

Просторові сингулярно збурені задачі типу “фільтрація-дифузія” у двошарових середовищах

А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, І. М. Присяжнюк

Рівненський державний гуманітарний університет, Україна

On the basis of the constructed 3d analogue of a flat indignant problem on conformal mapping of a curvilinear quadrangle onto a rectangular the algorithm of asymptotic approximation of the solution of 3d singular indignant boundary "convection-diffusion" problem in the two-layer environment it is the curvilinear parallelepiped, bounded by the two equipotential surfaces and four surfaces of current is received.

1. Вступ

На основі [1-4] в [5-9] розроблено підхід до розв’язання двомірних задач для рівнянь конвективної дифузії при фільтрації підземних вод, що ґрунтується на переході від криволінійної фізичної області фільтрації, обмеженої лініями течії і еквіпотенціальними лініями, до відповідної області комплексного потенціалу. Поєднуючи цей підхід із числово-асимптотичними методами отримані розв’язки найбільш типових плоских задач „фільтрація–конвекція–дифузія–масообмін” для багатозв’язних областей [7-8], нелінійних задач із запізненням [9], задач гетеродифузії [10-11], а також на основі [12], де побудовано просторовий аналог плоскої крайової задачі на конформне відображення криволінійного чотирикутника на прямокутник, одержано асимптотичні розв’язки розв’язків просторових сингулярно збурених крайових задач типу “конвекція-дифузія” [12-14]. У цій роботі йдеться про асимптотичне наближення розв’язку сингулярно збуреної крайової задачі типу “конвекція-дифузія” у криволінійному паралелепіпеді (пористому пласті), який ділиться деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті з різними значеннями коефіцієнта дифузії.

2. Постановка задачі

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ ($z = (x, y, z)$) – криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$, що ділиться еквіпотенціальною поверхнею EFF_*E_* на дві підобласті $G_- = ABFEA_*B_*F_*E_*$ $G_+ = EFCDE_*F_*C_*D_*$ (рис. 1а), розглянемо модельну задачу:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{ADD_*A_* \cup A_*B_*C_*D_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD} = 0; \quad (2)$$

$$D(C_{xx} + C_{yy} + C_{zz}) - v_x C_x - v_y C_y - v_z C_z = C_t, \tag{3}$$

$$C(x, y, z, t)|_{ABB_*A_*} = c_*(M, t), \quad C(x, y, z, t)|_{CDD_*C_*} = c^*(M, t),$$

$$C(x, y, z, t)|_{ADD_*A_*} = c_{**}(M, t), \quad C(x, y, z, t)|_{BCC_*B_*} = c^{**}(M, t),$$

$$C(x, y, z, t)|_{ABCD} = c_{***}(M, t), \quad C(x, y, z, t)|_{A_*B_*C_*D_*} = c^{***}(M, t),$$

$$C(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z), \tag{4}$$

$$D_* \cdot C_n|_{EFF_*E_{**}} = D^* \cdot C_n|_{EFF_*E_{**}}, \quad C|_{EFF_*E_{**}} = C|_{EFF_*E_{**}}, \tag{5}$$

де φ – фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$), $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg \varepsilon$), n – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C = C(x, y, z, t)$ – концентрація розчинної речовини в фільтраційній течії у точці (x, y, z) в момент часу t , $D = \begin{cases} D_* = a_1 \varepsilon, & \varphi_* \leq \varphi < \varphi^*, \\ D^* = a_2 \varepsilon, & \varphi^* < \varphi \leq \varphi^* \end{cases}$ – коефіцієнт дифузії, $0 < a_1, a_2 \leq 1$, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$), $\varphi|_{EFF_*E_{**}} = \varphi^*$, $c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, $c_{***}(M, t)$, $c^{***}(M, t)$, $c_0^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G , M – довільна точка відповідної поверхні, (5) – умова узгодженості на еквіпотенціальній поверхні EFF_*E_{**} .

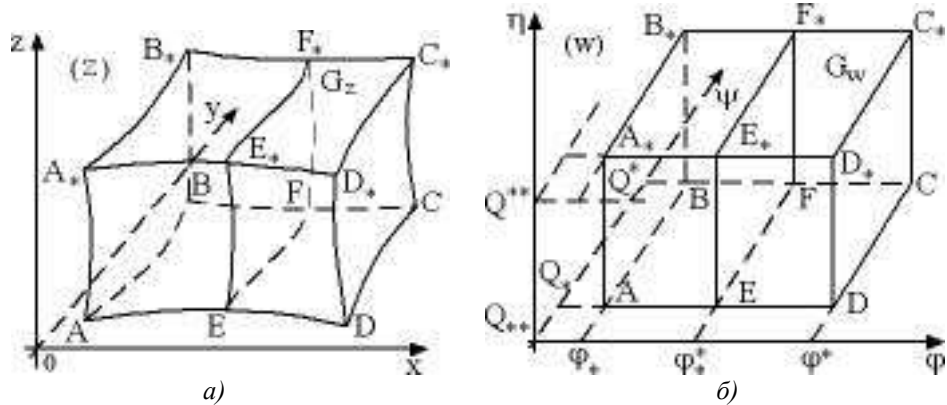


Рис. 1. Фізична область G_z (а) і відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Припустимо, що задача на просторове конформне відображення $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$) [12], де $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, Q_* \leq \psi \leq Q^*, Q_{**} \leq \eta \leq Q^{**}\}$ – відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 1 б), є розв’язаною, зокрема, знайдено поле швидкості \vec{v} і параметри Q_0, Q^0, Q

($Q = Q_0 \cdot Q^0$ – потік через довільний поперечний переріз течії G_z , $Q_0 = Q^* - Q_*$, $Q^0 = Q^{**} - Q_{**}$ – потоки через відповідні горизонтальний та вертикальний одиничні прошарки). Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (3) та умовах (4)-(5), отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області G_w :

$$D\left(\left(v^2(\varphi, \psi, \eta)c_{\varphi\varphi} + b_1(\varphi, \psi, \eta)c_{\varphi\psi} + b_2(\varphi, \psi, \eta)c_{\varphi\eta} + d_1(\varphi, \psi, \eta)c_{\psi} + d_2(\varphi, \psi, \eta)c_{\eta}\right) - v^2(\varphi, \psi, \eta) \cdot c_{\varphi} = c_t; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= c_*(\psi, \eta, t), \quad c(\varphi^*, \psi, \eta, t) = c^*(\psi, \eta, t), \\ c(\varphi, Q_*, \eta, t) &= c_{**}(\varphi, \eta, t), \quad c(\varphi, Q^*, \eta, t) = c^{**}(\varphi, \eta, t), \\ c(\varphi, \psi, Q_{**}, t) &= c_{***}(\varphi, \psi, t), \quad c(\varphi, \psi, Q^{**}, t) = c^{***}(\varphi, \psi, t), \\ c(\varphi, \psi, \eta, 0) &= c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (7)$$

$$D_* \cdot c_{\varphi}(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) = D^* \cdot c_{\varphi}(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t), \quad c(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) = c(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} c &= c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ b_1 &= \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad b_2 = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2, \quad d_1 = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}, \\ d_2 &= \eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} \text{ або} \\ b_1(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{1}{I^2} \left((y_{\eta}z_{\varphi} - y_{\varphi}z_{\eta})^2 + (x_{\varphi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\varphi})^2 + (x_{\eta}y_{\varphi} - x_{\varphi}y_{\eta})^2 \right), \\ b_2(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{1}{I^2} \left((y_{\varphi}z_{\psi} - y_{\psi}z_{\varphi})^2 + (x_{\psi}z_{\varphi} - x_{\varphi}z_{\psi})^2 + (x_{\varphi}y_{\psi} - x_{\psi}y_{\varphi})^2 \right), \\ d_1(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{y_{\eta}z_{\varphi} - y_{\varphi}z_{\eta}}{I} \right) \cdot \frac{y_{\psi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\psi}}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{y_{\eta}z_{\varphi} - y_{\varphi}z_{\eta}}{I} \right) \times \\ &\times \frac{y_{\eta}z_{\varphi} - y_{\varphi}z_{\eta}}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_{\eta}z_{\varphi} - y_{\varphi}z_{\eta}}{I} \right) \cdot \frac{y_{\varphi}z_{\psi} - y_{\psi}z_{\varphi}}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x_{\varphi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\varphi}}{I} \right) \times \\ &\times \frac{x_{\eta}z_{\psi} - x_{\psi}z_{\eta}}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x_{\varphi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\varphi}}{I} \right) \cdot \frac{x_{\varphi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\varphi}}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_{\varphi}z_{\eta} - x_{\eta}z_{\varphi}}{I} \right) \times \\ &\times \frac{x_{\psi}z_{\varphi} - x_{\varphi}z_{\psi}}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x_{\eta}y_{\varphi} - x_{\varphi}y_{\eta}}{I} \right) \cdot \frac{x_{\psi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\psi}}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x_{\eta}y_{\varphi} - x_{\varphi}y_{\eta}}{I} \right) \times \\ &\times \frac{x_{\eta}y_{\varphi} - x_{\varphi}y_{\eta}}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_{\eta}y_{\varphi} - x_{\varphi}y_{\eta}}{I} \right) \cdot \frac{x_{\varphi}y_{\psi} - x_{\psi}y_{\varphi}}{I}, \\ d_2(\varphi, \psi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{y_{\varphi}z_{\psi} - y_{\psi}z_{\varphi}}{I} \right) \cdot \frac{y_{\psi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\psi}}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{y_{\varphi}z_{\psi} - y_{\psi}z_{\varphi}}{I} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{y_\eta z_\varphi - y_\varphi z_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{y_\varphi z_\psi - y_\psi z_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} \right) \times \\
& \times \frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} \right) \cdot \frac{x_\varphi z_\eta - x_\eta z_\varphi}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} \right) \times \\
& \times \frac{x_\psi z_\varphi - x_\varphi z_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{x_\psi y_\eta - x_\eta y_\psi}{I} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I} \right) \times \\
& \times \frac{x_\eta y_\varphi - x_\varphi y_\eta}{I} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I} \right) \cdot \frac{x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi}{I},
\end{aligned}$$

I – якобіан відповідного перетворення.

3. Алгоритм числового розв'язання задачі

Асимптотичне наближення для розв'язку $c(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \tilde{c}(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_*^*, \\ \tilde{\tilde{c}}(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_*^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$

задачі (6)-(8) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у виді таких рядів [12, 15]:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \tilde{c}_i(\varphi, \psi, \eta, t) + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \tilde{p}_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{H}_i(\varphi, \tilde{\zeta}, \eta, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{T}_i(\varphi, \psi, \varsigma, t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{T}_i(\varphi, \psi, \tilde{\varsigma}, t) + \tilde{R}_n(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{c}}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \tilde{\tilde{c}}_i(\varphi, \psi, \eta, t) + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \tilde{\tilde{p}}_i(\tilde{\tilde{\varphi}}, \psi, \eta, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{\tilde{P}}_i(\xi, \psi, \eta, t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \tilde{\zeta}, \eta, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{T}}_i(\varphi, \psi, \varsigma, t) + \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{T}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\varsigma}, t) + \tilde{\tilde{R}}_n(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), \tag{10}
\end{aligned}$$

де $\tilde{c}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ і $\tilde{\tilde{c}}_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde{p}_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ і $\tilde{\tilde{p}}_i(\tilde{\tilde{\varphi}}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки в околі поверхні EFF_*E_*) [15], $\tilde{\tilde{P}}_i(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\tilde{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{H}}_i(\varphi, \tilde{\zeta}, \eta, t)$, $\tilde{T}_i(\varphi, \psi, \varsigma, t)$, $\tilde{\tilde{T}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\varsigma}, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах, $\psi = Q_*$, $\psi = Q^*$, $\eta = Q_{**}$, $\eta = Q^{**}$, що

враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\tilde{\phi} = \frac{\Phi_*^* - \Phi}{\varepsilon}$, $\tilde{\bar{\phi}} = \frac{\Phi - \Phi_*^*}{\varepsilon}$,

$$\xi = \frac{\Phi^* - \Phi}{\varepsilon}, \quad \zeta = \frac{\Psi - Q_*}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{Q^* - \Psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varsigma = \frac{\eta - Q^{**}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\varsigma} = \frac{Q^{**} - \eta}{\sqrt{\varepsilon}} - \text{відповідні їм}$$

регуляризуючі перетворення (розтяги), $\tilde{R}_n(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ і $\tilde{\tilde{R}}_n(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ – залишкові члени (їх оцінка встановлюється аналогічно [7-9] на основі принципу максимуму).

У результаті підстановки (9), (10) в (6)-(8) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів ε , одержимо наступні задачі для знаходження головної частини $c_0(\varphi, \psi, \eta, t)$ розв’язку і поправок $c_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{1, n}$):

$$\begin{cases} v^2(\varphi, \psi, \eta) \cdot \tilde{c}_{0\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{c}_{0t}(\varphi, \psi, \eta, t) = 0, \\ \tilde{c}_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \tilde{c}_0(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \\ v^2(\varphi, \psi, \eta) \cdot \tilde{c}_{i\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{c}_{it}(\varphi, \psi, \eta, t) = \tilde{g}_i(\varphi, \psi, \eta, t), \\ \tilde{c}_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \tilde{c}_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, i = \overline{1, n}, \\ v^2(\varphi, \psi, \eta) \cdot \tilde{\tilde{c}}_{0\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{\tilde{c}}_{0t}(\varphi, \psi, \eta, t) = 0, \\ \tilde{\tilde{c}}_0(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{\tilde{c}}_0(\varphi_*, \psi, \eta, t), \tilde{\tilde{c}}_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \\ v^2(\varphi, \psi, \eta) \cdot \tilde{\tilde{c}}_{i\varphi}(\varphi, \psi, \eta, t) + \tilde{\tilde{c}}_{it}(\varphi, \psi, \eta, t) = \tilde{\tilde{g}}_i(\varphi, \psi, \eta, t), \\ \tilde{\tilde{c}}_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{\tilde{c}}_i(\varphi_*, \psi, \eta, t), \tilde{\tilde{c}}_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i(\varphi, \psi, \eta, t) &= a_1 \cdot (v^2(\varphi, \psi, \eta) \tilde{c}_{i-1\varphi\varphi} + b_1(\varphi, \psi, \eta) \tilde{c}_{i-1\psi\psi} + \\ &+ b_2(\varphi, \psi, \eta) \tilde{c}_{i-1\eta\eta} + d_1(\varphi, \psi, \eta) \tilde{c}_{i-1\psi} + d_2(\varphi, \psi, \eta) \tilde{c}_{i-1\eta}), \\ \tilde{\tilde{g}}_i(\varphi, \psi, \eta, t) &= a_2 \cdot (v^2(\varphi, \psi, \eta) \tilde{\tilde{c}}_{i-1\varphi\varphi} + b_1(\varphi, \psi, \eta) \tilde{\tilde{c}}_{i-1\psi\psi} + \\ &+ b_2(\varphi, \psi, \eta) \tilde{\tilde{c}}_{i-1\eta\eta} + d_1(\varphi, \psi, \eta) \tilde{\tilde{c}}_{i-1\psi} + d_2(\varphi, \psi, \eta) \tilde{\tilde{c}}_{i-1\eta}). \end{aligned}$$

В результаті їх розв’язання маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} c_*(\psi, \eta, t - \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta), \\ c_0^0(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \\ \tilde{c}_i(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\tilde{g}_i(s, \psi, \eta, \tilde{f}(s, \psi, \eta) + t - \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta))}{v^2(s, \psi, \eta)} ds, & t \geq \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta), \\ \int_0^t \tilde{g}_i(\tilde{f}^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \\ \tilde{\tilde{c}}_0(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} \tilde{\tilde{c}}_0(\varphi_*, \psi, \eta, t - \tilde{\tilde{f}}(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{\tilde{f}}(\varphi, \psi, \eta), \\ c_0^0(\tilde{\tilde{f}}^{-1}(\tilde{\tilde{f}}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{\tilde{f}}(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\tilde{c}_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} h_i(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta), \\ \int_0^t \tilde{g}_i(\tilde{f}^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta), \end{cases}$$

$$h_i(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\tilde{g}_i(s, \psi, \eta, \tilde{f}(s, \psi, \eta) + t - \tilde{f}(\varphi, \psi, \eta))}{v^2(s, \psi, \eta)} ds + \tilde{c}_i(\varphi_*, \psi, \eta, t),$$

де $\tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \psi, \eta)}$ – час проходження відповідною частинкою шляху від

точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta),$

$z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_-$ вздовж відповідної лінії течії, а $\tilde{f}(\varphi, \psi, \eta) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \psi, \eta)}$ – від

точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in EFF_*E_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta),$

$z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_+$, \tilde{f}^{-1} і \tilde{f} – функції, обернені відповідно до \tilde{f} і \tilde{f} відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існують, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Для знаходження функцій $\tilde{p}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t)$ і $\tilde{\tilde{p}}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n}$) отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases} a_1 \tilde{p}_{0\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) + \tilde{p}_{0\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) = 0, \tilde{p}_0(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\phi} \rightarrow \infty} 0, \\ a_2 \tilde{\tilde{p}}_{0\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) - \tilde{\tilde{p}}_{0\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) = 0, \tilde{\tilde{p}}_0(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\phi} \rightarrow -\infty} 0, \\ \tilde{c}_0(\varphi_{*-}, \psi, \eta, t) + \tilde{p}_0(0_-, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_0(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) + \tilde{\tilde{p}}_0(0_+, \psi, \eta, t), \\ \left(\tilde{c}_{0\varphi}(\varphi_{*-}, \psi, \eta, t) + \tilde{p}_{0\tilde{\phi}}(0_-, \psi, \eta, t) \right) = \frac{a_2}{a_1} \left(\tilde{c}_{0\varphi}(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) + \tilde{\tilde{p}}_{0\tilde{\phi}}(0_+, \psi, \eta, t) \right), \\ a_1 \tilde{p}_{i\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) + \tilde{p}_{i\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) = \tilde{q}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t), \tilde{p}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\phi} \rightarrow \infty} 0, \\ a_2 \tilde{\tilde{p}}_{i\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) - \tilde{\tilde{p}}_{i\tilde{\phi}}(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) = \tilde{q}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t), \tilde{\tilde{p}}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\phi} \rightarrow -\infty} 0, \\ \left(\tilde{c}_{i\varphi}(\varphi_{*-}, \psi, \eta, t) + \tilde{p}_{i\tilde{\phi}}(0_-, \psi, \eta, t) \right) = \frac{a_2}{a_1} \left(\tilde{c}_{i\varphi}(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) + \tilde{\tilde{p}}_{i\tilde{\phi}}(0_+, \psi, \eta, t) \right), \\ \tilde{c}_i(\varphi_{*-}, \psi, \eta, t) + \tilde{p}_i(0_-, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_i(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) + \tilde{\tilde{p}}_i(0_+, \psi, \eta, t), i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де

$$\tilde{q}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) = v^{-2}(\varphi_*, \psi, \eta) \cdot \left(\tilde{p}_{i-1t} - \sum_{j=1}^i \tilde{V}_j \cdot \tilde{p}_{i-j\tilde{\phi}} - a_1 \cdot \sum_{j=1}^i \tilde{V}_j \cdot \tilde{\tilde{p}}_{i-j\tilde{\phi}} - \right.$$

$$\left. - a_1 \cdot \sum_{j=0}^{i-2} (\tilde{B}_{1j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\psi\psi} + \tilde{B}_{2j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\eta\eta} + \tilde{D}_{1j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\psi} + \tilde{D}_{2j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\eta}) \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i(\tilde{\phi}, \psi, \eta, t) = v^{-2}(\varphi_*, \psi, \eta) \cdot \left(\tilde{p}_{i-1t} + \sum_{j=1}^i \tilde{V}_j \cdot \tilde{p}_{i-j\tilde{\phi}} - a_2 \cdot \sum_{j=1}^i \tilde{V}_j \cdot \tilde{p}_{i-j\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \right. \\ \left. - a_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\psi\psi} + \tilde{B}_{2j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\eta\eta} + \tilde{D}_{1j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\psi} + \tilde{D}_{2j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\eta} \right) \right), \end{aligned}$$

$\tilde{V}_l, \tilde{V}_l, \tilde{B}_{1l}, \tilde{B}_{1l}, \tilde{B}_{2l}, \tilde{B}_{2l}, \tilde{D}_{1l}, \tilde{D}_{1l}, \tilde{D}_{2l}$ і \tilde{D}_{2l} – коефіцієнти при однакових степенях ε розкладу функцій $v^2(\varphi_* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $v^2(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $b_1(\varphi_* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $b_1(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $b_2(\varphi_* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $b_2(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $d_1(\varphi_* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $d_1(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $d_2(\varphi_* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$ і $d_2(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_*$.

Для знаходження функцій $\tilde{P}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) матимемо такі задачі [5]:

$$\begin{cases} a_2 \cdot \tilde{P}_{0\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) + \tilde{P}_{0\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) = 0, \\ \tilde{P}_0(0, \psi, \eta, t) = c^*(\psi, \eta, t) - \tilde{c}_0(\varphi^*, \psi, \eta, t), \tilde{P}_0(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\xi} \rightarrow \infty} 0, \\ a_2 \cdot \tilde{P}_{i\tilde{\xi}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) + \tilde{P}_{i\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) = v^{-2}(\varphi_*, \psi, \eta) \cdot \hat{q}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t), \\ \tilde{P}_i(0, \psi, \eta, t) = -c_i(\varphi^*, \psi, \eta, t), \tilde{P}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\xi} \rightarrow \infty} 0, i = \overline{1, n+1}, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} \hat{q}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t) = \tilde{p}_{i-1t} + \sum_{j=1}^i \hat{V}_j \cdot \tilde{p}_{i-j\tilde{\xi}} - a_2 \cdot \sum_{j=1}^i \hat{V}_j \cdot \tilde{p}_{i-j\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - \\ - a_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-2} \left(\hat{B}_{1j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\psi\psi} + \hat{B}_{2j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\eta\eta} + \hat{D}_{1j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\psi} + \hat{D}_{2j} \cdot \tilde{p}_{i-2-j\eta} \right), \end{aligned}$$

$\hat{V}_l, \hat{B}_{1l}, \hat{B}_{2l}, \hat{D}_{1l}$ і \hat{D}_{2l} – коефіцієнти при однакових степенях ε розкладу функцій $v^2(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $b_1(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $b_2(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$, $d_1(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$ і $d_2(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\phi}, \psi, \eta)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Функції $\underline{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$ і $\underline{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) знайдемо, розв'язавши задачі [5, 12-14]:

$$\begin{cases} a_1 \cdot b_1(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{0\eta\eta} - v^2(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{0\varphi} = \underline{H}_{0t}, \\ \underline{H}_0(\varphi, \zeta, \eta, t) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \infty} 0, \underline{H}_0(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{**}(\varphi, \eta, t) - \hat{M}_0(\varphi, \zeta, \eta, t), \\ a_1 \cdot b_1(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{i\eta\eta} - v^2(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{i\varphi} = \underline{H}_{it} - \hat{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t), i = \overline{1, n+1}, \\ \underline{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \infty} 0, \underline{H}_i(\varphi, Q_*, \eta, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i - \text{ не парне,} \\ -\hat{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t), \text{ якщо } i - \text{ парне.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 \cdot b_1(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{0\eta\eta} - v^2(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{0\varphi} = \underline{H}_{0t}, \\ \underline{H}_0(\varphi, \zeta, \eta, t) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \infty} 0, \underline{H}_0(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{**}(\varphi, \eta, t) - \widehat{M}_0(\varphi, \zeta, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 \cdot b_1(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{i\eta\eta} - v^2(\varphi, Q_*, \eta) \cdot \underline{H}_{i\varphi} = \underline{H}_{it} - \widetilde{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t), i = \overline{1, n+1}, \\ \underline{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) \xrightarrow{\zeta \rightarrow \infty} 0, \underline{H}_i(\varphi, Q_*, \eta, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i - \text{ не парне,} \\ -\widehat{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t), \text{ якщо } i - \text{ парне.} \end{cases} \end{cases}$$

Тут

$$\begin{aligned} \widehat{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) &= \widetilde{c}_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t) + \widetilde{p}_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t) + \widetilde{P}_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t), \\ \widetilde{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) &= \widetilde{\widetilde{c}}_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t) + \widetilde{\widetilde{p}}_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t) + \widetilde{\widetilde{P}}_{i-i/2}(\varphi, Q_*, \eta, t), \\ \widetilde{M}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) &= a_1 \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} B_{1*j} \cdot H_{i-j\zeta\zeta} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} D_{1*j} \cdot H_{i-1-j\zeta} + \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^{i-2} (V_{*k} \cdot H_{i-2-j\varphi\varphi} + B_{2*j} \cdot H_{i-2-j\eta\eta} + D_{2*k} \cdot H_{i-2-j\eta}) \right) - \sum_{j=1}^i V_{*j} \cdot P_{i-j\varphi}, \\ \widetilde{\widetilde{M}}_i(\varphi, \zeta, \eta, t) &= a_2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} B_{1*j} \cdot H_{i-j\zeta\zeta} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} D_{1*j} \cdot H_{i-1-j\zeta} + \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^{i-2} (V_{*k} \cdot H_{i-2-j\varphi\varphi} + B_{2*j} \cdot H_{i-2-j\eta\eta} + D_{2*k} \cdot H_{i-2-j\eta}) \right) - \sum_{j=1}^i V_{*j} \cdot P_{i-j\varphi}, \end{aligned}$$

$V_{*l}, B_{1*l}, B_{2*l}, D_{1*l}$ і D_{1*l} – коефіцієнти при однакових степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу функцій $v^2(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\zeta, \eta)$, $b_1(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\zeta, \eta)$, $b_2(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\zeta, \eta)$, $d_1(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\zeta, \eta)$ і $d_2(\varphi, Q_* + \sqrt{\varepsilon}\zeta, \eta)$ відповідно в ряд Тейлора в околі $\psi = Q_*$. Задачі для знаходження функцій $\widetilde{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$, $\widetilde{\widetilde{H}}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$, $\widetilde{T}_i(\varphi, \psi, \zeta, t)$, $\widetilde{\widetilde{T}}_i(\varphi, \psi, \zeta, t)$, $\widetilde{\widetilde{T}}_i(\varphi, \psi, \zeta, t)$, $\widetilde{\widetilde{\widetilde{T}}}_i(\varphi, \psi, \zeta, t)$ отримуються аналогічно до $\underline{H}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$ і $\underline{\underline{H}}_i(\varphi, \zeta, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$).

4. Результати числових розрахунків

Наведемо результати розрахунку розглянутого вище процесу “конвекції-дифузії” на ідеальному, породженому особливими точками $z_1 = 0$ і $z_2 = 50$ (відповідно витік і втік однакових інтенсивностей $Q = 4\pi$), фільтраційному фоні, комплексний потенціал якого $w = \frac{Q}{4\pi}(\text{wd}(z - z_1) - \text{wd}(z - z_2))$, $\text{wd}(z) =$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + i \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + j \cdot \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{при } \varphi_* = -1, \varphi^* = 1, \varphi_{**} = -0.2.$$

На рис. 2 а) зображено динамічну сітку в G_z : $\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}_i = \varphi_* + ((\varphi^* - \varphi_*) \cdot i) / 30$, $\psi(x, y, z) = \overline{\psi}_j = (Q_0 \cdot j) / 15$, $\eta(x, y, z) = \overline{\eta}_k = (Q^0 \cdot k) / 15$, $i = \overline{0, 30}$, $j = \overline{0, 15}$, $k = \overline{0, 15}$, $Q_* = 2.094$, $Q^* = 4.189$, $Q_{**} = -1.047$, $Q^{**} = 1.047$, на рис. 2 б) – еквіпотенціальні поверхні $\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}_i$ ($i = 0, 6, 12, 18, 24, 30$), на рис. 3 а), б) величина швидкості фільтрації $|v|$ у вузлах $(\varphi_i, \psi_j, \eta_0)$ і $(\varphi_i, \psi_j, \eta_{12})$ відповідно.

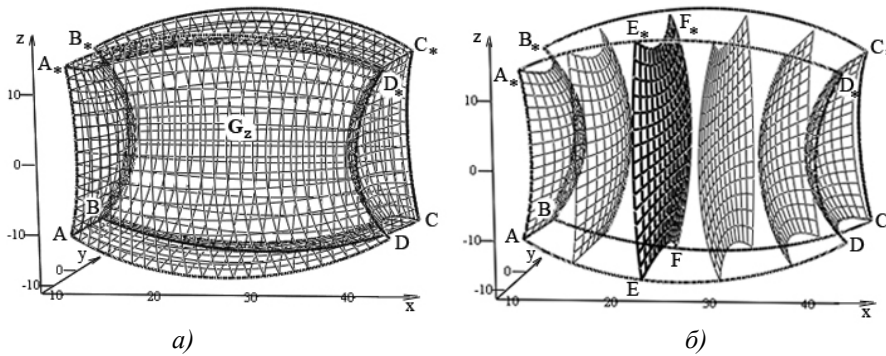


Рис. 2. Фізична область G_z (а) та відповідні їй еквіпотенціальні поверхні (б)

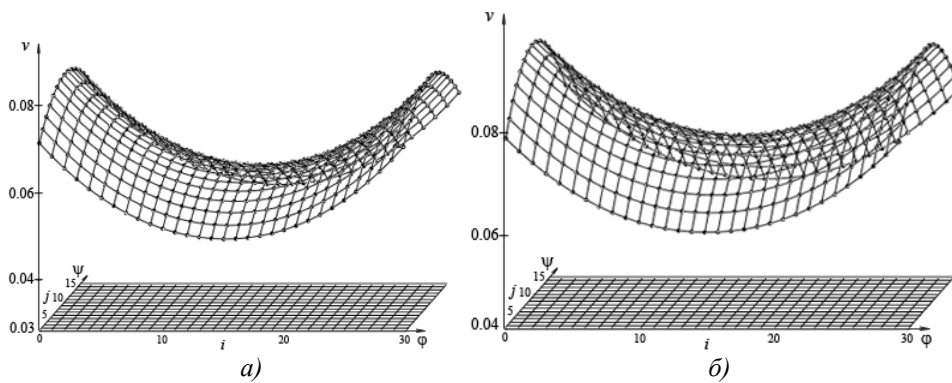


Рис. 3. Розподіл величини швидкості фільтрації відповідно вздовж поверхонь течії $\eta(\varphi, \psi, \eta) = \overline{\eta}_0$ і $\eta(\varphi, \psi, \eta) = \overline{\eta}_{12}$

Зауважимо, що при заданому виборі параметрів виконується рівняння Лапласа для функції потенціалу $\varphi = \varphi(x, y, z)$ з точністю $\varepsilon = 0.004$, а просторові комплексно спряжені функції $\psi = \psi(x, y, z)$ і $\eta = \eta(x, y, z)$ при $\kappa(x, y, z) =$

$$= \frac{1}{50} \sqrt{2500y^2 + (x^2 - 50x + y^2 + z^2)^2} \quad \text{задовольняють систему}$$

$$\begin{cases} \varphi_x = \kappa(x, y, z) \cdot (\psi_y \eta_z - \psi_z \eta_y), \\ \varphi_y = \kappa(x, y, z) \cdot (\psi_z \eta_x - \psi_x \eta_z), \\ \varphi_z = \kappa(x, y, z) \cdot (\psi_x \eta_y - \psi_y \eta_x), \\ \psi_x \eta_x + \psi_y \eta_y + \psi_z \eta_z = 0. \end{cases}$$

На рис. 4. зображено розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, \eta, t)$ при $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.001$, $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0.017 \cdot e^{-0.1(\varphi+\psi+\eta)^2}$, $c_*(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot e^{-(1+\psi+\eta)^2/(t^2+10)}$, $c^*(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot e^{-(1+\psi+\eta)^2/(t^2+10)}$, $c_{**}(\varphi, \eta, t) = 0.017 \cdot e^{-(2.094+\varphi+\eta)^2/(t^2+10)}$, $c^{**}(\varphi, \eta, t) = 0.017 \cdot e^{-(4.189+\varphi+\eta)^2/(t^2+10)}$, $c_{***}(\varphi, \psi, t) = 0.017 \cdot e^{-(1.047+\varphi+\psi)^2/(t^2+10)}$, $c^{***}(\varphi, \psi, t) = 0.017 \cdot e^{-(1.047+\varphi+\psi)^2/(t^2+10)}$.

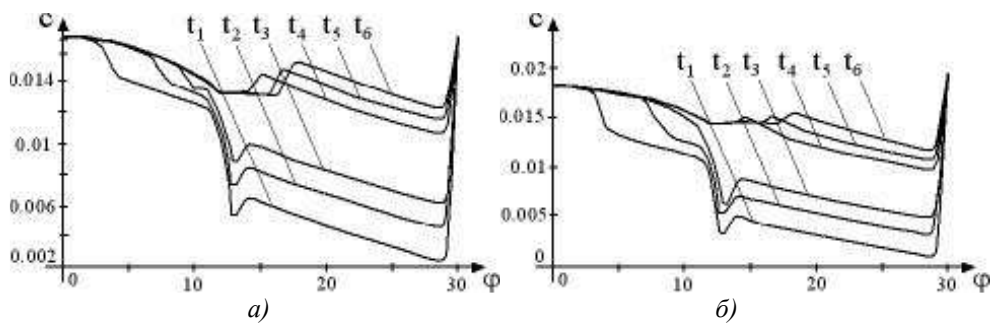


Рис. 4. Розподіл концентрації розчинної речовини вздовж лінії течії

$\{(\varphi, 2.653, -0.489) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*\}$ а) та $\{(\varphi, 2.653, -0.07) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*\}$ б)

в моменти часу $t_i = \{33.506, 74.119, 104.921, 155.758, 191.849, 228.8\}$ ($i = \overline{1, 6}$)

5. Висновки

Із вище проведених викладок бачимо, що при розв'язанні просторових сингулярно збурених задач типу “конвекція-дифузія” для фізичних областей, обмежених екіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, на даний просторовий, успіх від перенесення розробленої методики із плоского випадку на просторовий головним чином залежить від можливості побудови відповідного “просторового конформного відображення” $G_z \mapsto G_w$ (або $G_w \mapsto G_z$). Процедура побудови асимптотики розв'язку сингулярно збуреної “дифузійної складової” поставленої задачі проводиться аналогічно (відрізняється лише громіздкістю викладок та збільшенням кількості “бічних поправок”) до відповідного алгоритму у плоскому випадку.

Така методологія “розщеплення” вихідної задачі та конструкція побудови розв'язку шляхом доповнення розв'язку відповідної виродженої задачі різними поправками вже зараз знаходить вагоме застосування при прогнозуванні роботи і проектуванні двошарових каркасно-засипних фільтрів. Також, у **перспективі** планується застосування запропонованої методики для розв'язання відповідних

просторових сингулярно збурених задач для багатозв'язних областей [7-8], задач гетеродифузії [11-12], нелінійних задач, задач для анізотропних середовищ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1980. - 208 с.
2. Теория сингулярных возмущений в прикладных задачах. - Рига: Hitelser, 1990. - 187 с.
3. Bobisud L.E. Parabolic Equations with a Small Parameter and discontinuous Data // Journal of mathematical analysis and applications. - 1969. - Volum 26, №1. - P. 208-220.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.- Успехи математических наук. - 1957. - 12, вып. 5. - С. 3-122.
5. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. - 1982. - Т.4, №4. - С. 493-496.
6. Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной анизотропной среде. - К.: 1985. - 17 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.72).
7. Бомба А.Я., Пригорницький Д.А., Присяжнюк И.М. Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика. - 2004. - №1. - С. 152-159.
8. Бомба А.Я., Скопечкий В.В., Присяжнюк И.М. Решение задач типа "конвекция-фильтрация" в многосвязных областях // Компьютерная математика. - 2004. - №2. - С. 99-104.
9. Бомба А.Я., Присяжнюк И.М. Асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням // Доповіді НАН України. - 2005. - №3. - С.60-66.
10. Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. НАН України, Центр матем. моделювання Ін-ту прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача. - Львів: СПОЛОМ, 2003. - 128 с.
11. Burak Ya., Chaplia Ye., Chernukha O. Problems of mechanothermodiffusive processes modelling and optimization in manyphases continuum systems // In mat.: II Szkoła Geomechaniki (miedz. konf.). - Gliwice: Polit. Slaska, 1995. - P. 343-351.
12. Бомба А.Я. Просторові сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. - 2003. - Вип. 1 (10). - С. 27-35.
13. Бомба А.Я., Присяжнюк И.М., Климюк Ю.Є. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу просторових задач конвективно-дифузійного переносу в плоских фільтраційних пластах // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2005. - Т. 10, число 3. - С. 158-165.

14. Климюк Ю.Є. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу модельних просторових нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія-масообмін" // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. - 2005. - Вип. 3 (12). - С. 80-93.
15. Бульчева О.Н. Построение асимптотического разложения решения сингулярно возмущённого уравнения параболического типа с кусочно-гладкими коэффициентами, определённого в прямоугольном параллелепипеде. - В кн.: Методы теории сингулярных возмущений в прикладных задачах. - Рига: IntelServ, 1990. - С. 93-101.