2 (T_i выше T_k).

$$\begin{cases} x_i^1 < x_k^1 + a_k^1 & * \\ x_i^1 > x_k^1 - a_i^1 & \\ x_i^2 < x_j^2 + a_j^2 & ** \\ x_i^2 > x_j^2 - a_i^2 & \end{cases} \tag{3.1}$$

Если при этом не выполняется хотя бы одно неравенство из системы (3.1), то это означает, что прямоугольник T_i неплотно расположен по отношению к объектам T_j и T_k, и вершина признается концевой (рис.6).

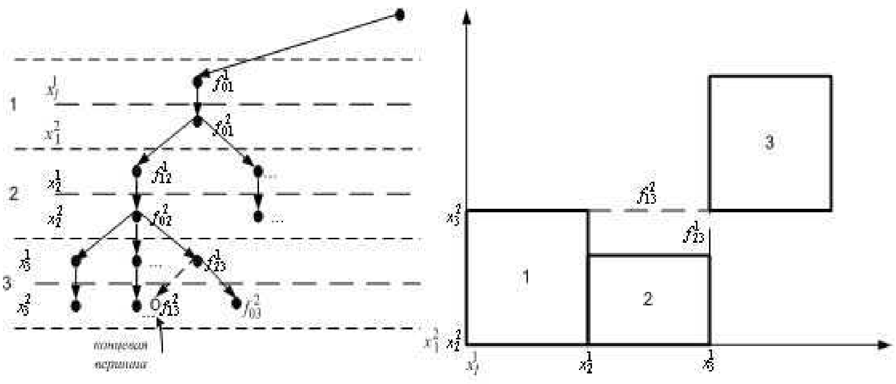

Рис.6. Правило отсечения 2: фрагмент дерева и расположение, соответствующее концевой вершине f_{13}^2

В данном примере не выполняются неравенства (*) и (**).

Правило3. Если одна и та же точка описывается разными системами уравнений, то оставляется для дальнейшего ветвления только одна из них (рис.7).

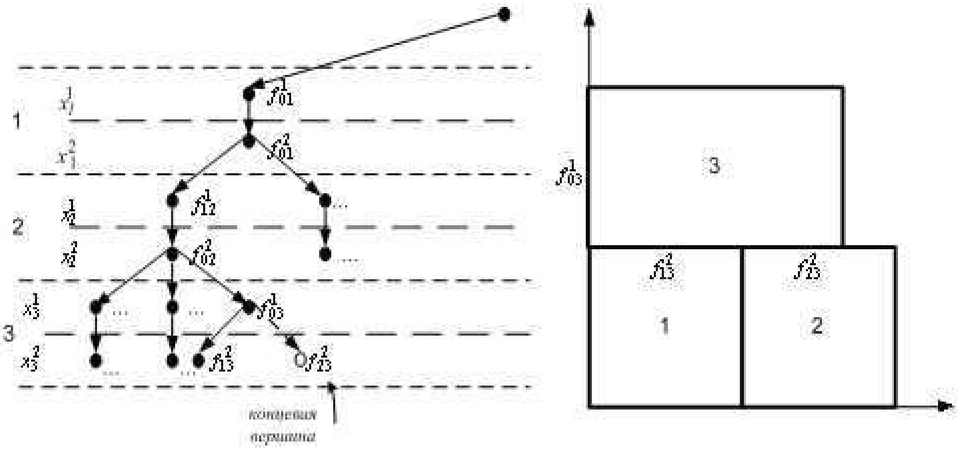

Рис.7. Правило отсечения 3: фрагмент дерева и расположение при выборе любого из уравнений f_{23}^2 или f_{13}^2

Правило4. Отсечение бесперспективных вершин на каждом нечетном и четном уровне ведется по текущей верхней оценке значения функции цели.

3.3. Оценка вычислительной сложности алгоритма

Правила построения дерева и правила отсечения бесперспективных вершин позволяют на каждом четном уровне добавлять к построенной выше системе единственное уравнение. Значит, для одной перестановки количество вершин на нижнем уровне дерева будет: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (см. рис.3: фрагмент дерева для одной перестановки). А так как количество перестановок также определяется как $n!$, то число вершин на нижнем уровне всего дерева будет составлять $(n!)^2$.

3.4. Решение тестового примера

Метод был программно реализован. На рисунке 8 приведен графический результат решения одного тестового примера, выходные данные и оптимальные параметры размещения прямоугольников – в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные и оптимальные параметры размещения.

a_1^i, a_2^i	21,15	57, 12	26, 24	25, 34	14, 39	38, 22	33, 28
x_i^*, y_i^*	0, 24	0, 39	0, 0	40, 0	26, 0	65, 0	65, 22

Решение было получено за 22 секунды на компьютере Athlon 1600. Оптимальное значение площади прямоугольной оболочки – 5253, а коэффициент заполнения при этом составляет 89,9%.

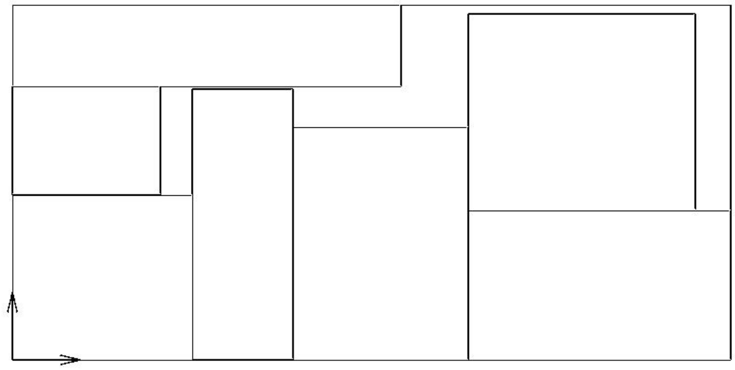

Рис. 8. Пример графического решения

4. Выводы и направления дальнейших исследований

В работе впервые рассмотрен метод поиска глобального минимума для задачи размещения с нелинейной невыпуклой функцией цели и приведена оценка его вычислительной сложности.

В дальнейшем предполагается, во-первых, применить рассмотренный подход к задачам нахождения прямоугольной оболочки минимальной площади для кругов и многоугольников, и, во-вторых, попытаться его усовершенствовать, улучшив оценку вычислительной сложности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beasley J. E. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure // European Journal of Operational Research. – 1985. – № 33. – С. 49-65.
2. Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J. Cutting and packing // Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, M. Dell'Amico, F. Maffioli, S. Martello (eds.), John Wiley&Sons. – 1997. – С. 393-412.
3. Dykhoff H. A typology of cutting and packing problems // European Journal of Operational Research. – 1990. – № 44. – С. 145-159.
4. Hopper E., Turton B. An empirical investigation of meta-heuristic and heuristic algorithms for a 2D packing problem // European Journal of Operational Research. – 2001. – № 128. – С. 34-57.
5. Belov G., Scheithauer G. A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths // European Journal of Operational Research. – 2002. – № 141. – С. 274-294.
6. Мухачева Э. А., Мухачева А. С. Л. В. Канторович и задачи раскроя-упаковки: новые подходы для решения комбинаторных задач линейного раскроя и прямоугольной упаковки // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004. – т. 312. – С.239-255.

7. Филиппова А. С. Методы решения задач ортогональной упаковки на базе технологии блочных структур. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – Уфа, 2007. – 33 с.
8. Мухачева Э. А., Мухачева А. С., Чиглинцев А. В. Генетический алгоритм блочной структуры в задачах двумерной упаковки. // Информационные технологии. – 1999. – № 11. – С.13-18.
9. Мухачева Э. А., Мухачева А. С. Задача прямоугольной упаковки: методы локального поиска оптимума на базе блочных структур // Автоматика и телемеханика. Наука. – 2004. – № 2. – С.101-112.
10. Валеева А. Ф. Конструктивные методы решения задач ортогональной упаковки и раскроя. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – Уфа, 2006 – 35 с.
11. Кочетов Ю. А., Руднев А. С. Алгоритм имитации отжига для задач прямоугольной упаковки // Труды конференции "Дискретный анализ и исследование операций (DAOR'04)", Новосибирск, 2004.
12. Kochetov Y., Velikanova Y. Variable Neighborhood Search for the 2D orthogonal packing. // Proceedings of 18th Mini Euro Conference on VNS, 2005.
13. Поспелов А.И. Анализ одного алгоритма упаковки прямоугольников, связанного с построением расписаний для кластеров // Математические методы и алгоритмы, сборник трудов ИСП РАН. – 2004. – т. 6. – С.7-12.
14. Жук С.Н. Анализ некоторых эвристик упаковки прямоугольников в несколько полос // Математические методы и алгоритмы, сборник трудов ИСП РАН. – 2004. – т.6. – С.13-28.
15. Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И. Вероятностный анализ некоторых эвристик упаковки прямоугольников в полосу // Труды 6-ой Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва, 7 -11 декабря, 2004 г.). – М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ имени М.В.Ломоносова, 2004. – С.178-181.
16. Кузюрин Н.Н., Поспелов А.П. Вероятностный анализ различных шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу // Математические методы и алгоритмы, сборник трудов ИСП РАН. – 2006. – т.12. – С.17-26.
17. Жук С.Н. Приближенные алгоритмы упаковки прямоугольников в несколько полос // Дискретная математика. – 2006. – т. 18. – С.91-105.
18. Магас С.Л. Методы решения экстремальных задач размещения многоугольных геометрических объектов в полосе. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. – М., 1984. – 16 с.
19. Новожилова М.В. Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. – Препринт/Институт проблем машиностроения. – Харьков, 1988. – № 292. – 48 с.
20. Стоян Ю.Г., Новожилова М.В. Метод поиска локального экстремума в задаче размещения многоугольников в полосе. – Препринт/Институт проблем машиностроения. – Харьков, 1987. – № 263. – 24 с.

21. Стоян Ю.Г., Новожилова М.В., Карташов А.В. Математическая модель и оптимизация линейных $E_k(R^2)$ – задач размещения. – Препринт/Институт проблем машиностроения. – Харьков, 1991. – № 353, – 26 с.
22. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V., Kartashov A.V., Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation roblem. // European Journal of Operational Research. – 1996. – №92. – С. 193-210.
23. Adamovuch M., Albano A. Nesting two-dementional shapes in rectangular modules // Comp. Aided Bes. – 1976. – №1. – С. 27-33.
24. Гиль Н.И., Коротин К.Е. "Склейка" двух многоугольников по критерию минимума площади описанного прямоугольника. – Препринт/Институт проблем машиностроения. – Харьков, 1991. – № 386. – 28 с.
25. Baker B. S., Coffman E. G., Rivest R. L. Ortoganal Packing in Two Dimensions // SIAM J. Comput. – 1980. – № 9(4) – С. 846–855.
26. Карташов А.В., Бабкина А.В., Пудло Р.А., Использование псевдовогнутости функции f(x,y)=xy при оптимизации раскроя листов в машиностроении // Принята к печати в «Проблемы машиностроения», Харьков.
27. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. Пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1973. – 312 с.