

Дискретная модель системы с отрицательными обратными связями[†]

Ю. Г. Беспалов, Л. Н. Дереча, Г. Н. Жолткевич, К. В. Носов

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина
Харьковский НИИ судебных экспертиз им. проф. Н. С. Бокариуса, Украина*

The discrete dynamic model for description of attributes interaction is proposed and investigated in proposed article. This interaction reflects real relations between attributes of biological or other natural objects. We proposed the solving of problem of structural identification, i. e. determination of model structure according to observable data. Such a model may have vast application in biology, ecology and other adjacent subjects.

1. Общая постановка задачи и цель работы

Теория динамических систем являются удобным средством построения моделей сложных объектов в разных областях, в том числе в биологии, экологии и смежных науках. Среди многочисленных приложений динамических систем в дисциплинах биологического цикла можно назвать описание взаимодействия биосистем, включающих несколько видов организмов (например, модели численности конкурирующих видов и видов, находящихся в отношениях «хищник-жертва»), фармакокинетику, эпидемиологию.

Дискретные модели, обычно являющиеся аналогами соответствующих континуальных, представляют собой одно из важнейших направлений в общей теории динамических систем. При этом дискретные модели иногда и более адекватно описывают исследуемый процесс, например, если исследуется численность популяций и для практических целей достаточно оценки в баллах.

Среди важных применений дискретных динамических моделей назовем исследование различных системных аспектов отношений конкуренции двух или более видов [1, 2], свойств популяционной динамики [3-4] и многие другие.

Одной из главных задач, решаемых при моделировании динамических систем, является идентификация моделей, которую, как правило, разделяют на структурную, параметрическую и непараметрическую [5-10]. Теория идентификации располагает большим набором инструментов, применяемых к различным моделям. Так, среди непараметрических методов можно назвать методы, основанные на частотных, временных и спектральных характеристиках явления, среди параметрических — методы наименьших квадратов, максимального правдоподобия, стохастической аппроксимации, вспомогательных переменных и другие.

В настоящей работе предложена дискретная динамическая модель системы взаимодействующих признаков, отражающая некоторые важные представления

[†] Работа выполнена при поддержке средств Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф 25.6/024).

теоретической биологии о связи между биообъектами и их параметрами. Ставится задача идентификации модели по входным данным, позволяющая путем решения некоторой оптимизационной задачи выявить свойства и характеристики исследуемой модели. Хотя поставленная задача идентификации допускает различные трактовки (поиск структуры модели, числовых параметров или параметров, принадлежащих некоторым функциональным пространствам), мы рассматриваем ее как задачу структурной идентификации.

Таким образом, целью работы является построение модели системы взаимодействующих признаков, демонстрация связи структуры системы и наблюдаемых данных, постановка задачи идентификации модели по входному массиву.

2. Описание системы взаимодействия признаков

Пусть система образована N признаками A_1, A_2, \dots, A_N , каждый из которых принимает K значений $1, 2, \dots, K$. Признаком считаем любую числовую характеристику исследуемого объекта, которая принимает несколько упорядоченных значений (которые после преобразования можно выразить конечным рядом $1, 2, \dots, K$) или сводится к этому ряду длины K путем дискретизации исходной шкалы. Значения признаков измеряются (наблюдаются) в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots, K$. Таким образом, значение признака A_j в моменты времени $t = 0, 1, \dots, K$ равно $A_j(0), A_j(1), A_j(2), \dots, A_j(K)$.

Матрицей состояний системы признаков назовем бесконечную вправо матрицу

$$\begin{pmatrix} A_1(0) & A_1(1) & A_1(2) & \dots \\ A_2(0) & A_2(1) & A_2(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ A_N(0) & A_N(1) & A_N(2) & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

включающую состояния системы в моменты $t = 0, 1, \dots, K$.

Таким образом, состояние системы в момент времени t есть вектор $(A_1(t), A_2(t), \dots, A_N(t))^T$. В дальнейшем считаем, что система строго детерминирована, и ее состояние в момент времени t полностью определяется состоянием в момент $t-1$. В соответствии с математической теорией систем [11], такую систему можно классифицировать как свободную динамическую систему с дискретным временем, однако в дальнейшем для удобства описания системы мы будем придерживаться собственной терминологии.

Из того, что система в моменты времени $t = 0, 1, \dots, K$ может принимать только конечное число состояний (именно, K^N), следует, что существуют положительное целое T , которое назовем периодом состояний системы, и положительное целое s_0 , такие, что выполняется условие периодичности

$$A_j(s) = A_j(s+T), \forall s \geq s_0.$$

Из матрицы (1) выделим минор ($s \geq s_0$)

$$\begin{pmatrix} A_1(s) & A_1(s+1) & K & A_1(s+T-1) \\ A_2(s) & A_2(s+1) & K & A_2(s+T-1) \\ M & M & O & M \\ A_N(s) & A_N(s+1) & K & A_N(s+T-1) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

который полностью описывает поведение системы.

Введем понятие связи между признаками. Пусть $\Omega = \{-, 0, +\}$, т. е. Ω — множество, состоящее из трех элементов. Связь между признаками A_i и A_j зададим как элемент множества $\Omega \times \Omega$, обозначив ее как $\Lambda(A_i, A_j) = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$.

Содержание связи $\Lambda(A_i, A_j)$ следующее:

1. Если $\omega_1 = \{-\}$, то увеличение значения признака A_j уменьшает значение признака A_i .
2. Если $\omega_1 = \{0\}$, то изменение значения признака A_j не влияет на значение признака A_i .
3. Если $\omega_1 = \{+\}$, то увеличение значения признака A_j увеличивает значение признака A_i .

При этом если $\Lambda(A_i, A_j) = (\omega_1, \omega_2)$, то $\Lambda(A_j, A_i) = (\omega_2, \omega_1)$.

Для каждого признака A_j определим подмножество признаков, с которыми A_j имеет связь (s, u) , $s, u \in \Omega$

$$L_j(s, u) = \{A_i \mid \Lambda(A_j, A_i) = (s, u)\}.$$

При этом подмножества $L_j(+, +)$, $L_j(-, -)$, $L_j(0, 0)$ могут иметь от 0 до N признаков (считаем, что признак A_j может находиться с собой в связи $(+, +)$, $(-, -)$, $(0, 0)$), а остальные подмножества имеют от 0 до $N-1$ элементов (признак не может иметь эти связи с собой).

Связи между признаками удобно записывать в матрице отношений. Если имеется N признаков A_1, A_2, K, A_N , для которых $\Lambda(A_j, A_i) = (\omega_j, \omega_i)$, $\omega_j \in \Omega$, $\omega_i \in \Omega$, то матрицей отношений назовем следующую матрицу

$$\begin{bmatrix} & A_1 & A_2 & \cdots & A_N \\ A_1 & (\omega_1, \omega_1) & & & \\ A_2 & (\omega_2, \omega_1) & (\omega_2, \omega_2) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_N & (\omega_N, \omega_1) & (\omega_N, \omega_2) & \cdots & \end{bmatrix}$$

Связи выше главной диагонали опущены, т. к. они однозначно восстанавливаются по связям под диагональю.

Обозначим $\pi = \{1, 2, K, K\}$, а $N_j(s, u)$ — число признаков в подмножестве $L_j(s, u)$. Переход от состояния $(A_1(t), A_2(t), K, A_N(t))^T$ к состоянию

$(A_1(t+1), A_2(t+1), K, A_N(t+1))^T$ осуществляется с помощью N функций перехода F_j

$$\mathbf{u}^{N_j(+,+)+N_j(+,0)+N_j(+,-)+N_j(-,+)+N_j(-,0)+N_j(-,-)} \rightarrow \dot{\mathbf{u}}.$$

Этот переход можно задать формулой

$$\begin{aligned} A_j(t+1) &= F_j(A_i(t) \in L_j(+,+), A_i(t) \in L_j(+,0), \\ A_i(t) &\in L_j(+,-), A_i(t) \in L_j(-,+), \\ A_i(t) &\in L_j(-,0), A_i(t) \in L_j(-,-) \end{aligned} \quad (3)$$

для всех $j = \overline{1, N}$.

Формула (3) описывает общий вид отношений перехода от состояния в момент времени t к состоянию в момент времени $t+1$. Задав начальные условия $(A_1(0), A_2(0), K, A_N(0))^T$ и систему отношений (3), получим матрицу состояний (1). Следует заметить, что если над набором признаков A_1, A_2, K, A_N произвести любую перестановку (соответственно переставив F_1, F_2, K, F_N), получим другую матрицу (1), которая будет отличаться от исходной переставленными строками, соответствующими перестановке A_1, A_2, K, A_N . Таким образом, матрица (1) описывает траекторию системы признаков с точностью до произвольной перестановки строк.

Для задания связей, характерных для реальных биологических, экологических и других систем, необходимо конкретизировать вид функций переходов F_j . Приведем два важных типа связей, отражающих эти соотношения.

2.1. Типы связей, присущие биологическим системам

1. Весовые функции.

Введем функции

$$\begin{aligned} \text{Inc}(A) &= \begin{cases} A+1, & \text{при } A < K, \\ K, & \text{при } A = K, \end{cases} \\ \text{Dec}(A) &= \begin{cases} A-1, & \text{при } A > 1, \\ 1, & \text{при } A = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Для каждого $j (j = \overline{1, N})$ обозначим $\varphi_{j,1}^{(s,u)}(\cdot), \varphi_{j,2}^{(s,u)}(\cdot), \dots, \varphi_{j,N_j}^{(s,u)}(\cdot)$ функции влияния признаков, с которыми A_j находится в связи (s,u) , $s \in \{+, -\}$, $u \in \Omega$.

Свойства этих функций следующие:

(i) функции заданы на дискретном множестве аргументов Ω ;

(ii) $\varphi_{j,k}^{(+,+)}(\cdot), \varphi_{j,k}^{(+,0)}(\cdot), \varphi_{j,k}^{(+,-)}(\cdot)$ — функции возрастающие;

(iii) $\varphi_{j,k}^{(-,+)}(\cdot), \varphi_{j,k}^{(-,0)}(\cdot), \varphi_{j,k}^{(-,-)}(\cdot)$ — функции убывающие;

(iv) $\varphi_{j,k}^{(+,+)}(1) = \varphi_{j,k}^{(+,0)}(1) = \varphi_{j,k}^{(+,-)}(1) = \varphi_{j,k}^{(-,+)}(1) = \varphi_{j,k}^{(-,0)}(1) = \varphi_{j,k}^{(-,-)}(1) = 0$.

Введем совокупность чисел $\delta_j > 0 (j = \overline{1, N})$, которые назовем порогами чувствительности.

Для состояния в момент t вычисляется следующая величина

$$\begin{aligned}
 d_j = & \sum_{A_k \in L_j(+,+)} \varphi_{j,k}^{(+,+)}(A_k(t)) + \sum_{A_k \in L_j(+,0)} \varphi_{j,k}^{(+,0)}(A_k(t)) + \\
 & + \sum_{A_k \in L_j(+,-)} \varphi_{j,k}^{(+,-)}(A_k(t)) + \sum_{A_k \in L_j(-,+)} \varphi_{j,k}^{(-,+)}(A_k(t)) + \sum_{A_k \in L_j(-,0)} \varphi_{j,k}^{(-,0)}(A_k(t)) + \\
 & + \sum_{A_k \in L_j(-,-)} \varphi_{j,k}^{(-,-)}(A_k(t)), j = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \quad (4)$$

В зависимости от значения d_j значение признака A_j изменяется по закону:

- 1) если $d_j \geq \delta_j$, то $A_j(t+1) = \text{Inc}(A_j(t))$;
- 2) если $d_j \leq -\delta_j$, то $A_j(t+1) = \text{Dec}(A_j(t))$;
- 3) если $-\delta_j < d_j < \delta_j$, то $A_j(t+1) = A_j(t)$.

Смысл приведенного правила состоит в следующем. Так, функции $\varphi_{j,k}^{(-,+)}(\cdot)$ отражают влияние на признак A_j тех признаков, с которыми он имеет отношение $(-,+)$, т. е. признаков из множества $L_j(-,+)$. Чем это влияние выше (т. е. чем бóльшие значения принимают $A_i(t-1)$ из $L_j(-,+)$, тем меньшие значения принимает величина d_j . Аналогичным образом "взвешивается" влияние других признаков, с которыми A_j имеет другие отношения. Если совокупное влияние взаимодействующих с A_j признаков, выраженное в (4), превосходит по модулю пороговое значение δ_j , то значение A_j изменяется на единицу.

2. Закон Либиха.

Для каждого j вычисляются

$$\begin{aligned}
 \lambda_j &= \min\{A_i(t) \in L_j(+,+), A_i(t) \in L_j(+,0), A_i(t) \in L_j(+,-)\}, \\
 \mu_j &= \max\{A_i(t) \in L_j(-,+), A_i(t) \in L_j(-,0), A_i(t) \in L_j(-,-)\}.
 \end{aligned}$$

Значение $A_j(t)$ находится в соответствии с формулой

$$A_j(t) = F_j(\lambda_j, \mu_j). \quad (5)$$

Формула (5) выражает смысл закона Либиха, согласно которому рост признака определяется так называемыми лимитирующими факторами. В нашем случае изменение значения признака A_j определяется максимальным значением признаков, с которыми он имеет связь $(-,+)$, $(-,0)$, $(-,-)$, а также минимальным значением признаков, с которыми он имеет связь $(+,0)$, $(+,0)$, $(+,-)$.

В опытных данных мы обычно не наблюдаем динамику, описанную отношениями (3), матрицу (1) или ее минор (2). Результатом опытных данных является таблица наблюдений

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1B} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NB} \end{pmatrix},$$

где наблюдениям соответствуют столбцы (B наблюдений), а строки — признакам.

Ниже предлагается процедура построения функций перехода F_j по таблице наблюдений \tilde{M} , позволяющая установить связи между признаками, в некотором смысле наиболее близкие к тем, которые формируют матрицу (2).

Предположим, что фиксировано число K и функции $\phi_{j,k}^{(s,u)}$ (для метода весовых функций) или функции F_j из (5) (для перехода по закону Либиха). В этом случае, задав произвольный вектор $(A_1(0), A_2(0), K, A_N(0))^T \in \mathbb{C}^N$ начальных условий и наборы $N_1^{(j,(s,u))}$, $N_2^{(j,(s,u))}$, ..., $N_{L_j(s,u)}^{(j,(s,u))}$ ($s = \{-, 0, +\}$, $u = \{-, 0, +\}$), получим матрицу состояний (1) и ее минор (2).

Для строк минора (2) вычислим корреляционную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & K & r_{1N} \\ r_{21} & 1 & K & r_{2N} \\ M & M & O & M \\ r_{N1} & r_{N2} & K & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании матрицы \tilde{M} вычислим корреляционную матрицу ее строк

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем следующую меру близости между корреляционными матрицами P и \tilde{P} .

$$D(P, \tilde{P}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (r_{ij} - \rho_{ij})^2. \quad (6)$$

Поставим задачу: минимизировать $D(P, \tilde{P})$ по всем векторам начальных условий $(A_1(0), A_2(0), \dots, A_N(0))^T$ и всем допустимым наборам $L_j(s, u)$, $s, u \in \Omega$, для всех j .

Поясним содержание этой задачи. Будем считать, что процесс в реальной системе, который мы непосредственно не наблюдаем, описывается циклической траекторией, представленной минором (2). В случайные моменты времени $t = s$, $s+1$, ..., $s+T-1$ с равной вероятностью производится наблюдение над системой, т. е. столбец $(A_1(t), A_2(t), K, A_N(t))^T$ заносится в таблицу наблюдений. Иными словами, столбцы таблицы наблюдений \tilde{M} получены из (2) путем равновероятного выбора столбцов. Поставленная задача минимизации означает поиск таких связей между признаками, которые давали бы наиболее близкий к таблице наблюдений в смысле (6) минор матрицы состояний (2).

Предположим, что задан минор матрицы состояний (2) и таблица наблюдений \tilde{M} получена из (2) путем равновероятного выбора столбцов.

Покажем, что при достаточно больших V матрицы P , \tilde{P} будут близки в вероятностном смысле.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть ξ_n, ζ_n — последовательности случайных величин, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \text{ (по вероятности),}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = b \text{ (по вероятности).}$$

Пусть $f(\cdot)$ непрерывная в a функция. Тогда

$$1. \text{ Если } b \neq 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b} \text{ (по вероятности).}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \zeta_n = ab \text{ (по вероятности).}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(a) \text{ (по вероятности).}$$

Доказательство. Докажем, например, 1.

Из сходимости по вероятности ξ_n, ζ_n следует, что для любых положительных ε и δ ($\delta < 1$) существует $M_0(\varepsilon, \delta)$, что для любых $n > M_0(\varepsilon, \delta)$

$$P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} > 1 - \delta,$$

$$P\{|\zeta_n - b| < \varepsilon\} > 1 - \delta.$$

Будем считать, что $\varepsilon < |b|/2$. Используем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_n}{\zeta_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{b\xi_n - a\zeta_n}{\zeta_n b} \right| \leq 2 \left| \frac{b(\xi_n - a) - a(\zeta_n - b)}{b^2} \right| \leq \\ &\leq 2 \frac{\max\{|a|, |b|\}}{b^2} \max\{|\xi_n - a|, |\zeta_n - b|\}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что при $n > M_0(\varepsilon, \delta)$

$$P\left\{ \left| \frac{\xi_n}{\zeta_n} - \frac{a}{b} \right| < c\varepsilon \right\} > 1 - \delta,$$

где $c = 2 \frac{\max\{|a|, |b|\}}{b^2}$. Оценка знаменателя основана на том, что $|\zeta_n| \geq |b|/2$ с

вероятностью, не меньшей, чем $1 - \delta$. Ввиду произвольности ε 1) доказано. Аналогично доказываются и другие утверждения. Лемма доказана.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_T \\ b_1 & b_2 & \dots & b_T \end{pmatrix}$$

матрица $2 \times T$, представляющая две произвольных вектор-строки из минора (2).

Обозначим вектор-строки матрицы A через \mathbf{a} и \mathbf{b} , r_0 — коэффициент корреляции Пирсона между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Предположим, что дисперсии векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ненулевые: $\sigma_a^2 \neq 0$, $\sigma_b^2 \neq 0$.

На основании матрицы A формируется матрица наблюдений следующим образом: каждый столбец матрицы наблюдений получают путем выбора с

равной вероятностью одного из столбца матрицы A ; всего производится m таких экспериментов (т.е. число столбцов в матрице наблюдений равно m).

Матрицу наблюдений можно представить в виде частотной таблицы

$$A_m = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_T \\ b_1 & b_2 & \dots & b_T \\ m_1 & m_2 & \dots & m_T \end{pmatrix},$$

где m_i — частота столбца $(a_i, b_i)^T$ в матрице наблюдений.

Следовательно, $\sum_{k=1}^T m_k = m$.

Обозначим r_m коэффициент корреляции между строками матрицы наблюдений.

Теорема. При заданных условиях $r_m \rightarrow r_0$ по вероятности (при $m \rightarrow \infty$).

Доказательство. Обозначим через \bar{a} и \bar{b} средние векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k, \quad \bar{b} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b_k.$$

Тогда

$$r_0 = \frac{\sum_{k=1}^N (a_k - \bar{a})(b_k - \bar{b})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (a_k - \bar{a})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N (b_k - \bar{b})^2}}.$$

Аналогично, средние первой и второй строки матрицы наблюдений (соответствующие векторам \mathbf{a} и \mathbf{b}) обозначим

$$\bar{a}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m m_k a_k, \quad \bar{b}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m m_k b_k.$$

Очевидно, что по теореме Бернулли [12, с. 188] $\frac{m_k}{m} \rightarrow \frac{1}{N}$ по вероятности (при $m \rightarrow \infty$) для всех $k = \overline{1, N}$. Поэтому $\bar{a}_m \rightarrow \bar{a}$ и $\bar{b}_m \rightarrow \bar{b}$ по вероятности (при $m \rightarrow \infty$).

Коэффициент r_m равен

$$r_m = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{m_k}{m} (a_k - \bar{a}_m)(b_k - \bar{b}_m)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{m_k}{m} (a_k - \bar{a}_m)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{m_k}{m} (b_k - \bar{b}_m)^2}}.$$

Используя лемму, получим

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} r_m &= \frac{\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} (a_k - \bar{a})(b_k - \bar{b})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} (a_k - \bar{a})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} (b_k - \bar{b})^2}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^N (a_k - \bar{a})(b_k - \bar{b})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (a_k - \bar{a})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N (b_k - \bar{b})^2}} = r_0 \text{ (по вероятности),} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

3. Численный эксперимент

Численный эксперимент был проведен на материалах контрольной и опытной (экспериментальной) групп лабораторных животных [13]. Эксперимент состоял в определении влияния алкогольной интоксикации на отношения в системе крови цинка (*Zn*), меди (*Cu*) и содержащих эти элементы металлоферментов: алкогольдегидрогеназа (АДГ) и лактатдегидрогеназа (ЛДГ).

Таблицы наблюдений контроля и опыта включали по 10 наблюдений. Корреляционные матрицы эксперимента и опыта равны соответственно

$$\begin{bmatrix} & Cu & АДГ & ЛДГ \\ Zn & -0.02 & 0.12 & -0.14 \\ Cu & & -0.29 & 0.54 \\ АДГ & & & -0.81 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} & Cu & АДГ & ЛДГ \\ Zn & -0.23 & 0.28 & 0.28 \\ Cu & & -0.49 & -0.46 \\ АДГ & & & -0.04 \end{bmatrix}.$$

Была использована модель весовых функций, в которой положили $\varphi_{j,k}^{(+,+)}(t) = \varphi_{j,k}^{(+,0)}(t) = \varphi_{j,k}^{(+,-)}(t) = t - 1$, $\varphi_{j,k}^{(-,+)}(t) = \varphi_{j,k}^{(-,0)}(t) = \varphi_{j,k}^{(-,-)}(t) = 1 - t$, число состояний $K = 4$. Кроме того, в соответствии с биохимическими представлениями об изучаемом процессе, в качестве связей (ω_1, ω_2) бралась не вся допустимая совокупность связей ($\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$), а только следующий набор: (+, -), (-, +), (0, 0), (-, -).

В численном эксперименте для контроля и опыта были получены единственные системы связей, матрицы которых минимизировали меру (6). Траектории изучаемых признаков представлены на рис. 1 и 2.

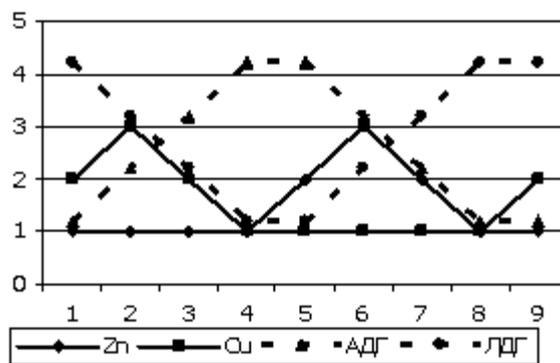


Рис. 1. Траектории признаков для контроля (период состояний системы равен 9)

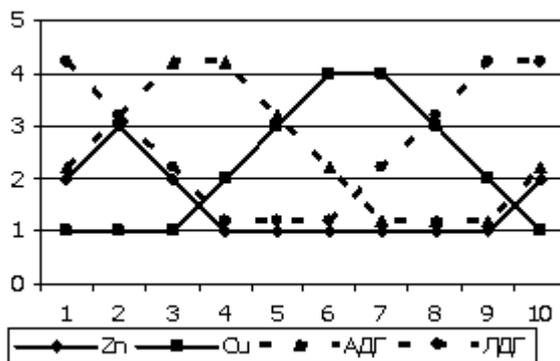


Рис. 2. Траектории признаков для опыта (период состояний системы равен 10)

Опишем полученные системы связей.

Контроль. $D = 0.382$. Корреляционная матрица системы равна

$$\begin{bmatrix} & Cu & АДД & ЛДГ \\ Zn & -0.22 & 0.22 & -0.22 \\ Cu & & -0.54 & 0.54 \\ АДД & & & -1.00 \end{bmatrix}.$$

Связи между Zn , Cu , АДГ и ЛДГ представляются в виде матрицы отношений

$$\begin{bmatrix} & Zn & Cu & АДД & ЛДГ \\ Zn & (-,-) & & & \\ Cu & (-,-) & (-,-) & & \\ АДД & (+,-) & (+,-) & (0,0) & \\ ЛДГ & (+,-) & (+,-) & (0,0) & (0,0) \end{bmatrix}.$$

Опыт. $D = 0.508$. Корреляционная матрица траектории системы равна

$$\begin{bmatrix} & Cu & АДГ & ЛДГ \\ Zn & -0.75 & 0.37 & 0.37 \\ Cu & & -0.50 & -0.50 \\ АДГ & & & -0.50 \end{bmatrix}.$$

Связи между признаками имеют вид

$$\begin{bmatrix} & Zn & Cu & АДД & ЛДГ \\ Zn & (-,-) & & & \\ Cu & (-,-) & (0,0) & & \\ АДД & (-,+) & (+,-) & (0,0) & \\ ЛДГ & (+,-) & (-,+) & (+,-) & (0,0) \end{bmatrix}.$$

Из представленных матриц отношений следует, что в контроле гомеостаз системы крови поддерживается, в частности, отношениями $(-, -)$, которые с

известной степени условности можно обозначить как конкуренцию Zn и Cu , а также внутреннюю конкуренцию этих элементов.

В опыте эти отношения отсутствуют для Cu , что может обусловить больший, в сравнении с контролем, размах колебаний значений количества меди в опыте. Наряду с отношениями $(-, -)$ численный эксперимент выявил и в контроле и в опыте также отношения $(-, +)$ между ЛДГ и АДГ, с одной стороны, и Zn и Cu , с другой. Детальное истолкование этих отношений предмет будущих исследований.

Таким образом, применение предложенной процедуры к реальным данным обнаруживает системные эффекты, для которых возможно объяснение в рамках существующих представлений об отношениях металлов и металлоферментов в системе крови при развитии алкогольной интоксикации.

Заключение

Предложенная в статье модель позволяет по массиву входных данных выявить структуру внутренних связей, характерную для наблюдаемого объекта. Основным теоретическим результатом работы является теорема, доказывающая, что выборочная корреляционная матрица, полученная по этому входному массиву, является состоятельной оценкой корреляционной матрицы минора (2), полностью описывающего траекторию системы. Это свойство выборочной корреляционной матрицы позволяет решать поставленную задачу идентификации динамической системы, траекторию которой мы непосредственно не наблюдаем, по выборочному массиву.

В приведенном численном примере было получено описание важных аспектов функционирования механизмов гомеостаза и их нарушения, лежащей в рамках сложившейся в физиологии парадигмы [14]. Можно предполагать, что указанная модель окажется пригодной для исследований в этом направлении как на других уровнях организации живого, так и систем другой природы.

Следует отметить, что поставленная задача структурной идентификации достаточно трудоемка в вычислительном плане. При N агентах и числе значений K общее количество систем связей между агентами равно 3^{N^2} , а число начальных условий — K^N . Очевидно, что даже при не очень больших N и K возникают значительные сложности при практическом решении задачи идентификации. Кроме того, пока остается открытым вопрос о единственности системы связей, минимизирующей меру D . Поэтому представляется весьма актуальной разработка в дальнейшем эффективных вычислительных алгоритмов, позволяющих справиться с отмеченной вычислительной сложностью задачи численной структурной идентификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jost C., Ellner S. P. Testing for predator dependence in predator-prey dynamics: a non-parametric approach. Proc. R. Soc. Lond. B (2000) 267, - P. 1611-1620.
2. Logana J. D., Wolesenskyb W., Joernc A. Temperature-dependent phenology and predation in arthropod systems. Ecological modelling, 196 (2006). - P. 471-482.

3. Недорезов Л. В., Назаров И. Н.. Непрерывно-дискретные модели динамики изолированной популяции и двух конкурирующих видов. Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр. - Омск: Омск. гос. ун-т, 1998. Вып. 2. - С. 70-82.
4. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. - 181 с.
5. Современные методы идентификации систем / Под ред. П. М. Эйкхоффа. - М. Мир, 1983. - 400 с.,
6. Льюинг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. - М.: Наука, 1991. - 432 с.,
7. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. - 215 с.
8. Verhaegen M., Verdult V. Filtering and System Identification: A Least Squares Approach. - Cambridge: Cambridge Univ Press, 2007. - 405 p.
9. Nelles O. Nonlinear System Identification. - Berlin; N.-Y.: Springer, 2000. - 785 p.
10. Pintelon R., Schoukens J. System identification a frequency domain approach. - New York: IEEE Press, 2001. - 605 p.
11. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. - М.: Мир, 1971. - 400 с.
12. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1988. - 448 с.
13. Дереча Л.М., Беспалов Ю. Г. Бондаренко В. А. М'ясоєдов В.В. Системний підхід до використання біохімічних параметрів для діагностики смерті від отруєння етиловим алкоголем // Теорія та практика судової експертизи і криміналістики. Збірник науково-практичних результатів. Вип. 5. - Харків: Право, 2005. - С. 485-491.
14. Барабой В. А., Сутковой Д. А. Окислительно-антиоксидантный гомеостаз в норме и патологии. Ч. I. - Киев: Чернобыльинтеринформ, 2001. - С. 42.