

## Сингулярное интегральное уравнение задачи дифракции E-поляризованной электромагнитной волны на параболоиде

В. С. Булыгин

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

A problem of E – polarized electromagnetic wave diffraction on a circular finite paraboloid is investigated. Using obtained in [1] integral equation with logarithmic singularity in azimuth component of surface current density, the problem is reduced to a singular integral equation that is solved by the method of discrete singularities. Far- and close- zone diffracted electromagnetic fields are expressed using this integral equation. The numerical experiment results are given for surface current density and diffraction diagram.

### 1. Введение

Задача о возбуждении параболоида конечных размеров электромагнитной волной имеет большое практическое значение, так как параболические рефлекторы широко используются в антенной технике. В работах [1] -[3] задача дифракции E – поляризованной электромагнитной волны на идеально проводящей поверхности параболоида вращения конечных размеров была сведена к интегральному уравнению 1-го рода с логарифмической особенностью. В данной работе, используя результаты [1] - [3], задача впервые будет решена методом дискретных особенностей с предварительным сведением ее к сингулярному интегральному уравнению. При этом для построения дискретной математической модели используются квадратурные формулы интерполяционного типа [4], что обеспечивает высокую скорость сходимости приближенного решения к точному [5], [6]. В последние годы при решении различных краевых задач все большее применение находят сингулярные интегральные уравнения([5]-[8]). Следует отметить, что при аналитических исследованиях в приложениях уже давно двумерные краевые задачи стали сводить к сингулярным интегральным уравнениям, так как для них хорошо разработаны методы оценки скорости сходимости приближенного решения к точному ([5], [6], [8], [9]).

В работе [1] задача дифракции электромагнитной волны на параболоиде численно решалась методом саморегуляризации, а приближенное решение интегрального уравнения находилось в виде кусочно-постоянной функцией. В настоящей статье будут приведены результаты сравнения численной устойчивости метода саморегуляризации и метода дискретных особенностей с использованием квадратурных формул интерполяционного типа.

Последний метод имеет ряд преимуществ. Во-первых, учитывается поведение на ребре, где азимутальная составляющая плотности поверхностного тока уходит на бесконечность. Во-вторых, квадратурные формулы интерполяционного типа для сингулярных интегралов, интегралов с

логарифмической особенностью и с ядрами, удовлетворяющими условию Гельдера, обладают высокой скоростью сходимости к точным значениям интеграла. И, наконец, в-третьих, система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для приближенного решения сингулярного интегрального уравнения получена методом дискретных особенностей, что гарантирует устойчивость ее решения.

## 2. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу дифракции E-поляризованной электромагнитной волны  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  на идеально проводящей поверхности  $S$  параболоида вращения конечных размеров, расположенной в безграничной однородной изотропной среде. Зависимость от времени задается множителем  $e^{i\omega t}$ . Источником возбуждения может служить, например, осевой магнитный вибратор или виток с электрическим полем постоянной амплитуды. В этом случае полное электромагнитное поле не будет зависеть от  $\varphi$ . Под воздействием первичного поля  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  на  $S$  наводятся поверхностные электрические токи с плотностью  $\vec{j}$ , которые создают рассеянное электромагнитное поле  $\vec{E}, \vec{H}$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  таким образом, чтобы полярная ось совпала с осью параболоида  $S$ .

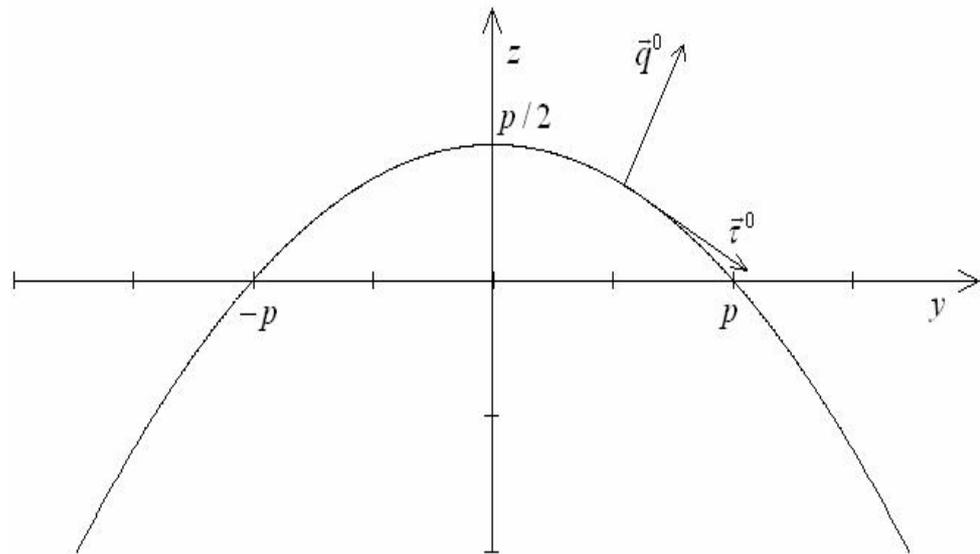


Рис. 1 Сечение параболоида плоскостью YOZ

Введем также параболоидную систему координат  $(q, \tau, \varphi)$ :

$$x = q \cdot \tau \cdot \cos(\varphi), \quad y = q \cdot \tau \cdot \sin(\varphi), \quad z = \frac{1}{2}(q^2 - \tau^2).$$

Поверхность параболоида задается параметрически:

$S: q = q_0, \tau \in [0, \alpha], \varphi \in [0, 2\pi]$ . Фокальное расстояние параболы  $p = q_0^2$ . Фокус расположен в начале координат. Определенные в данной точке орты  $(\vec{q}^0, \vec{\tau}^0, \vec{\varphi}^0)$  образуют правую тройку векторов, а связь координат  $q$  и  $\tau$  с цилиндрическими  $r$  и  $z$  выражается формулами:  $r = q \cdot \tau, z = \frac{1}{2}(q^2 - \tau^2)$ .

Задача состоит в определении рассеянного электромагнитного поля.

### 3. Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению

В рассматриваемом случае поверхностная плотность тока  $\vec{j}(\tau) = \vec{\varphi}^0 j_\varphi(\tau)$ .

Компонента  $j_\varphi(\tau)$  удовлетворяет интегральному уравнению [1]:

$$\frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_0^\alpha \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikL(\tau,t,\psi)}}{L(\tau,t,\psi)} \cos(\psi) d\psi \right\} j_\varphi(t) \cdot q_0 t \cdot h_\tau(t) dt = E_\varphi^0(\tau), \tau \in [0, \alpha] \quad (1)$$

$$\text{Здесь } L(\tau, t, \psi) = \sqrt{q_0^2 \tau^2 + q_0^2 t^2 - 2q_0^2 \tau \cdot t \cdot \cos(\psi) + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2},$$

$$h_\tau(t) = \sqrt{q_0^2 + t^2}$$

Введем обозначение:

$$S(\tau, t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikL(\tau,t,\psi)}}{L(\tau,t,\psi)} \cos(\psi) d\psi$$

Заметим, что нельзя вносить предел при  $\tau \rightarrow t$  под знак интеграла т. к. при  $\psi = 0, 2\pi$ :

$$L(\tau, t, 0) = L(\tau, t, 2\pi) = \sqrt{q_0^2 + \frac{1}{4}(t + \tau)^2} |t - \tau|$$

Найдем асимптотическое поведение функции  $S(\tau, t)$  при  $\tau \rightarrow t$ :

$$\begin{aligned} S(\tau, t) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikL(\tau,t,\psi)} - 1}{L(\tau,t,\psi)} \cos(\psi) d\psi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(\tau,t,\psi)} \cos(\psi) d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikL(\tau,t,\psi)} - 1}{L(\tau,t,\psi)} \cos(\psi) d\psi + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi) - 1}{L(\tau,t,\psi)} d\psi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(\tau,t,\psi)} d\psi \end{aligned} \quad (2)$$

Первое и второе слагаемые есть гладкие функции, производные которых удовлетворяют условию Гельдера по каждой переменной равномерно по второй[3].

$$\begin{aligned} L(\tau, t, \psi)^2 &= (q_0 \tau + q_0 t)^2 - 4q_0^2 \tau \cdot t \cdot \cos^2 \frac{\psi}{2} + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2 = \\ &= (r^*)^2 \left( 1 - \nu^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } r^* = \sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}, \quad \nu = \frac{2q_0\sqrt{\tau \cdot t}}{r^*}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(\tau, t, \psi)} d\psi &= \frac{2}{r^*} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \nu^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}\right)}} d\psi = \\ &= \frac{4}{r^*} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2 \sin^2 \beta)}} d\beta = \frac{4}{r^*} K(\nu), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $K(\nu)$  - эллиптический интеграл первого рода.

Воспользуемся асимптотическим разложением интеграла  $K(\nu)$  [2]:

$$K(\nu) = \ln \frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}} - \frac{1}{4} \left( \ln \frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}} - 1 \right) (1-\nu^2) + \dots$$

В силу тождеств:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\nu^2} &= \frac{\sqrt{(q_0\tau - q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}}{\sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}}, \\ \ln \frac{4}{\sqrt{1-\nu^2}} &= -\ln \left( \sqrt{(q_0\tau - q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2} \right) + \ln \left( 4 \sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2} \right) = \\ &= -\ln|\tau - t| - \ln \left( \sqrt{q_0^2 + \frac{1}{4}(t + \tau)^2} \right) + \ln \left( 4 \sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2} \right) \end{aligned}$$

получим асимптотику:

$$K(\tau, t) = -\ln|\tau - t| + K_1(\tau, t), \quad (4)$$

Покажем, что  $\frac{\partial}{\partial \tau} K_1(\tau, t)$  - удовлетворяют условию Гельдера.

В разложении для  $\frac{\partial}{\partial \tau} K_1(\tau, t)$  все слагаемые будут гладкими функциями, кроме  $F(\tau, t) = (\tau - t) \ln|\tau - t|$

Поэтому, достаточно показать, что функция  $f(x) = x \ln|x|$  - удовлетворяет условию Гельдера. Для этого, по определению [3], необходимо показать, что существуют константы  $\alpha \in (0, 1)$  и  $M > 0$  такие, что:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \quad (5)$$

Фиксируем  $y = 0$ :

$$\frac{\ln|x| \cdot x}{x^\alpha} = \ln(x) \cdot x^{1-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

при  $\alpha \in (0,1)$

Поэтому существует константа  $M_1 > 0$  такая, что

$$f(x) \leq M|x|^\alpha$$

Фиксируем теперь  $y \neq 0$  и воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{x \ln|x| - y \ln|y|}{(x-y)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{1 + \ln|x|}{\alpha(x-y)^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \rightarrow y} 0,$$

при  $\alpha \in (0,1)$

Поэтому существует константа  $M_2 > 0$  такая, что в случае  $y \neq 0$

$$|f(x) - f(y)| \leq M_2|x-y|^\alpha, \quad \alpha \in (0,1)$$

Взяв  $M = \max\{M_1, M_2\}$  получим (5)

Отсюда  $F(\tau, t)$  удовлетворяют условию Гельдера по каждой переменной равномерно по второй с показателем  $\alpha \in (0,1)$ .

Т. о. из (2), (3) и (4) следует:

$$S(\tau, t) = -\frac{4}{\sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}} \ln|\tau - t| + Q_1(\tau, t) \quad (6),$$

где  $Q_1(\tau, t)$  - гладкая функция такая, что  $\frac{\partial}{\partial \tau} Q_1(\tau, t)$  удовлетворяют условию Гельдера (в указанном выше смысле).

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}} &= 4(t+\tau)^{-1} \left( q_0^2 + \frac{1}{4}(t-\tau)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 4(t+\tau)^{-1} \left( 1 + \frac{1}{8}(t-\tau)^2 + O(t-\tau)^3 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем разложение (6):

$$\begin{aligned} S(\tau, t) &= -\frac{4}{t+\tau} \ln|\tau - t| + \\ &+ \left( \frac{4}{t+\tau} - \frac{4}{\sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}} \right) \ln|\tau - t| + Q_1(\tau, t), \end{aligned}$$

в силу (7):

$$c(\tau, t) = \left( \frac{4}{\sqrt{(q_0\tau + q_0t)^2 + \frac{1}{4}(t^2 - \tau^2)^2}} - \frac{4}{t + \tau} \right) \ln|\tau - t| =$$

$$= \ln|\tau - t| \left( \frac{1}{8}(t - \tau)^2 + O(t - \tau)^3 \right)$$

В силу того, что  $(\tau - t) \ln|\tau - t|$  удовлетворяет условию Гельдера, функция  $\frac{\partial}{\partial \tau} c(\tau, t)$  также удовлетворяет условию Гельдера.

Таким образом, получили разложение

$$S(\tau, t) = -\frac{4}{t + \tau} \ln|\tau - t| + Q_2(\tau, t),$$

где  $Q_2(\tau, t)$  - гладкая функция такая, что  $\frac{\partial}{\partial \tau} Q_2(\tau, t)$  удовлетворяет условию Гельдера.

Далее воспользуемся разложением:

$$(t + \tau)^{-1} = \frac{1}{2\tau} \left( 1 + \left( \frac{t}{2\tau} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{2\tau} \left( 1 - \left( \frac{t}{2\tau} - \frac{1}{2} \right) + O(t - \tau)^2 \right) = \frac{1}{4\tau} \left( 3 - \frac{t}{\tau} \right) + O(t - \tau)^2$$

Рассуждая аналогично, получим:

$$S(\tau, t) = -\frac{1}{\tau} \left( 3 - \frac{t}{\tau} \right) \ln|\tau - t| + Q_3(\tau, t)$$

где  $Q_3(\tau, t)$  - гладкая функция такая, что  $\frac{\partial}{\partial \tau} Q_3(\tau, t)$  - удовлетворяет условию Гельдера.

Перепишем уравнение (1) :

$$-2 \int_0^\alpha \ln|\tau - t| j_\varphi(t) \cdot q_0 t \cdot h_\tau(t) dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\alpha (t - \tau) \ln|\tau - t| j_\varphi(t) \cdot q_0 t \cdot h_\tau(t) dt$$

$$+ \tau \int_0^\alpha Q_3(\tau, t) j_\varphi(t) \cdot q_0 t \cdot h_\tau(t) dt = \frac{4\pi}{i\omega\mu} \tau E_\varphi^0(\tau), \quad \tau \in (0, \alpha) \quad (8)$$

Здесь  $Q_3(\tau, t) = S(\tau, t) + \frac{1}{\tau} \left( 3 - \frac{t}{\tau} \right) \ln|\tau - t|$

Сделаем замену переменных:

$$\tau = \alpha \frac{y+1}{2}, \quad t = \alpha \frac{x+1}{2}$$

Введем обозначения:

$$g(x) = \frac{4\pi}{i\omega\mu} \tau(x) E_\varphi^0(\tau(x))$$

$$w(x) = \frac{j_\varphi(t(x)) \cdot q_0 t(x) \cdot h_\tau(t(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

В силу того, что при  $t = \alpha$   $j_\varphi(t)$  имеет особенность типа  $(\alpha - t)^{-1/2}$  [6] функция  $w(x)$  не будет иметь особенностей.

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$-\alpha \int_{-1}^1 \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\alpha}{2(y+1)} \int_{-1}^1 (y-x) \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 \tau(y) Q_3(\tau(y), t(x)) w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = g(y), \quad y \in (-1, 1) \quad (9)$$

Воспользуемся «правилом дифференцирования интеграла с логарифмическим ядром»[4]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{y-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 (y-x) \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^1 w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Уравнение (9) эквивалентно уравнению:

$$-\alpha \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{y-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\alpha}{2(y+1)} \int_{-1}^1 \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \int_{-1}^1 K(y, x) w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = g(y), \quad y \in (-1, 1) \quad (10)$$

с дополнительным условием:

$$-\alpha \int_{-1}^1 \ln|y^*-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 Q(y^*, x) w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = g(y^*), \quad (11)$$

Здесь  $y^* \in (-1, 1)$  - фиксированная точка,

Функции

$$K(y, x) = \frac{\alpha}{2} \left( \tau(y) \frac{\partial}{\partial y} S(\tau(y), t(x)) + \frac{\alpha}{2} S(\tau(y), t(x)) \right) + \frac{\alpha}{y-x} +$$

$$+ \frac{1}{\tau(y)} \ln|y-x|,$$

$Q(y, x) = \alpha \frac{y+1}{2} S\left(\alpha \frac{y+1}{2}, \alpha \frac{x+1}{2}\right) + 2 \ln|y-x|$  удовлетворяет условию

Гельдера.

Введем обозначения в соответствии с [4]:

$$(\Gamma w)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{y-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(Lw)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|y-x| w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(Kw)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(y, x) w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Имеют место следующие соотношения [4]:

$$\Gamma : T_n(x) \rightarrow U_{n-1}(y) \quad (12)$$

$$L : T_n(x) \rightarrow -\frac{T_n(x)}{n} \quad (13)$$

#### 4. Дискретная математическая модель

Приближенное решение  $w_n(x)$  задачи (10), (11) ищется в виде интерполяционного полинома степени  $n-1$  по узлам Чебышева 1ого рода:

$$\begin{aligned} \{t_l^n\}_{l=0}^{n-1} &= \left\{ \cos \frac{2l-1}{2n} \right\}_{l=0}^{n-1} : w_n(t_l^n) = w(t_l^n). \\ & - \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_n(x)}{y-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\alpha}{2\pi(y+1)} \int_{-1}^1 \ln|y-x| w_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{n-1, n_x}(y, x) w_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} g_n(y), \quad y \in (-1, 1) \end{aligned} \quad (14)$$

с дополнительным условием:

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|y^*-x| w_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^1 Q_{n-1, n_x}(y^*, x) w_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = \frac{1}{\pi} g_n(y^*), \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $K_{n-1, n_x}(y, x)$ ,  $Q_{n-1, n_x}(y^*, x)$  - интерполяционные полиномы степени  $n$  по переменной  $x$ , построенный по узлам Чебышева 1ого рода  $\{t_l^n\}_{l=0}^{n-1}$ , и степени  $n-1$  по переменной  $y$ , построенный по узлам Чебышева 2ого рода

$$\{t_{0m}^n\}_{m=0}^{n-2} = \left\{ \cos \frac{m+1}{n} \right\}_{m=0}^{n-2},$$

$g_n(y)$ - интерполяционные полиномы степени  $n-2$ , построенный по узлам Чебышева 2ого рода.

Обозначим операторы:

$$(K_n w)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{n-1, y, n_x}(y, x) w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(Q_n w)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{n-1, y, n_x}(y, x) w(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Очевидно, что оператор  $K_n$  переводит полином степени  $n-1$  в полином степени  $n-2$ . Таким образом, в силу (12) и (13), в уравнении (14) слева и справа стоят полиномы степени  $n-2$ . Поэтому уравнение (11) эквивалентно его выполнению в  $n-1$  точках, т. е. (14) и (15) эквивалентно:

$$-\alpha (\Gamma w_n)(t_{0l}^n) - \frac{\alpha}{2(t_{0l}^n + 1)} (Lw_n)(t_{0l}^n) + (K_n w_n)(t_{0l}^n) = \frac{1}{\pi} g(t_{0l}^n), \quad l = 0..n-2 \quad (16)$$

с дополнительным условием:

$$-\alpha (Lw_n)(y^*) + \frac{\alpha}{2} (Q_n w_n)(y^*) = \frac{1}{\pi} g(y^*) \quad (17)$$

Воспользуемся квадратурными формулами[3] :

$$(\Gamma w_n)(t_{0l}^n) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_n(x)}{t_{0l}^n - x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{w(t_m^n)}{t_{0l}^n - t_m^n} \quad (18)$$

$$(Lw_n)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x-y| w_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} w(t_m^n) \left[ \ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} T_p(y) \frac{T_p(t_m^n)}{p} \right] \quad (19)$$

$$(K_n w)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{n-1, y, n_x}(y, x) w_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} w(t_m^n) K_{n-1, y, n_x}(y, t_m^n) \quad (20)$$

и перепишем (16), (17) в виде следующей СЛАУ относительно неизвестных  $x_m^n$ ,  $m = 0..n-1$

$$\sum_{m=0}^{n-1} x_m^n \frac{1}{n} \left[ \frac{-\alpha}{t_{0l}^n - t_m^n} + \frac{\alpha}{2(t_{0l}^n + 1)} \left[ \ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} T_p(t_{0l}^n) \frac{T_p(t_m^n)}{p} \right] + K_{n-1, y, n_x}(t_{0l}^n, t_m^n) \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} g(t_{0l}^n), \quad l = 0..n-2 \quad (21)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} x_m^n \left[ \frac{\alpha}{n} \left[ \ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} T_p(y^*) \frac{T_p(t_m^n)}{p} \right] + \frac{\alpha}{2n} Q_{n-1, y, n_x}(y^*, t_m^n) \right] = \frac{1}{\pi} g(y^*) \quad (22)$$

### 5. Выражения электромагнитного поля в точке и диаграммы рассеяния

Азимутальная компонента плотности поверхностного тока выражается через решение интегрального уравнения (10) с дополнительным условием (11):

$$j_\varphi(x) = \frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2} \frac{x+1}{2} \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}$$

Покажем, что через решение задачи (10), (11) выражается поле  $E_\varphi(q, \tau)$

В [1] дано представление для компоненты рассеянного поля  $E_\varphi(q, \tau)$  через компоненту плотности поверхностного тока  $j_\varphi(t)$ :

$$-\frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_0^\alpha S(q, \tau, t) j_\varphi(t) \cdot qt \cdot h_\tau(q, t) dt = E_\varphi(q, \tau)$$

$$\text{Здесь } S(q, \tau, t) = \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikL(q, \tau, t, \psi)}}{L(q, \tau, t, \psi)} \cos(\psi) d\psi \right\},$$

$$L(q, \tau, t, \psi) = \sqrt{q^2 \tau^2 + q_0^2 t^2 - 2q\tau \cdot q_0 t \cdot \cos(\psi) + \frac{1}{4} \left( (q^2 - \tau^2) - (q_0^2 - t^2) \right)^2},$$

$$h_\tau(q, t) = \sqrt{q^2 + t^2}.$$

Сделаем замену:  $t = \alpha \frac{x+1}{2}$  и воспользуемся выражением для  $j_\varphi(x)$ :

$$-\frac{i\omega\mu\alpha}{8\pi} \int_{-1}^1 S(q, \tau, t(x)) w(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = E_\varphi(q, \tau)$$

Используя квадратурную формулу (20), получим представление для приближенных значений  $E_\varphi(q, \tau)$ :

$$E_\varphi^n(q, \tau) = -\frac{i\omega\mu\alpha}{8n} \sum_{k=0}^{n-1} S\left(q, \tau, \alpha \frac{t_k^n + 1}{2}\right) \cdot w(t_k^n)$$

Удобней находить поле в цилиндрической системе координат с помощью соотношений:

$$q(r, z) = \sqrt{z + \sqrt{z^2 + r^2}}, \quad \tau(r, z) = \sqrt{-z + \sqrt{z^2 + r^2}}$$

Получим теперь выражение для  $E_\varphi$  в дальней зоне:

$E_\varphi(R, \theta, \varphi) \approx F(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikR}}{R}$ , где  $R \rightarrow \infty$ , а  $(\theta, \varphi)$  - точка на единичной сфере в сферической системе координат:  $x=r \cdot \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y=r \cdot \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z=r \cdot \cos \theta$ .

Диаграмма рассеяния:

$$F(\theta, \varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{E_\varphi(R, \theta, \varphi)R}{e^{-ikR}}$$

В этом случае:

$$\begin{aligned} L(R, \theta, \psi, t) &= \sqrt{R^2 + q_0^2 t^2 - 2q_0 t R \sin(\theta) \cos(\psi) + \frac{1}{4}(q_0^2 - t^2)^2 - R \cos(\theta)(q_0^2 - t^2)} = \\ &= R \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{4}(q_0^2 - t^2)^2 + q_0^2 t^2}{R^2} - \frac{2q_0 t \sin(\theta) \cos(\psi) + \cos(\theta)(q_0^2 - t^2)}{R}} = \\ &= R \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{2q_0 t \sin(\theta) \cos(\psi) + \cos(\theta)(q_0^2 - t^2)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right) \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-ikL(R, \theta, \psi, t)}}{L(R, \theta, \psi, t)} \frac{R}{e^{-ikR}} = e^{ik[q_0 t \sin(\theta) \cos(\psi) + \cos(\theta)(q_0^2 - t^2)]}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ik[q_0 t \sin(\theta) \cos(\psi) + \frac{1}{2} \cos(\theta)(q_0^2 - t^2)]} \cos(\psi) d\psi = e^{\frac{ik}{2} q_0 t \sin(\theta) \cos(\theta) (q_0^2 - t^2)} \int_0^{2\pi} e^{ikq_0 t \sin(\theta) \cos(\psi)} \cos(\psi) d\psi$$

Для подсчета интеграла справа воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя [10]:

$$J_0(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iT \cos \theta} d\theta,$$

где  $T = kq_0 t \sin(\theta)$ .

Продифференцируем левую и правую части:

$$-J_1(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iT \cos \theta} i \cos \theta d\theta$$

Отсюда следует:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikq_0 t \sin(\theta) \cos(\psi)} \cos(\psi) d\psi = 2\pi i J_1(kq_0 t \sin(\theta))$$

$$F(\theta, \varphi) = -\frac{i\omega\mu\alpha}{8n} \int_{-1}^1 e^{\frac{ik}{2} \cos(\theta)(q_0^2 - t^2)} 2\pi i J_1(q_0 k t \sin(\theta)) w(x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Воспользуемся квадратурной формулой (17) и получим выражение для приближенных значений  $F(\theta, \varphi)$ :

$$F^n(\theta, \varphi) = -\frac{\omega\mu\alpha\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{ik}{2} \cos(\theta) \left(q_0^2 - \left(\frac{t_k^n + 1}{2}\right)^2\right)\right) J_1\left(q_0 k \frac{t_k^n + 1}{2} \sin(\theta)\right) \cdot w(t_k^n)$$

### 6. Результаты численного эксперимента.

Пусть первичное поле создается элементарным магнитным вибратором, который представляет собой короткий по сравнению с длиной волны тонкий цилиндр, обтекаемый магнитным током, комплексная амплитуда которого  $I_M^0$ . Его векторный потенциал[3]:

$$\vec{A}_M^0 = -\vec{z}^0 \frac{\varepsilon I_M^0 l e^{-ikR}}{4\pi R}, \quad (23)$$

где  $R$  - расстояние от середины цилиндра(точки  $N_0$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ ) до точки наблюдения  $N$ . Когда положительное направление магнитного тока  $I_M^0$  совпадает с положительным направлением оси  $Z$ , вектор электрической напряженности электромагнитного поля определяется выражением:

$$\vec{E}^0 = -\frac{1}{\varepsilon} \text{rot} \vec{A}_M^0 \quad (24)$$

Расположим элементарный магнитный вибратор вдоль оси  $OZ$  на расстоянии  $\delta$  от начала координат. Тогда  $R = \sqrt{r^2 + (z - \delta)^2}$ .

Отсюда и из (23), (24):

$$E_\varphi^0 = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{I_M^0 l e^{-ikR}}{4\pi R} = -\frac{I_M^0 l e^{-ikR}}{4\pi R} \left( ik \frac{r}{R} + \frac{r}{R^2} \right)$$

Численный эксперимент проводился для элементарного магнитного вибратора, расположенного в начале координат такого, что  $\frac{I_M^0 l}{4\pi\omega\mu} = 1$ .

В этом случае

$$g(y) = -4\pi i \cdot \alpha \frac{y+1}{2} \cdot \frac{e^{-ikR(y)}}{R(y)^2} \left(iky + \frac{y}{R(y)}\right)$$

$$\text{Здесь } R(y) = \sqrt{q_0^2 \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(q_0^2 - \left(\frac{y+1}{2}\right)^2\right)^2}$$

Решалось СЛАУ (21), (22) для  $q_0 = 1$ ,  $k = 10$ ,  $n = 100$

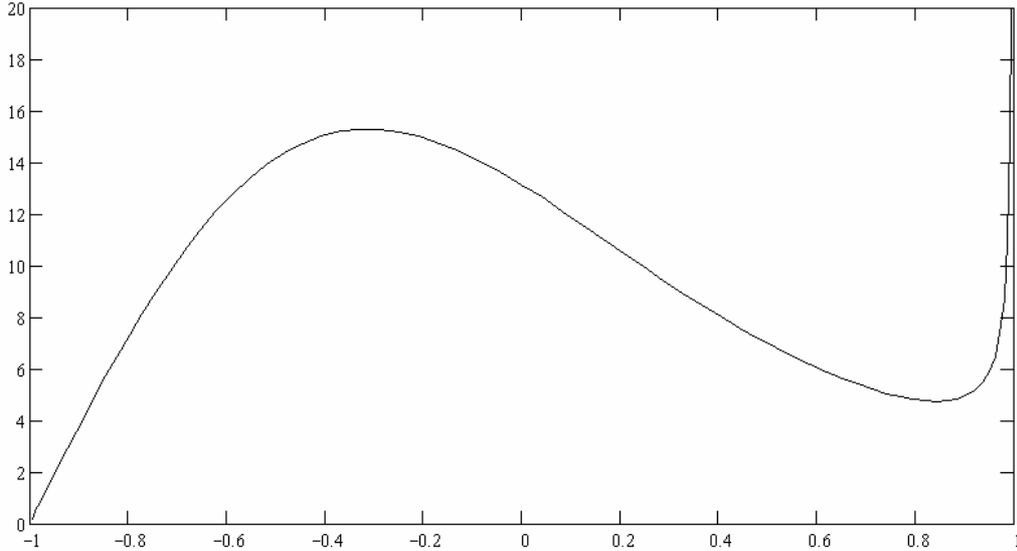


Рис. 2 Модуль поверхностного тока  $q_0 = 1$ ,  $k = 10$ ,  $n = 100$

Приведем примеры численной устойчивости метода дискретных особенностей с использованием квадратурных формул интерполяционного типа и метода саморегуляризации с представлением приближенного решения интегрального уравнения в виде кусочно-постоянной функцией[1].

Последний метод состоит в следующем: на интервале  $[0, \alpha]$  вводится система точек  $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta$ , которыми интервал  $[0, \alpha]$  разбивается на частичные интервалы  $h = \alpha/n$ ,  $n$  - количество интервалов. Приближенное решение интегрального уравнения (1) принимает значение  $C_m$  на интервале  $[t_{m-1}, t_m]$ . В качестве точек коллокации берутся  $\tau_j = (t_j + t_{j-1})/2$ . Приближенное решение уравнения (1) есть решение следующей СЛАУ:

$$\sum_{m=1}^n Q_{j,m} C_m = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

где

$$Q_{j,m} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikL(\tau_j, t, \psi)}}{L(\tau_j, t, \psi)} \cos(\psi) d\psi \right\} j_\varphi(t) \cdot q_0 t \cdot h_\tau(t) dt, \quad f_j = \frac{4\pi}{i\sigma\mu} E_\varphi^0(\tau)$$

СЛАУ (25) решалось для  $n = 25$  и  $n = 75$ . В этом случае  $\tau_j^{25} = \tau_{3j+1}^{75}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 24$ . Результаты приведем в виде графика: на вертикальной оси  $y_j = |C_j^{25} - C_{3j+1}^{75}|$ , на горизонтальной  $x_j = \tau_j^{25}$

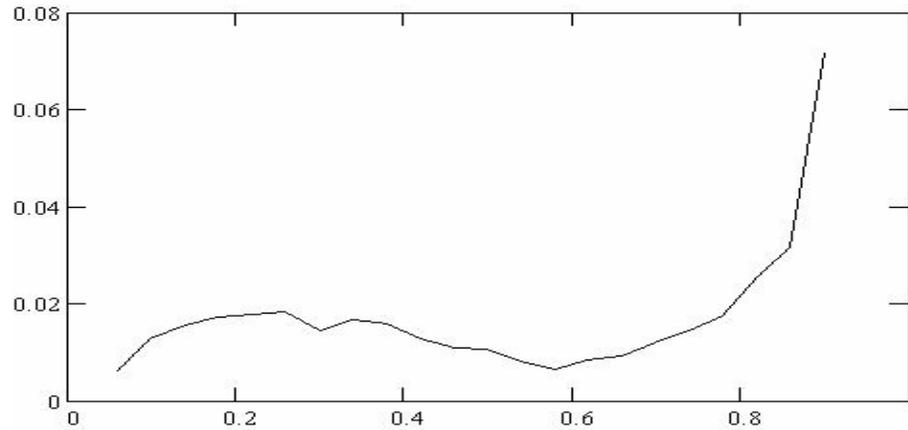


Рис. 3 Численная устойчивость метода саморегуляризации

Далее решалось СЛАУ (21), (22) для  $n = 25$  и  $n = 75$ . Узлы Чебышева  $t_j^{25} = t_{3j+1}^{75}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 24$ . На следующем графике по вертикале  $y_j = |X_j^{25} - X_{3j+1}^{75}|$ , а по горизонтали  $x_j = t_j^{25}$ .

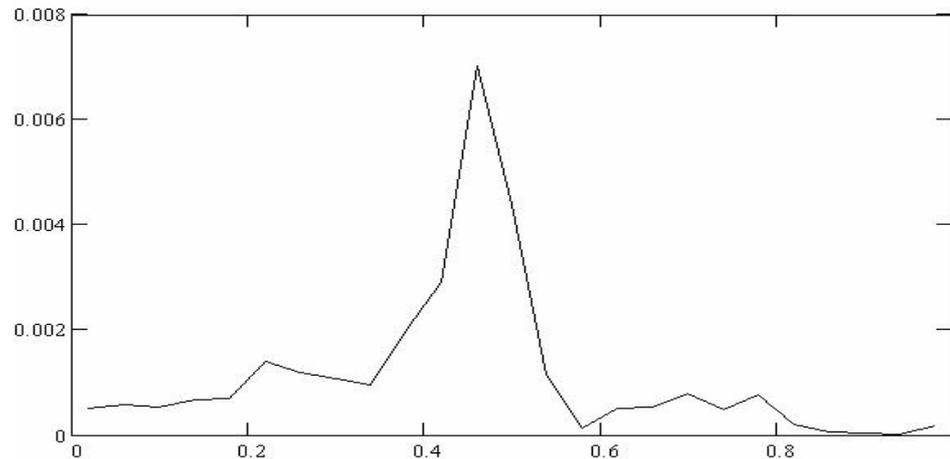


Рис. 4 Численная устойчивость метода дискретных особенностей

Как видим из рисунков 3 и 4 погрешность метода дискретных особенностей с использованием квадратурных формул интерполяционного типа на порядок меньше.

Приведем примеры нормированных диаграмм рассеяния для различных волновых чисел в случае параболоида  $q_0 = 1$ ,  $\alpha = 1$

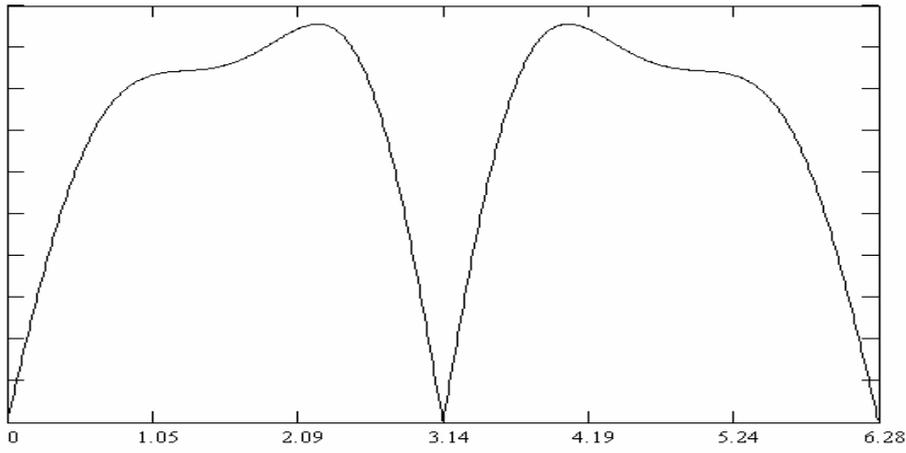


Рис. 5 Диаграмма рассеяния  $k = \pi$ ,  $n = 50$

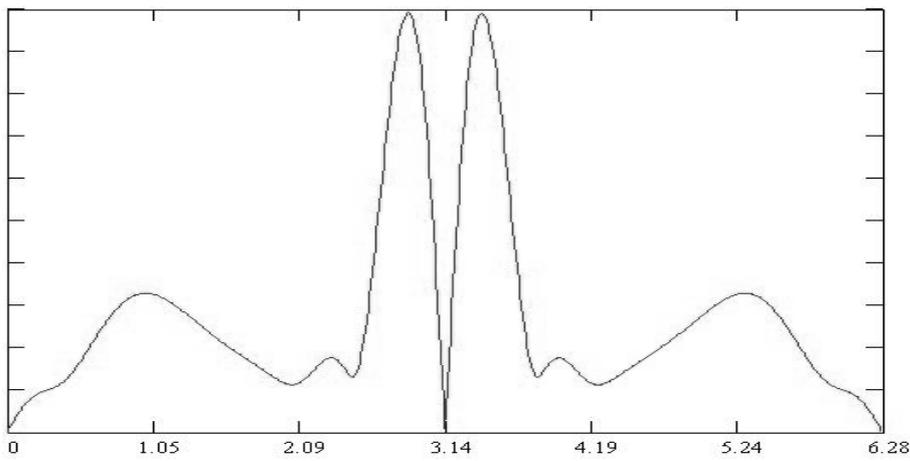


Рис. 6 Диаграмма рассеяния  $k = 3\pi$ ,  $n = 100$

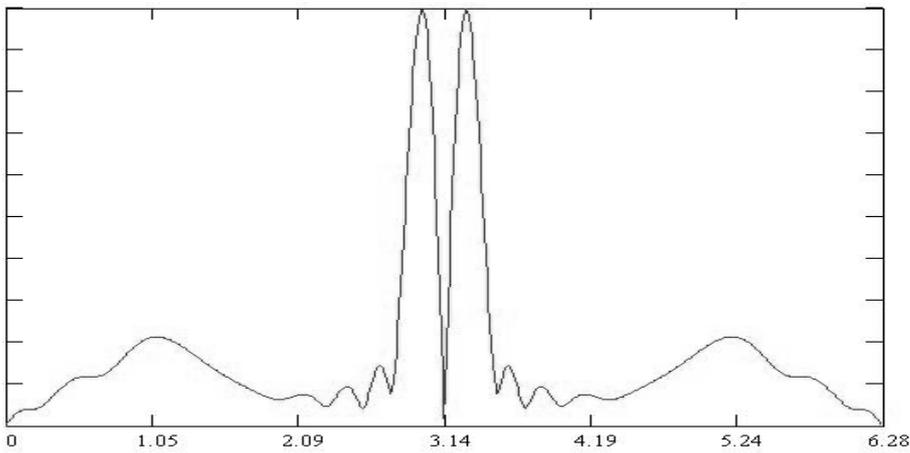


Рис. 7 Диаграмма рассеяния  $k = 5\pi$ ,  $n = 100$

### 7. Выводы

Задача дифракции Е-поляризованной электромагнитной волны на параболоиде впервые решена методом дискретных особенностей с предварительным сведением ее к сингулярному интегральному уравнению. Как показывает численный эксперимент, приближенное решение, найденное методом дискретных особенностей, значительно быстрее сходится к точному, чем распространенный метод, предложенный в [1]. Были получены приближенные выражения для электромагнитных полей в ближней и дальней зоне, вычисленные по квадратурным формулам интерполяционного типа [4], что обеспечило незначительную погрешность.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах. М.: Ротапринт ИРЭ АН СССР, 1984, 71 с.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. - 167 с.
3. Захаров Е. В. Численный анализ дифракции радиоволн.- М.: Радио и связь, 1982. - 184 с.
4. Гандель Ю.В. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков-2001, 92 с.
5. Гандель Ю.В. , Еременко С. В, Т. С. Полянская Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Ч. 2 – Харьков: ХГУ, 1992. -145 с.
6. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов : Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков: ХГУ, 1991. – 65 с.
7. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989.- 256 с.
8. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995.-520 с.
9. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения . -М.:”Янус-К”, 2001, С.508.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.:Наука, 1977, С.735