

Модифікація алгоритму числового розв'язання обернених задач на квазіконформні відображення для випадку областей з вільними межами

А. Я. Бомба, В. І. Гаврилук

Рівненський державний гуманітарний університет, Україна

Developed algorithm of numerical solution of model nonlinear boundary value problems on quasiconformal mappings in areas limited to two equal potential lines and two lines by current is transferred on a case when one of sites of border is a unknown (free) curve with fixed and free the ends.

1. Вступ

У роботах [1–6] для побудови динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного роду профілів з одночасним знаходженням інших характеристик (витрат, величин перетоків, тощо) розроблений метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень), де під терміном “обернення” розуміється, по перше, перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_w до більш вигідного оберненого відображення $G_w \rightarrow G_z$; по друге те, що задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_w$ ($G_w \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про її розв'язок, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови). Зокрема, у роботах [1 – 3] проведено математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища, а в [4, 5] розглядається випадок поєднання методів фіктивних областей та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач для розрахунку фільтраційних режимів у середовищах з вільними ділянками границь (кривими депресії) та проміжками типу „височування” [4, 5]. У цій роботі пропонується алгоритм числового розв'язання модельних нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в областях обмежених двома екіпотенціальними лініями та двома лініями течії, коли однією з ділянок границі є невідома (вільна) крива із закріпленим та вільним кінцями (без проміжку типу „височування”), що „звільняє” від необхідності побудови фіктивних ділянок області.

2. Постановка задачі

Розглянемо процес фільтрації в однозв'язній чотирикутній криволінійній області (пористому пласті) $G_z (z = x + iy, \partial G_z = ABCD)$ (див. рис. 1), обмеженої чотирма гладкими кривими $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, $DF = \{z: f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D

перетинаються під прямими кутами, де BC - вільна (невідома) крива, що знаходиться в процесі розв'язку задачі, $f_1(x, y)$, $f_3(x, y)$, $f_4(x, y)$ - задані, а $f_2(x, y)$ - шукана функції, невідома точка C належить кривій DF . Аналогічно до [1-7] описуватимемо його рівнянням руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$ - швидкість фільтрації, $\kappa = \kappa(\text{grad } \varphi)$ - обмежена неперервно-диференційована в області G_z функція, що характеризує провідність середовища та схильність до деформації, $\varphi = \varphi(x, y)$ - квазіпотенціал в точці (x, y) , такий що $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\frac{d\varphi}{d\vec{n}}|_{BC} = \frac{d\varphi}{d\vec{n}}|_{DA} = 0$, $\varphi|_{BC} = g(x, y)$, \vec{n} - зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області, $g(x, y)$ - обмежена неперервно-диференційована функція.

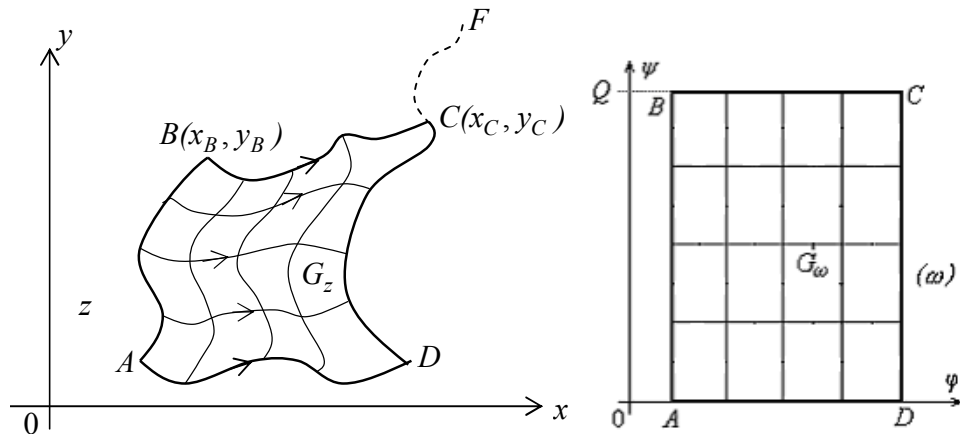


Рис. 1. Фізична область G_z а) та відповідна їй область квазікомплексного квазіпотенціалу G_ω б)

Відповідна задача на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ розглядуваної області G_z на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q\}$ ($\psi = \psi(x, y)$ - функція течії, квазікомплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) з невідомим параметром - повною питомою витратою $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ має вигляд [1-6]

$$\kappa(\text{grad } \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(\text{grad } \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{BC} = g(x, y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

Обернену до (1) – (2) задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q представимо у вигляді

$$\begin{cases} \kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (3)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ g(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = \varphi, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \\ (\varphi_*, Q) = x_B, y(\varphi_*, Q) = y_B, x(\varphi^*, Q) = x_C, y(\varphi^*, Q) = y_C, \end{cases} \quad (4)$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa^{-1} \left(\frac{1}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \left(\frac{1}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Алгоритм числового розв'язання задачі

Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників, у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^y = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta\psi \cdot j, j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = 1/(m+1), \Delta\psi = Q/(n+1), \gamma = \Delta\varphi/\Delta\psi, m, n \in \mathbf{N}\}$ запишемо у вигляді [1-5, 8, 9]

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(a_{i+1,j} x_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) x_{i,j} + a_{i,j} x_{i-1,j} \right) + \\ + \gamma^2 \left(b_{i,j+1} x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) x_{i,j} + b_{i,j} x_{i,j-1} \right) = 0, \\ \left(a_{i+1,j} y_{i+1,j} - (a_{i+1,j} + a_{i,j}) y_{i,j} + a_{i,j} y_{i-1,j} \right) + \\ + \gamma^2 \left(b_{i,j+1} y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j}) y_{i,j} + b_{i,j} y_{i,j-1} \right) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ g(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ g(x_{0,n+1}, y_{0,n+1}) = \varphi_*, \quad g(x_{m+1,n+1}, y_{m+1,n+1}) = \varphi^*, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ (x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}. \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \gamma_{i,j}, \quad (9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}},$$

$$\text{де } \kappa_{i,j} = \kappa \left(\frac{2\Delta\varphi}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2} \right),$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}),$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{\kappa_{i-\frac{1}{2}, j}}, \quad b_{i,j} = \kappa_{i, j-\frac{1}{2}}, \quad x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j).$$

Розв'язок різницевої задачі (6) – (9) побудуємо так [3-6]. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались

рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Задання початкового наближення квазіконформного інваріанта γ проведемо за формулою (9), в якій використовуємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$. Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [9] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$; величини γ за формулою (9) та витрати Q за формулою $Q = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{n+1}{m+1}$; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(|x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}| \right) < \varepsilon, \quad (10)$$

$$|Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon, \quad |D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon,$$

де $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}}$ – усереднене значення

відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^y .

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку квазіконформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Її величина характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику рівне одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку, якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m , n (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m і n та розв'язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [3-6] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана. Обґрунтування побудованого алгоритму “почергової фіксації характеристик процесу та середовища, параметра квазіконформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області” проводиться аналогічно до [1-6] з використанням ідей методів блочних ітерацій [8, 9].

4. Результати числових розрахунків

4.1. Тестовий приклад. Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при:
 $AB = \{z: x = 0, 0.176 \leq y \leq 4\}$, $DF = \{z: y - \sqrt{100 - (x - 16)^2} = 0, 6 \leq x \leq 26\}$,
 $AD = \{z: y - 3 / ((x - 2)^4 + 1) = 0, 0 \leq x \leq 6\}$, $g(x, y) = y$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$ розбитті
 $m \times n = 30 \times 16$ області G_z , точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$,
 $k = k_0 + \mu(I - I_{kp})$ при $I > I_{kp}$, $k = k_0$ при $I \leq I_{kp}$, критичному значенні градієнта
квзіпотенціалу $I_{kp} = 0,02$, коефіцієнті провідності середовища $k_0 = 1,5$ м/добу,
ступені впливу градієнта напору $\mu = 200$ за $k = 1158$ кроків отримано
гідродинамічну сітку руху (див. рис. 2.), знайдено повну фільтраційну витрату
 $Q = 0,397$ м³/добу за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 2,4E-3$, встановлено
координати точки С, побудовано епюру швидкості (див. рис. 3.).

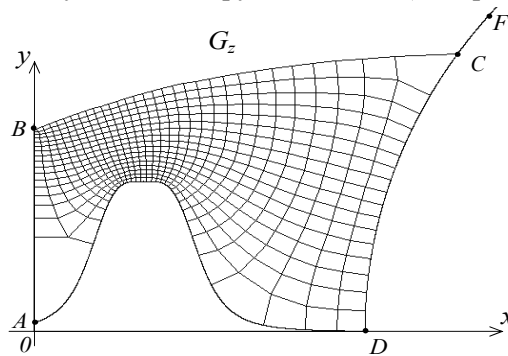


Рис. 2. Схема області фільтрації

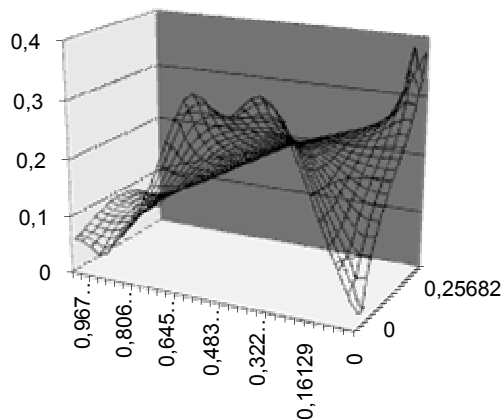


Рис. 3. Епюра швидкості

4.2. Розрахунки ґрунтової греблі. На рис. 4, 5, де $AA_1 = \{z: y = 0, -l_3 \leq x \leq 0\}$,
 $A_1B = \{z: m_1 y - x = 0, 0 \leq x \leq l_1\}$, $C_1C = \{z: y = h_*, x_1 \leq x \leq x_*\}$, $FC_1 = \{z: x = x_1, 0 \leq y \leq h_*\}$,
 $FD = \{z: y = 0, x_1 \leq x \leq l_1 + b + l_2 + l_5\}$, $AJ = \{z: x = -l_3, 0 \leq y \leq -l_6\}$, $JJ_1 = \{z: y = -l_6,$

$-l_3 \leq x \leq l_1 + b + l_2 + l_5$, $J_1D = \{z : x = l_1 + b + l_2 + l_5, 0 \leq y \leq -l_6\}$, $SK = \{z : m_2 y + x - l_1 - b - l_2 = 0\}$, BC – вільна крива, H_G та H , h_* – відповідно висота греблі та напори на верхньому та нижньому б'єсах, b – ширина гребеня, $m_1 = l_1 / H_G$ та $m_2 = l_2 / H_G$ – коефіцієнти закладання верхового та низового укосів, $x_1 = l_1 + b + l_2 - l_*$, x_* – шукана абсциса точки C , зображено результати розрахунків на побудову гідродинамічної сітки, положення кривої депресії та інших характеристик ґрунтової греблі на непроникній основі в залежності від довжини дренажу (величини параметра l_*). Розрахунки проводились при: $l_* = 6.2$ м, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $m \times n = 40 \times 20$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $k = k_o + \mu(I - I_{kp})$ при $I > I_{kp}$, $k = k_o$ при $I \leq I_{kp}$, $k_o = 2,5$ м/добу, $\mu = 200$, $I_{kp} = 0,0175$, $H = 10$ м, $H_G = 12$ м, $h_* = 1.5$ м, $l_1 = 25$ м, $b = 4$ м, $l_2 = 12$ м, $l_3 = 4$ м, $l_5 = 2$ м, $l_6 = 8$ м. За $k = 1987$ кроків отримано гідродинамічну сітку руху (рис. 4), знайдено повну фільтраційну витрату $Q = 0,27$ м³/добу за максимальної нев'язки $\varepsilon_* = 1,64E-3$, встановлено координати точки C . Зокрема, на рис. 5 зображено відповідний ситуаційний стан у оптимальному випадку, коли мінімальне значення довжини дренажу ($l_* = 1.62$) забезпечує відсутність проміжку типу „височування”.

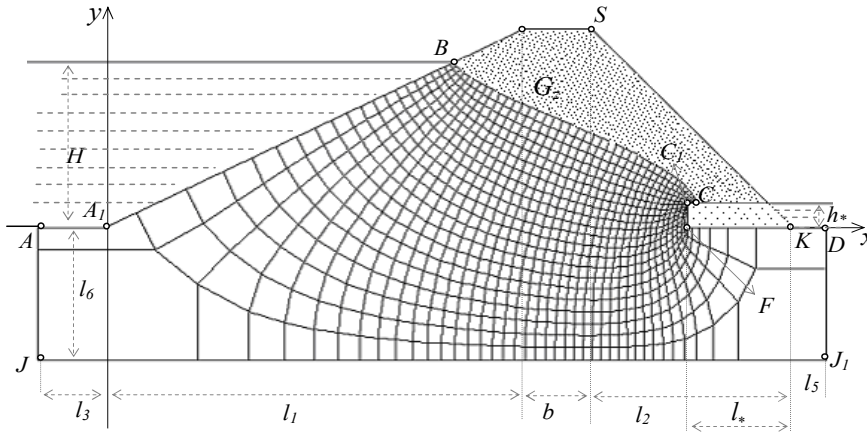


Рис. 4. Розрахункова схема ґрунтової греблі

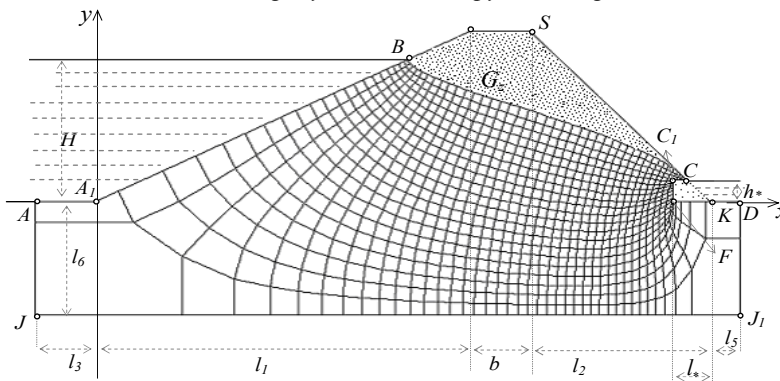


Рис. 5. Розрахункова схема ґрунтової греблі (за умов мінімальної довжини дренажу, що забезпечує відсутність проміжку типу „височування”)

5. Висновки і зауваження

Отже, відомий алгоритм числового розв'язання модельних нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення модифіковано для випадку, коли однією з ділянок границі області є невідома (вільна) крива із закріпленим та вільним кінцями. При цьому зауважимо, у випадку відсутності проміжку типу "височування", тобто, коли точка C є вільною, задача зводиться до квазіконформного відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник, що „звільняє” від необхідності добудови фіктивних ділянок області. Запропонований в роботі алгоритм із незначними доповненнями може бути застосований для розв'язання такого роду задач в областях з декількома вільними межами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я., Каштан С.С. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник. - 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.
2. Бомба А.Я., Каштан С.С. Моделювання зворотного впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2004.- Т. 9, число 1.- С. 123-129.
3. Бомба А.Я., Пригорницький Д.О., Скопецький В.В. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення з післядією // Доповіді НАН України. - 2004.- №3.- С. 62-68.
4. Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Каштан С.С. Застосування методу „фіктивних областей” та методології квазіконформних відображень до моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. - 2005.- Вип. 12 (3).- С. 28-38.
5. Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Скопецький В.В. „Метод „фиктивных областей” и квазиконформных отображений решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями” // Компьютерная математика. - 2007. - № 1. - С. 91-101.
6. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
7. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. - М.-Л.: Изд.- во АН СССР, 1948.- 144 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем.- Москва: Наука, 1977.- 656 с.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - Киев: Наукова думка, 1980.- 334 с.