Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.6
№ 833, 2008, с.89-96

Моделирование нелинейных тепловых процессов на базе совместного применения метода возмущений, регионально-структурного и вариационного методов

Т. В. Бутенко, А. П. Слесаренко
Ин-т проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

The paper presents the results of the improved regional and analytical method applied to the solution of non-linear non-stationary problems in heat conduction for complex regions. Regional and analytical base functions exactly satisfying the regional non-linear boundary conditions, the conditions of the region interface and non-linear conditions of non-ideal heat interface for non-uniform media are more commonly used for approximation for regions of complex shape than united analytical structure of the solution.

В регионально-аналитическом моделировании процессов теплопроводности Ω область сложной формы разбивается на ряд непересекающихся подобластей этой области – регионов $\Omega_i\,(i=1,\ldots,n)$. Разбивка на регионы производится так, чтобы конфигурация области региона Ω_i была бы выпуклой и по возможности простой.

Для каждого региона Ω_i области сложной формы $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$ выбирается своя полная система функций в наиболее естественной криволинейной ортогональной системе координат. Эти полные системы функций входят в аналитические конструкции региональных структур решений. Предложенная формула «склеивания» элементарных региональных структур решений позволила придать аналитической конструкции решения, точно удовлетворяющей заданному набору граничных условий, региональный «модульный» вид.

Рассматривается нелинейная нестационарная задача теплопроводности при

$$\rho=\rho_0(1+\delta_1 T);\quad \lambda=\lambda_0(1+\delta_2 T),$$

где δ_1 и δ_2 - малые параметры.

При выборе в качестве малого параметра δ_1, решение рассматриваемой задачи представляется в виде

$$T=T_1+\delta_1 T_2, \tag{1}$$

тогда нелинейная краевая задача сводится к решению двух нелинейных краевых задач теплопроводности для функций T_1 и T_2.

Для решения данных задач применяются преобразования Лапласа или метод прямых совместно с регионально-структурным и вариационным методами [1-7].

Аналогично можно рассмотреть случай, когда решение нелинейной задачи представляется в виде

$$T = T_1 + \delta_1 T_2 + \ldots + \delta_1^{n-1} T_n \tag{2}$$

при соответствующей аппроксимации объемной теплоемкости и теплопроводности. Приводятся результаты решения тестовой задачи, которые сравниваются с данными, полученными методом конечных разностей.

При химических превращениях, тепловом взрыве и других явлениях температура значительно изменяется за малые промежутки времени. В этих случаях возникает необходимость учитывать зависимость коэффициентов от температуры, поток тепла становится нелинейным. Для определения температурного поля в рассматриваемой области необходимо решить дифференциальное уравнение переноса

$$\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = div[\lambda(u) grad\ u] + f, \tag{3}$$

где ρ - объемная теплоемкость; λ - коэффициент теплопроводности.

Решение уравнения (3) при определенных краевых условиях, заданных на контуре Г области Ω, связано со значительными трудностями.

Рассмотрим совместное применение операционно-структурного метода и метода малого параметра к решению нестационарной задачи теплопроводности для уравнения (3) с граничными и начальными условиями

$$\left[\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial w} + \alpha(u - u_c)\right]\Bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0 = const, \tag{5}$$

где α - коэффициент теплоотдачи, учитывающий тепловой поток от границы Г области Ω к окружающей среде с температурой u_c; w- направление внешней нормали к контуру Г.

Рассматриваемым объектом может быть, например, ограниченная пластина сложной формы с источниками энергии.

Для ряда металлов, из которых может быть изготовлен конструктивный элемент, удовлетворительное совпадение с опытом можно получить при аппроксимации объемной теплоемкости и теплопроводности формулами

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon_1 u), \quad \lambda = \lambda_0(1 + \varepsilon_2 u), \tag{6}$$

где ε_1 и ε_2 - малые параметры.

Пусть малым параметром для задачи будет ε_1. Аналогично уравнение (3) перепишем в виде

$$a_0\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \varepsilon_1 F(u) + F_0, \tag{7}$$

где

$$F_0 = \frac{1}{\lambda_0}; \quad a_0 = \frac{\rho_0}{\lambda_0};$$

$$F(u) = -u\Delta u - F_0 u + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}[(\nabla u)^2 + u\Delta u].$$

Для функции $v = u - u_0$ уравнение (7) и условия (4), (5) преобразуются к виду

$$a_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \varepsilon_1 F(v) + F_0, \tag{8}$$

$$\left[\lambda(v) \frac{\partial v}{\partial w} + \alpha v \right]\Bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{9}$$

$$v\big|_{t=0} = u_0 - u_c = v_0 = const, \tag{10}$$

где

$$F(v) = -F_0(v + u_c) - \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) v\Delta v - u_c \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\Delta v + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(\nabla v)^2.$$

Решение нелинейной задачи (8) – (10) будем искать в виде

$$v = v_1 + \varepsilon_1 v_2 \tag{11}$$

Тогда нелинейная краевая задача (8) – (10) сводится к решению двух линейных краевых задач теплопроводности:

$$a_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \Delta v_1 + F_0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial w} + h_0 v_1 \right)\Bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{13}$$

$$v_1\big|_{t=0} = v_0 \tag{14}$$

$$a_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = \Delta v_2 + F(v_1), \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial w} + h_0 v_2 \right)\Bigg|_{\Gamma} = \psi_1, \tag{16}$$

$$v_2\big|_{t=0} = 0, \tag{17}$$

где

$$h_0 = \frac{\alpha}{\lambda_0}; \quad \psi_1 = h_0 v_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(v_1 + u_c)\big|_{\Gamma}, \tag{18}$$

Применим к уравнениям (12), (15) и граничным условиям (13), (16) по переменной t интегральное преобразование Лапласа. Тогда в области изображений краевые задачи (12) – (14) и (15) – (17) сведутся к виду

$$\Delta \bar{v}_1 - a_0 p \bar{v}_1 = -v_0 a_0 - \bar{F}_0, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial w} + h_0 \bar{v}_1 \right)\Bigg|_{\Gamma} = 0 \tag{20}$$

и

$$\Delta \bar{v}_2 - a_0 \rho \bar{v}_2 = -\bar{F}(v_1), \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial w} + h_0 \bar{v}_2 \right)\Bigg|_{\Gamma} = \bar{\psi}_1 \tag{22}$$

Структуры решения задач (19) – (20) и (21) – (22) представим в виде

$$\bar{v}_1 = \sum_{i,j} \bar{C}_{ij}^{(1)}(\rho) X_{ij}^{(1)}(x, y), \tag{23}$$

$$\bar{v}_2 = \sum_{i,j} \bar{C}_{ij}^{(2)}(\rho) X_{ij}^{(2)}(x,y) + \bar{\Phi}_0, \tag{24}$$

где

$$X_{ij}^{(1)} = \varphi_{ij}^{(1)} - \omega D_1 \varphi_{ij}^{(1)} + \omega \varphi_{ij}^{(1)} h_0;$$

$$X_{ij}^{(2)} = \varphi_{ij}^{(2)} - \omega D_1 \varphi_{ij}^{(2)} + \omega \varphi_{ij}^{(2)} h_0;$$

$$\bar{\Phi}_0 = -\omega \bar{\psi}_1.$$

Функция ω для случая областей сложной формы может быть построена с помощью R-функций так, что будут удовлетворяться условия

$$\omega\big|_\Gamma = 0, \quad \omega(x,y) > 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial \omega}{\partial w}\right|_\Gamma = -1.$$

Функции $\varphi_{ij}^{(k)}$ $(k = 1,2)$ представляют собой полную систему (полиномы Чебышева, Лежандра и т.д.).

Коэффициенты-изображения $\bar{C}_{ij}^{(k)}(\rho)$ $(k = 1,2),$ при которых выражения (23), (24) дают наилучшие приближения по методу Бубнова – Галеркина, определяются из условия ортогональности невязок

$$\varepsilon_n^{(k)}[\bar{C}_{ij}^{(k)}(\rho); x, y] = \Delta \bar{v}_k - a_0 \rho \bar{v}_k + \bar{F}_k \neq 0$$

к координатным функциям $X_{ij}^{(k)}(x,y)$ $(k = 1,2)$;

$$\int_\Omega \varepsilon_n^{(k)} X_{ls}^{(k)}(x,y) d\Omega = 0 \quad (l + s = 0,1,\ldots,n),$$

что приводит к решению систем Бубнова – Галеркина

$$\sum_{i+j=0}^{n} \left(A_{ijls}^{(k)} + \rho B_{ijls}^{(k)} \right) \bar{C}_{ij}^{(k)}(\rho) = \bar{D}_{ls}^{(k)}(\rho) \tag{25}$$

(l+s=0,1,…,n; k=1,2).

Для задач (19) – (20), (21) – (22)

$$A_{ijls}^{(k)} = \int_\Omega \Delta X_{ij}^{(k)} X_{ls}^{(k)} d\Omega,$$

$$B_{ijls}^{(k)} = -\int_\Omega a_0 X_{ij}^{(k)} X_{ls}^{(k)} d\Omega,$$

$$\bar{D}_{ls}^{(k)}(\rho) = \int_\Omega \bar{F}_k X_{ls}^{(k)} d\Omega,$$

где для задачи (19) –(20)

$$\bar{F}_1 = -v_0 a_0 - \bar{F}_0,$$

а для задачи (21) – (22)

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}(v_1) - (\Delta \bar{\Phi}_0 - a_0 \rho \bar{\Phi}_0).$$

Решение систем (25) имеет вид

$$\bar{C}_{ij}^{(k)}(\rho) = \frac{\sum_{l+s=0}^{n} \bar{D}_{ls}^{(k)}(\rho) \Delta_{lsij}^{(k)}(\rho)}{\Delta^{(k)}(\rho)} \quad (l + s = 0,1,\ldots,n),$$

где

$$\Delta^{(k)}(\rho)=\begin{vmatrix} A_{0000}^{(k)}+\rho B_{0000}^{(k)} & \dots & A_{0n00}^{(k)}+\rho B_{0n00}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{000n}^{(k)}+\rho B_{000n}^{(k)} & \dots & A_{0n0n}^{(k)}+\rho B_{0n0n}^{(k)} \end{vmatrix};$$

$\Delta_{lsij}^{(k)}(\rho)$ - соответствующие алгебраические дополнения.

Коэффициенты-оригиналы $C_{ij}^{(k)}(t)$ согласно [5] находятся по формуле

$$C_{ij}^{(k)}(t)=\sum_{l+s=0}^{n}\int_{0}^{t}D_{ls}^{(k)}(\tau)\left\{\sum_{m=1}^{n}\frac{\Delta_{lsij}^{(k)}(\rho_m^{(k)})}{\Delta^{(k)'}(\rho_m^{(k)})}\exp[\rho^{(k)}{}_m(t-\tau)]\right\}d\tau,$$

где $\rho_m^{(k)}$ - корни уравнений $\Delta^{(k)}(\rho)=0 \quad (k=1,2)$.

После обратного преобразования Лапласа решения для задач (12) – (14) и (15) – (17) принимают вид

$$v_1=\sum_{i+j=0}^{n}C_{ij}^{(1)}(t)X_{ij}^{(1)}(x,y), \tag{26}$$

$$v_2=\Phi_0(x,y,t)+\sum_{i+j=0}^{n}C_{ij}^{(2)}(t)X_{ij}^{(2)}(x,y). \tag{27}$$

В приведенных выше формулах при *k=1* рассматривается задача (19) –(20), а при *k=2* - задача (21) – (22).

Решение краевой задачи (3) – (5) в окончательной форме получаем в виде

$$u=u_c+v_1+\varepsilon_1 v_2.$$

Рассматриваются нелинейные задачи теплопроводности для тел сложного сечения с разнородными сквозными включениями для случая, когда на поверхности тела задано условие

$$\left.\left(\lambda_0\frac{\partial T_0}{\partial v_0}+\alpha T_0\right)\right|_{\delta_0}=\alpha T_{cp}, \tag{28}$$

а на поверхностях контакта разнородных сред заданы условия неидеального теплового контакта

$$\left.\lambda_0\frac{\partial T_0}{\partial v_k}\right|_{\delta_k}=\left.\frac{1}{R_k}(T_k-T_0)\right|_{\delta_k};\quad \left.\lambda_0\frac{\partial T_0}{\partial v_k}\right|_{\delta_k}=\left.\lambda_k\frac{\partial T_k}{\partial v_k}\right|_{\delta_k}, \tag{29}$$

где $R_k(k=1,\dots,n)$ тепловое сопротивление $k-$го контакта, $\lambda_k=\lambda_{0k}(1+\delta_k T_k)$; δ_k - малые параметры.

Для задачи в качестве малого параметра выбирается δ_1 и решение для каждого региона $(x,y)\in\Omega_k$ представляется в виде

$$T_k=T_{0k}+\delta_1 T_{1k} \tag{30}$$

Для функций T_{0k} получим задачу нулевого приближения, учитывающую постоянные составляющие теплофизических характеристик.

Граничные условия и условия «сопряжения» для задачи первого приближения, учитывающие изменение коэффициентов теплопроводности λ_k, имеют вид

$$\left.\left(\lambda_{00}\frac{\partial T_{10}}{\partial \nu_0}+\alpha T_{10}\right)\right|_{\delta_0}=\alpha T_{00}\left(T_{00}-T_{cp}\right)\Big|_{\delta_0}=f_1, \tag{31}$$

$$\left.\left(\lambda_{00}\frac{\partial T_{10}}{\partial \nu_k}+\lambda_{00}\psi_1\right)\right|_{\delta_k}=\frac{1}{R_1}\left(T_{1k}-T_{10}\right)\Big|_{\delta_л}=\left.\left(\lambda_{0л}\frac{\partial T_{1k}}{\partial \nu_k}+\lambda_{0k}\psi_k\right)\right|_{\delta_k}, \tag{32}$$

$$\psi_1=T_{00}\left.\frac{\partial T_{00}}{\partial \nu_k}\right|_{\delta_k}=\frac{1}{\lambda_{00}R_k}T_{00}\left(T_{0k}-T_{00}\right)\Big|_{\delta_k},$$

$$\psi_k=\frac{\delta_k}{\delta_1}T_{0k}\left.\frac{\partial T_{0k}}{\partial \nu_k}\right|_{\delta_k}=\frac{\delta_k}{\delta_1}\frac{1}{\lambda_{0k}R_k}T_{0k}\left(T_{0k}-T_{00}\right)\Big|_{\delta_k}$$

Структуру решения $U=U_0(x,y,F_0)$ соответствующей задачи теплопроводности при

$\lambda_{00}=\lambda_{01}=\ldots=\lambda_{0n};\quad \delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=0;\quad R_k=0\,(k=1,\ldots,n)$ построим по рекомендациям работы [1,2].

Применяя метод прямых, получим для каждого момента времени соответствующие задачи теплопроводности. Региональные структуры решения для данных задач, точно удовлетворяющие условиям (32), построим в виде

$$T_{10}=U_0+\prod_{i=1}^{\infty}\omega_i^2\phi_0,\quad \omega_k>0\quad (x,y)\in\Omega_k,\quad \left.\frac{\partial\omega_k}{\partial\nu_k}\right|_{\delta_k}=1, \tag{33}$$

$$T_{1k}=U_0-\frac{2\gamma_k}{1+\gamma_k}\omega_k\eta_k+R_k\lambda_0\left[\eta_k-\omega_k D_1^{(k)}\eta_k\right]-\omega_k\psi_k+\omega_k^2\phi_k+\omega_k\frac{\lambda_{00}}{\lambda_{0k}}\psi_1,$$

где $\eta_k=D_1^{(k)}U_0+\psi_k;\quad \gamma_k=\dfrac{\lambda_{0k}-\lambda_{00}}{\lambda_{0k}+\lambda_{00}};\quad D_1^{(k)}=\dfrac{\partial U_0}{\partial x}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x}+\dfrac{\partial U_0}{\partial y}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial y}.$

Функции ϕ_k - полные системы функций для регионов Ω_k в наиболее естественной криволинейной ортогональной системе координат. Для отыскания неопределенных коэффициентов структур решения применяется один из вариационных методов или метод конечных разностей совместно с точечным методом наименьших квадратов.

Рассматриваются некоторые новые подходы к решению нестационарных задач теплоизлучающих тел сложного сечения

$$\frac{\partial T}{\partial Fo}=\Delta T+F,\quad \left.\left[\frac{\partial T}{\partial \nu}+Sk\left(T^4-T_{cp}^4\right)\right]\right|_S=0,\quad T(x,y,0)=\psi(x,y), \tag{34}$$

где S – гладкая поверхность рассматриваемого тела.

При $\tau=\exp(-\beta Fo),\left.\dfrac{\partial T}{\partial Fo}\right|_{Fo=Fo_1}<<1$, получим

$$-\beta\tau\frac{\partial T}{\partial\tau}=\Delta T+F, \qquad (35)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial\nu}+Sk(T^4-T_{cp}^4)\right]\Bigg|_S=0, \qquad (36)$$

$$T\big|_{\tau=\tau_1}=T_0^o;\quad T\big|_{\tau=1}=\psi(x,y), \qquad (37)$$

где функция T_0^o определяется как решение стационарной задачи, $\tau_1=\exp(-\beta Fo)$, β - первое собственное число соответствующей линейной нестационарной задачи при $T^4=T_{\max}^3 T, T_{\max}$ - максимальное значение температуры в теле или на его поверхности.

Для решения данной задачи применяется один из итерационных методов, совместно с регионально-структурным методом и методом Петрова или методом Канторовича.

В первом случае строится структура решения [1,2], точно удовлетворяющая условиям (37) и линеаризованному условию (36) на каждой итерации. Во втором случае при применении метода Канторовича строится структура решения, точно удовлетворяющая условиям (37).

В качестве тестовой задачи, рассматривалась задача для симметричной неограниченной пластины $x\in[-1,1]$ при $T_{cp}=0;\quad \psi(x)=1;\quad Sk=10.$

Решение задачи в первом приближении представим в виде

$$T_1(x,\tau)=(\tau-\tau_1)(1-\tau_1)^{-1}+(\tau-\tau_1)(1-\tau)C_1(x).$$

Применяя метод Канторовича, получим $C_1(x)=-\beta x^2+a_0$.

Из решения трансцендентного уравнения получим $\beta_1\approx 1{,}43$.

Коэффициент a_0 определяется из условия

$$\int_{\tau_1}^{1}\left(\frac{\partial T}{\partial x}+SkT^4\right)\Bigg|_{x=1}\eta_1 d\tau=0,$$

где $\eta_1=1-\tau$. При этом получим $a_0\approx 2{,}56$. Тогда при $\tau_1=\exp(-7{,}15)$

$$T(x,Fo)\approx\exp(-1{,}43Fo)\left\{1+[1-\exp(-1{,}43Fo)][2{,}56-1{,}43x^2]\right\} \qquad (38)$$

Функция (38) точно удовлетворяет начальному условию задачи.

Результаты для температуры поверхности излучающей неограниченной пластины, полученные по формуле (38), хорошо согласуются с данными, полученными методом конечных разностей.

Применение регионально-аналитического метода для решения нелинейных задач теплопроводности позволяет строить региональные аналитические структуры решения, точно удовлетворяющие нелинейным региональным граничным условиям и нелинейным условиям теплового контакта при любых заданных зависимостях коэффициентов теплопроводности разнородных сред от температуры.

Проведение вычислительного эксперимента для различных значений геометрических или теплофизических параметров исследуемой задачи дает возможность построить интерполяционные формулы, выражающие функциональную зависимость неопределенных компонент региональных структур решения задачи от этих параметров.

В предложенные конструкции решений задач теплопроводности в явном виде входят коэффициенты теплоотдачи, теплопроводности для различных сред, термические контактные сопротивления и другие физические, а также геометрические параметры задач. Это сделало возможным параметрический анализ тепловых полей для сложных областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слесаренко А.П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях // Проблемы машиностроения. – 2002. – Т.5. - №4, С.72-80.
2. Слесаренко А.П. Регионально-аналитические базисные функции влияния граничных воздействий в решении задач теплопроводности для однородных и неоднородных сред. // Тез. докладов и сообщений. V Минский междунар. форум по тепло- и массообмену (Беларусь, Минск, май 2004), - Минск: ИТМО АН Беларуси. -2004. – Т.1., С.281-282..
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Госэнергоиздат, М., 1957.
4. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. «Наука»,М.,1964.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. «Высшая школа»,М.,1966.
6. Айзен А.М., Заславская И.Г., Ямпольский Н.Г. Решение нелинейной задачи теплопроводности для прямоугольного параллелепипеда конечных размеров.- В кн.: Теплофизика и теплотехника, 20. «Наукова думка», К., 1971.
7. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. «Наука», М., 1973.