

Компьютерное моделирование дифракции
электромагнитных волн на решетке из идеально проводящих
брусьев прямоугольного поперечного сечения
(случай E-поляризации)

Г. Н. Жолткевич, В. В. Хорошун, В. Б. Хохольков

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

This paper is devoted the computer modeling of diffraction of electromagnetic waves on a gratin consist of the ideally conducting squared beams of rectangular cross-sectional for the case of E-polarization of falling wave.

1. Введение

Дифракционные решетки (ДР) из элементов различного профиля поперечного сечения находят широкое применение в различных областях науки и техники. Это стимулирует развитие теории таких периодических структур. Наряду с хорошо известными монографиями [1-3] назовем менее известные у нас работы по дифракции электромагнитных волн на решетках [4-6]. Все они содержат обширную библиографию, в которой традиционно принято считать ключевой структурой ленточную решетку. В оптике [7-9] при рассмотрении дифракции света на одной или нескольких щелях в бесконечно тонком экране полностью игнорируется периодичность решетки, а, следовательно, и ряд Фурье, с помощью которого легко получить основное уравнение ДР:

$$\sin \alpha_n = \sin \zeta + n \frac{\lambda}{l}, \quad (n \in N), \quad (1.1)$$

где α_n - углы дифракции, ζ - угол падения волны на решетку, n - номер гармоники (порядок спектра), λ - длина волны, l - период решетки.

Основное уравнение ДР (1.1) определяет направления дифрагированных лучей в n -ых порядках дифракции. Оно имеет универсальный характер и не зависит как от профиля и материала элементов ДР, так и от структуры ее периода.

Оптимизация спектральных характеристик ДР (в том числе и ленточных) по коэффициенту заполнения $\theta = d/l$ (d - ширина щели) требует учета толщины лент ДР, т.е. рассмотрения более сложной решетки из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения. Именно эта структура является ключевой (базовой), поскольку из нее, как частные случаи, следуют ДР из горизонтальных и вертикальных лент, решетки из полубесконечных пластин и полуплоскостей, а также решетки из бесконечно тонких нитей (проволок), как итог одновременного устремления к нулю ширины и высоты брусьев ДР. Поэтому компьютерное моделирование дифракции волн на такой решетке представляет несомненный интерес.

2. Постановка задачи

На рис.1 изображена периодическая ДР из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения. Решетка находится в свободном пространстве. Со стороны $y > 0$ на решетку под углом ζ падает плоская Е-поляризованная волна. Требуется определить дифрагированное поле во всем пространстве, исключая элементы (брусья) решетки.

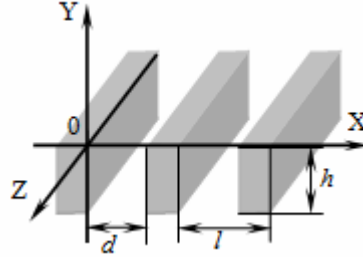


Рис. 1 Геометрия структуры

Представим падающее поле в виде

$$E_z^{na0} = e^{ik_0(x \sin \zeta - y \cos \zeta)},$$

$$H_x^{na0} = -\cos \zeta \cdot E_z^{na0}, \quad H_y^{na0} = -\sin \zeta \cdot E_z^{na0}.$$

Отраженное поле

$$E_z^I = \sum_n a_n e^{i\gamma_n y} e^{ih_n x} = \sum_n a_n \psi_n^I, \quad (n \in N),$$

$$H_x^I = \frac{1}{k_0} \sum_n a_n \gamma_n \psi_n^I, \quad H_z^I = -\frac{1}{k_0} \sum_n n a_n \psi_n^I, \quad (y > 0)$$

где $\gamma_n = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\kappa^2 - n^2}$, $\psi_n^I = e^{i\gamma_n y} e^{ih_n x}$, $h_n = (2\pi/l)(n + \nu)$, $\nu = \kappa \sin(\zeta)$,
 $\kappa = l/\lambda$, $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Прошедшее поле

$$E_z^{II} = \sum_n b_n e^{-i\gamma_n(y+h)} e^{inx} = \sum_n b_n \psi_n^{II}, \quad H_z^{II} = -\frac{1}{k_0} \sum_n b_n \gamma_n \psi_n^{II},$$

$$H_y^{II} = -\frac{1}{k_0} \sum_n n b_n \psi_n^{II},$$

где $\psi_n^{II} = e^{-i\gamma_n(y+h)} e^{inx}$, h - высота брусьев ($y < -h$)

Поле в центральной щели

$$E_z^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{-iq_m y} + d_m e^{iq_m y}) \sin \frac{\pi m}{d} x,$$

$$H_x^0 = -\frac{1}{k_0} \sum_{m=1}^{\infty} q_m (c_m e^{-iq_m y} - d_m e^{iq_m y}) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (-h < y < 0)$$

$$H_y^0 = -\frac{1}{ik_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2\theta} (c_m e^{-iq_m y} + d_m e^{iq_m y}) \cos \frac{\pi m}{d} x, \quad \text{где } q_m = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2}.$$

3. Математическая модель

Строгие граничные условия требуют обращения в нуль тангенциальных компонент электрического поля на брусках решетки и непрерывности поля на ее щелях (волноводные участки в виде отрезков плоских волноводов).

Используя граничные условия, получаем две подсистемы сумматорных уравнений, которые являются математической моделью рассматриваемой задачи

$$\sum_n a_n' e^{ih_n x} = 0, \quad (d < x < l) \quad (3.1)$$

$$\sum_n a_n' e^{ih_n y} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d) \quad (3.2)$$

$$\sum_n a_n' \gamma_n e^{ih_n x} - \gamma_0 = -\sum_{m=1}^{\infty} q_m (c_m - d_m) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d) \quad (3.3)$$

$$\sum_n n a_n' e^{ih_n x} = -i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2\theta} (c_m + d_m) \cos \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d) \quad (3.4)$$

$$\sum_n b_n e^{ih_n x} = 0, \quad (d < x < l) \quad (3.5)$$

$$\sum_n b_n e^{ih_n x} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{iq_m h} + d_m e^{-iq_m h}) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d) \quad (3.6)$$

$$\sum_n b_n \gamma_n e^{ih_n x} = -\sum_{m=1}^{\infty} q_m (c_m e^{iq_m h} - d_m e^{-iq_m h}) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d) \quad (3.7)$$

$$\sum_n n b_n e^{ih_n x} = -i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2\theta} (c_m e^{iq_m h} + d_m e^{-iq_m h}) \cos \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d) \quad (3.8)$$

4. Алгебраизация системы сумматорных уравнений. Прямые и обратные формулы связи

Переходим к алгебраизации уравнений (3.1)-(3.2) в первой и (3.5)-(3.6) во второй подсистемах сумматорных уравнений. Для этого, умножим их на $e^{-ih_s x}$ слева и справа и проинтегрируем в пределах от нуля до l слева и от нуля до d справа. Вычислив интегралы, получаем прямые формулы связи (ПФС)

$$\text{ПФС-1} \quad a'_n = \frac{\theta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) K_m(\tau_n); \quad (4.1)$$

$$\text{ПФС-1}' \quad b_n = \frac{\theta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{iq_m h} + d_m e^{-iq_m h}) K_m(\tau_n), \quad (4.2)$$

$$\text{где } a'_n = a_n + \delta_{0n}, \quad K_m(\tau_n) = \frac{2}{\pi} m \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\tau_n} - (-1)^m e^{-i\frac{\pi}{2}\tau_n}}{m^2 - \tau_n^2}, \quad \tau_n = 2\theta(n + \nu),$$

$\theta = \frac{d}{l}$, δ_{0n} - символ Кронекера.

Аналогичным образом получим две первые обратные формулы связи (ОФС). Умножим на $\sin(\pi s x / d)$ слева и справа уравнения (3.2) и (3.6) в подсистемах и проинтегрируем от 0 до d. Вычислив интегралы, получим две первые обратные формулы связи (ОФС-1 и ОФС-1')

$$\text{ОФС-1} \quad c_s + d_s = \frac{2s}{\pi} \sum_n a'_n K_m(-\tau_n); \quad (4.3)$$

$$\text{ОФС-1}' \quad c_s e^{iq_s h} + d_s e^{-iq_s h} = \frac{2s}{\pi} \sum_n b_n K_m(-\tau_n); \quad (4.4)$$

Аналогичным образом из уравнений (3.3)-(3.4) и (3.7)-(3.8) получим по две обратные формулы связи

$$\text{ОФС-2} \quad q_m (c_m - d_m) = \sum_n a'_n \gamma_n K_m(-\tau_n); \quad (4.5)$$

$$\text{ОФС-2}' \quad q_m (c_m e^{iq_m h} - d_m e^{-iq_m h}) = \sum_n b_n \gamma_n K_m(-\tau_n); \quad (4.6)$$

$$\text{ОФС-3} \quad m(c_m + d_m) = \frac{2}{\theta} \sum_n a'_n \tau_n^2 K_m(-\tau_n); \quad (4.7)$$

$$\text{ОФС-3}' \quad m(c_m e^{iq_m h} + d_m e^{-iq_m h}) = \sum_n b_n \tau_n^2 K_m(-\tau_n); \quad (4.8)$$

Исключая из (4.3) a'_n посредством (4.1), получим

$$\sum_n K_m(\tau_n) K_s(-\tau_n) = \begin{cases} 0, & m \neq s; \\ 2/\theta, & m = s, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.9)$$

Это же значение суммы следует из (4.4) при исключении b_n посредством (4.2).

Формула (4.9) означает, что функция $K_m(\tau_n)$ является функцией дискретного аргумента [10]. В чистом виде это реализуется для простейшей одномерной периодической структуры в виде решетки из бесконечно тонких идеально проводящих нитей для случая ортогонального падения плоской волны на решетку. Для более сложных структур (решетки из горизонтальных и вертикальных лент, брусьев прямоугольного поперечного сечения) следует фиксировать как параметры решетки (коэффициент заполнения θ , высоты брусьев h), так и параметры первичного поля (длину волны λ и угол падения ζ). В этом случае указанная функция $K_m(\tau_n)$ является функцией дискретного аргумента.

5. Автоматизация процесса алгебраизации системы сумматорных уравнений

Весь процесс (алгоритм) получения и решения СЛАУ автоматизирован и реализован в системе Maple 10. Входными данными для реализованного в Maple 10 алгоритма является исходная математическая модель. Результатом символьных преобразований алгоритма являются прямые и обратные формулы связи, из которых формируется неоднородная СЛАУ. Полученная средствами Maple 10 система трансформируется в процедуры расчета матричных элементов, записанных на языке программирования C++. Полученные процедуры компилируются в динамически подгружаемую библиотеку (DLL), которая загружается и используется разработанным ранее авторами математическим пакетом ЭХО-4. Система считается оптимизированным по быстродействию методом Гаусса с выбором ведущего элемента. Модификация состоит в том, что полученные в результате символьных преобразований уравнения подсистемы (4.1) и (4.2) имеют ярко выраженную треугольную форму, в силу чего значительно уменьшается время формирования треугольной матрицы (прямой ход).

6. Анализ численных результатов

Ниже представлены результаты численных расчетов, полученных модифицированным методом Фурье (ММФ) для ленточной решетки. Этот случай представляет наибольший интерес, поскольку задачи дифракции на ленточной решетке и решетке из брусьев прямоугольного поперечного сечения ранее решались различными методами, а именно, в первом случае использовался метод АМШ [11], а во втором – различные модификации метода частичных областей, в том числе метод переразложений [1].

6.1. Дифракционная решетка из бесконечно тонких идеально проводящих лент ($h = 0$, $\theta \neq 1$)

Математическая модель для задачи дифракции плоской E- поляризованной волны на ленточной решетке как частный случай исходной математической модели имеет вид:

$$\sum_n a_n' e^{ih_n x} = 0, \quad (d < x < l);$$

$$\sum_n a_n' e^{ih_n x} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d);$$

$$\sum_n a_n' \gamma_n e^{ih_n x} - 2\gamma_0 e^{ih_0 x} = -\sum_{m=1}^{\infty} q_m (c_m - d_m) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < d)$$

6.1.1. Случай ортогонального падения

Результаты расчетов по ММФ сравнивались с результатами, полученными по методу АМШ. Достигнута графическая точность. Это относится ко всем графикам, приведенным в работе [12]. Ниже, на рис. 2-5 представлен новый графический материал, полученный с помощью ММФ и совпадающий с графической точностью с результатами по методу АМШ.

На рис. 2. показана зависимость коэффициента отражения основной волны $|a_0|$ от частотного параметра κ для оптимальных значений коэффициента заполнения $\theta=1/2, 3/4, 5/6$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). На рис. 3 показана такая же зависимость для высших гармоник ($n=1, 2, 3$ соответственно).

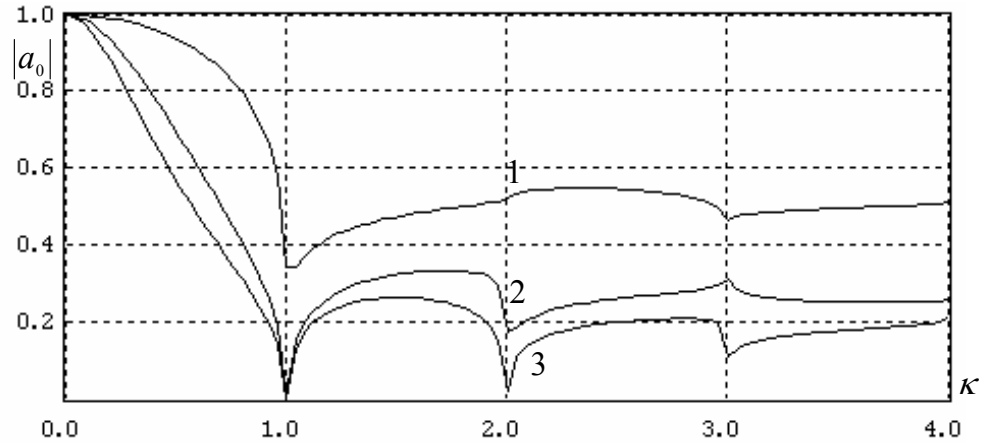


Рис. 2. Зависимость $|a_0|$ от l/λ для оптимальных значений $\theta = (2k - 1) / 2k, k = 1, 3$

Резкие изломы кривых на рис. 2-3 (аномалии Вуда) связаны с возникновением новых распространяющихся гармоник. Условия их возникновения следуют из формулы для так называемых точек «скольжения» гармоник $\kappa = |n|$, где $n \in N \setminus 0$. Для расчетов выбраны оптимальные значения коэффициента заполнения решетки $\theta = \frac{m}{2|n|}$, где $m=1, 2, \dots, m_k$. ($n \in N \setminus 0$).

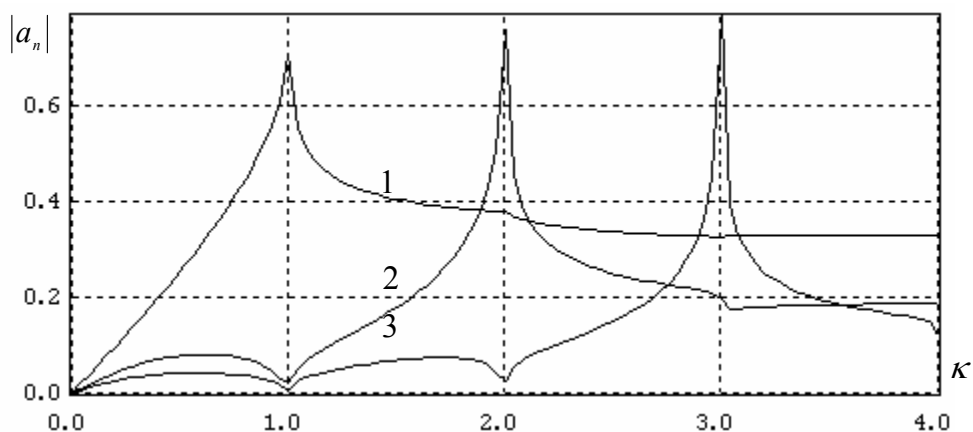


Рис.3. Зависимость $|a_n|$ от l/λ для оптимальных значений $\theta = (2n - 1) / 2n, n = \overline{1,3}$

На рис.4 представлены графики зависимости коэффициентов отражения $|a_n|$ от параметра $\tau = 2d/\lambda$ для $n = 1, 2, 3$ и значений параметра $\kappa = 1, 2, 3$ соответственно нумерации кривых. Легко видеть, что экстремальным значениям $|a_n|$ соответствуют случаи, когда ширина щели содержит целое число полуволн, причем если ширина щели равна четному числу $\lambda/2$, то наблюдается минимум $|a_n|$, в противном случае – максимум $|a_n|$. Это отчетливо представлено на рис. 4.

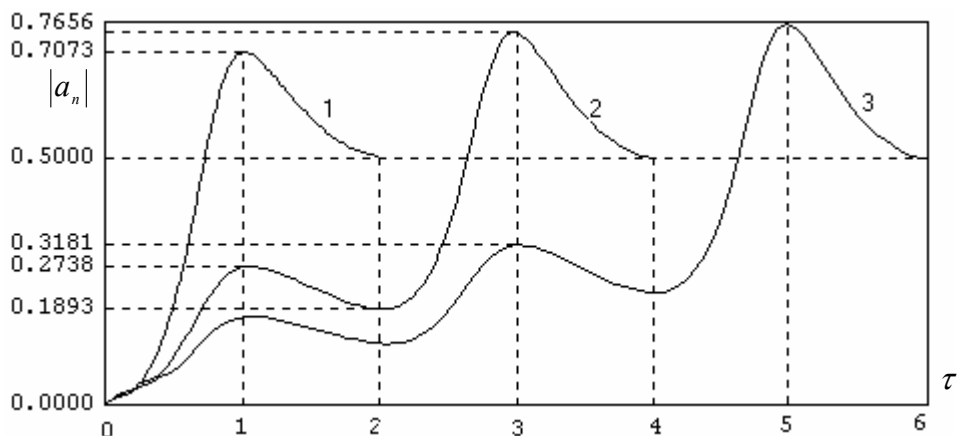


Рис.4 Зависимость $|a_n|$ от параметра $\tau = 2d/\lambda$

На рис. 5. показана зависимость коэффициента отражения основной волны $|a_0|$ от коэффициента заполнения θ для значений $\kappa = 1, 2, 3$.

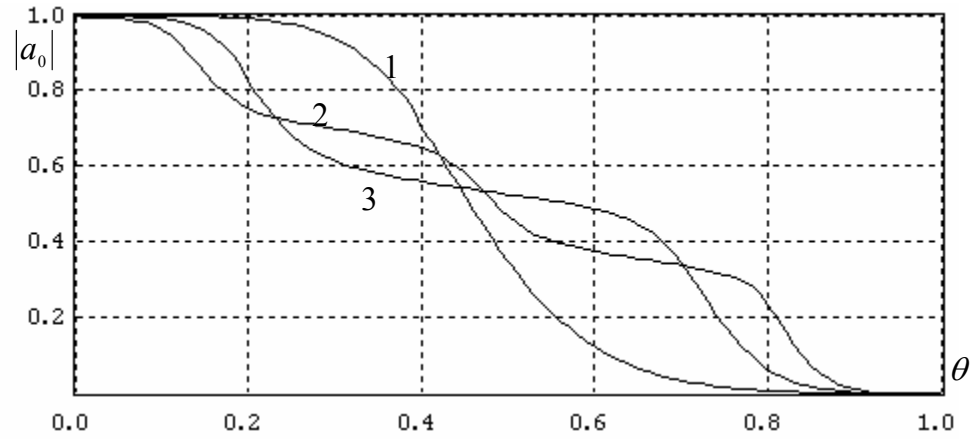


Рис.5. Зависимость $|a_0|$ от d/l для значений $l/\lambda = \overline{1,3}$

6.1.2. Случай наклонного падения

На рис.6-7 представлены зависимости $|b_n|$ от κ для коэффициента заполнения $\theta = 0.75$ и значений $n = 0$ (кривая 1) и $n = +1, -3$ (кривые 2 и 3 соответственно).

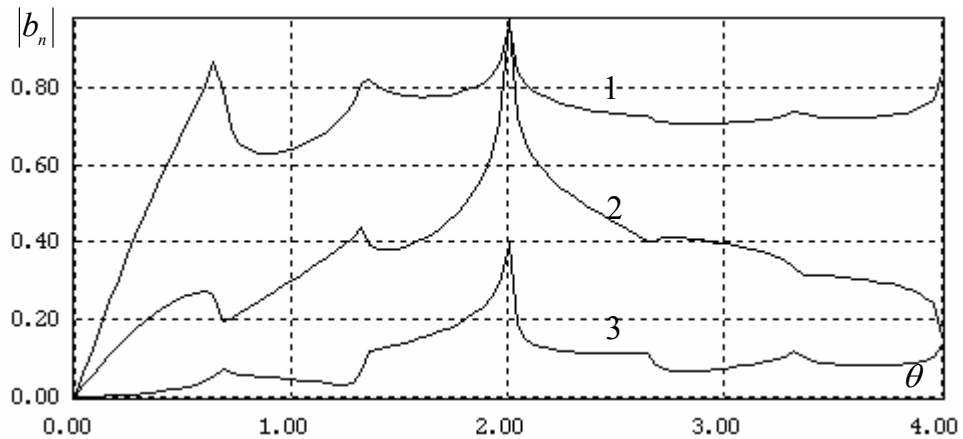


Рис.6. Зависимость $|b_n|$ от l/λ для значения $\theta = 0.75$

Аналогично тому, как при анализе формул Френеля заслуживает внимания равенство импедансов граничащих сред, так и при оптимизации спектров ленточной решетки по коэффициенту заполнения d/l следует воспользоваться условием фазового синхронизма, формально продлив его на случай нулевой толщины лент, то есть тогда, когда волноводных областей в щелях решетки нет. В результате имеем оптимальные значения коэффициента заполнения решетки [13]

$$\theta = \frac{m}{2|n - \text{sign}(n)\sin(\zeta)|}, \quad m = \overline{1, m_k}$$

Точки скольжения высших гармоник в случае наклонного падения определяются по формуле

$$\kappa = \frac{|n|}{1 - \text{sign}(n) \sin(\zeta)}, \quad n \in N \setminus 0.$$

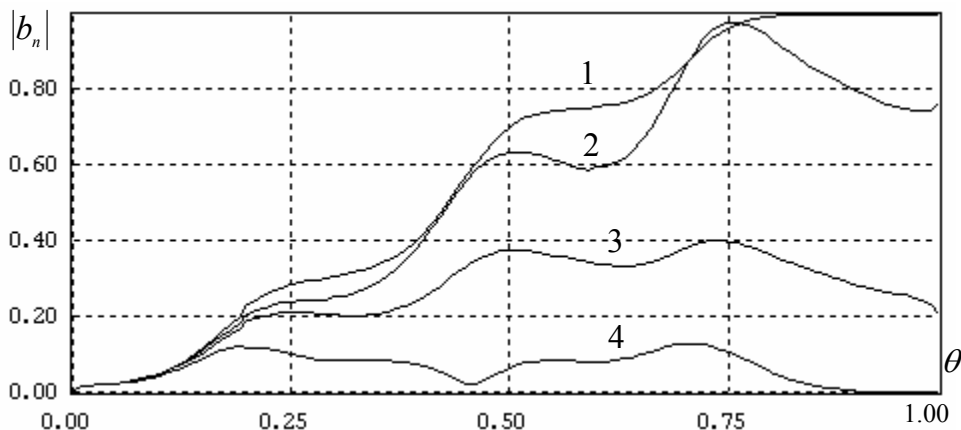


Рис.7. Зависимость $|b_n|$ от d/l для значений $l/\lambda = 2$, $\zeta = \pi/6$, $n=0, +1, -3, +3$

7. Дифракционная решетка из бесконечно тонких идеально проводящих нитей (линейная ДР) ($h=0$, $\theta=1$)

Математическая модель для задачи дифракции плоской Е-поляризованной волны на линейной решетке имеет вид

$$\sum_n a'_n = 0;$$

$$\sum_n a'_n = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < l);$$

$$\sum_n a'_n \gamma_n - 2\gamma_0 = -\sum_{m=1}^{\infty} q_m (c_m - d_m) \sin \frac{\pi m}{d} x, \quad (0 < x < l)$$

Спектральные свойства линейной решетки до настоящего времени еще не изучены до конца, хотя ее значение для теории дифракции электромагнитных волн на периодических структурах очень велико [14,15]. Как отмечалось в работе [14], для решения этой задачи дифракции необходимо использовать аппарат теории обобщенных функций. Для наглядности мы приводим результаты расчетов по методу ММФ (табл.1) и АМШ (табл.2). Из этих таблиц следует, что в случае нормального падения Е-поляризованной волны на линейную решетку кроме основной и высших гармоник, находящихся в режиме скольжения, в спектре присутствуют и другие высшие гармоники, что не имеет места на самом деле.

Таблица 1

κ	$ a_0 $	$ b_0 $	$ b_1 $	$ b_2 $	$ b_3 $
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.20	0.4917	0.8708	0.1007	0.0500	0.0338
0.40	0.2670	0.9637	0.1169	0.0552	0.0370
0.60	0.1747	0.9846	0.1315	0.0556	0.0367
0.80	0.1205	0.9927	0.1611	0.0532	0.0343
1.00	0.0000	1.0000	0.5023	0.0000	0.0000
1.20	0.1021	0.9559	0.1852	0.0775	0.0458
1.40	0.0904	0.9720	0.1295	0.0897	0.0491
1.60	0.0775	0.9813	0.0996	0.1046	0.0503
1.80	0.0639	0.9880	0.0771	0.1336	0.0493
2.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.5247	0.0000
2.20	0.0614	0.9706	0.0692	0.1493	0.0682
2.40	0.0578	0.9783	0.0638	0.1059	0.0793
2.60	0.0524	0.9837	0.0569	0.0830	0.0936
2.80	0.0453	0.9885	0.0487	0.0656	0.1213
3.00	0.0001	1.0000	0.0001	0.0000	0.5048
3.20	0.0450	0.9768	0.0475	0.0584	0.1331

Таблица 2

κ	$ a_0 $	$ b_0 $	$ b_1 $	$ b_2 $	$ b_3 $
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.20	0.0670	0.9330	0.0735	0.0362	0.0240
0.40	0.0177	0.9823	0.0817	0.0382	0.0252
0.60	0.0075	0.9925	0.0920	0.0386	0.0250
0.80	0.0038	0.9962	0.1154	0.0378	0.0240
1.00	0.0000	1.0000	0.5000	0.0000	0.0000
1.20	0.0204	0.9796	0.1265	0.0525	0.0305
1.40	0.0124	0.9876	0.0865	0.0593	0.0319
1.60	0.0083	0.9917	0.0667	0.0694	0.0328
1.80	0.0056	0.9944	0.0528	0.0907	0.0330
2.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.5000	0.0000
2.20	0.0128	0.9872	0.0462	0.0987	0.0443
2.40	0.0091	0.9909	0.0417	0.0686	0.0506
2.60	0.0069	0.9931	0.0373	0.0539	0.0598
2.80	0.0051	0.9949	0.0327	0.0437	0.0794
3.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.5000
3.20	0.0098	0.9902	0.0314	0.0382	0.0858

На рис. 8 представлены амплитудный спектр и лучевая диаграмма для линейной решетки в случае ортогонального падения волны на ДР и значении $\kappa=1$. Спектр решетки содержит только основную волну и первые парные гармоники, амплитуды которых равны 0.5. На лучевой диаграмме хорошо

передан режим скольжения гармоник. Рис. 9 соответствует случаю наклонного падения ($\zeta=\pi/6$). В спектре присутствуют, кроме основной, +1-я и -3-я гармоники (режим двойного скольжения). На лучевой диаграмме пунктиром, в соответствии с основным уравнением ДР (1.1), показаны разрешенные направления распространения основной отраженной волны и -1-й и -2-й высших волн, причем -2-я гармоника находится в автоколлимационном режиме, т.е. обладая энергией, она бы распространялась в направлении, противоположном направлению падающей волны. Что касается -1-й как отраженной, так и прошедшей гармоник, то направления их распространения ортогональны плоскости решетки.

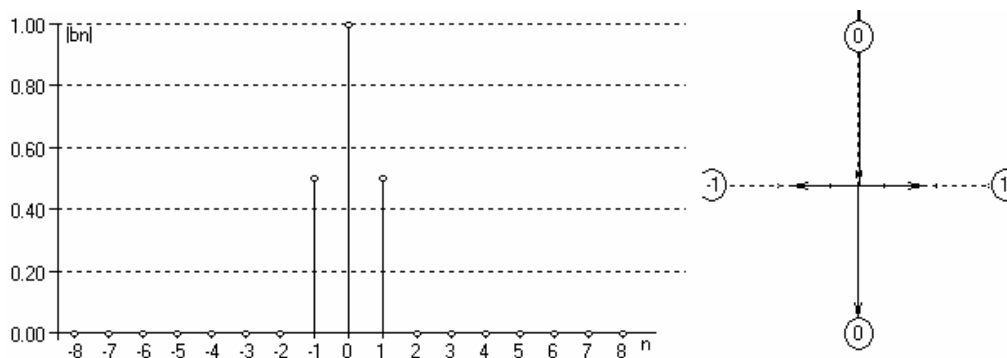


Рис. 8. Амплитудный спектр и лучевая диаграмма линейной ДР ($\zeta=0$, $\kappa=1$)

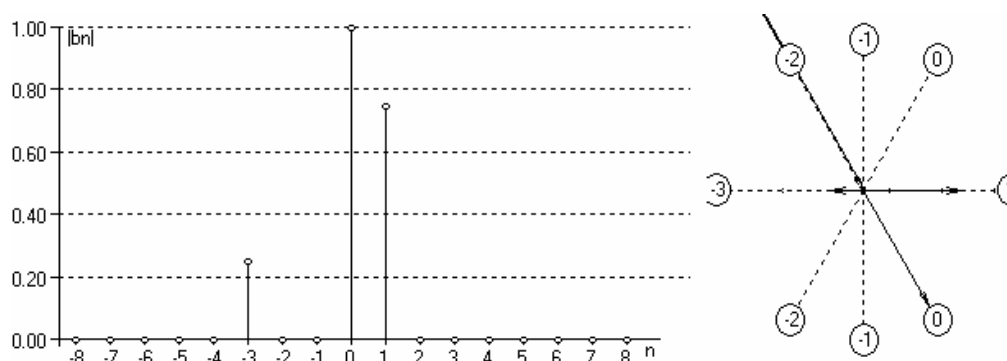


Рис. 9. Режим бискольжения для +1-й и -3-й гармоник ($\zeta=\pi/6$, $\kappa=2$)

Выводы

В работе проведено компьютерное моделирование дифракции электромагнитных волн на решетке из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения для случая Е-поляризации падающей волны. При этом основным тезисом исследования служит положение о том, что в строгой математической теории дифракции волн на планарных периодических структурах ключевой (базовой) моделью структуры является решетка из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения, а не ленточная решетка, как это утверждается до сих пор.

Дано решение проблемы предельного перехода от объемной решетки к решетке из идеально проводящих бесконечно тонких лент в задачах дифракции электромагнитных волн на периодических структурах.

Рассмотрена линейная решетка как предельный случай решетки из бесконечно тонких идеально проводящих лент.

Разработана программа для Maple 10 реализующая процесс получения СЛАУ из математической модели с последующим ее решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Шестопапов, Л.Н.Литвиненко, С.А.Масалов, В.Г.Сологуб. Дифракция волн на решетках. // Изд-во Харьк. ун-та, 1973.-287 с.
2. Electromagnetic theory of gratings / Ed. by R. Petit.– N.Y. : Springer.– 1980.– 284 p.
3. В.П.Шестопапов, А.А.Кириленко, С.А.Масалов, Ю.К.Сиренко. Резонансное рассеяние волн. Т.1. Дифракционные решетки // Киев, Изд-во «Наукова думка», 1986.-232 с.
4. Stroke G.W. Diffraction gratings.-In.:Handbuch der Physic. Berlin, Springer.- 1967.-Bd.29.-P.426-754.
5. Hutley N.S. Diffraction gratings.– N.Y. : Springer. 1982.– 320 p.
6. Wilcox C.N. Scattering theory for diffraction gratings.- N.Y. : Springer, 1984.- 315 p.
7. Борн Н., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1973. – 720с.
8. Г.С. Ландсберг. Оптика. М. 1957. – 759с.
9. Калитиевский Н.И. Волновая оптика. – М.: Высш. школа, 1978 – 384с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1971. – 200с.
11. З.С Агранович, В.А. Марченко, В.П. Шестопапов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ.-1962.- Т:32, №4.-С.381-394.
12. Г.Н.Жолткевич, В.В.Хорошун, В.Б.Хохольков. Компьютерное моделирование дифракции электромагнитных волн на ленточных решетках (случай произвольного падения) // Вісник Харк. ун-ту. Серія «Мат. моделювання. Інформ. технології. Автомат. системи управління». №703, 2005, С.127-134.
13. В.В.Хорошун Оптимизация спектральных характеристик решеток ленточного типа // Радиотехника.– 1990.– №2 .– С. 79–81.
14. В.В.Хорошун. Электродинамический анализ спектральных характеристик гармонической решетки. // Вісник Харк. ун-ту. Серія «Радіофізика та електроніка», вип.2, №570, 2002, С.291-294.
15. Wessel W. Hochfreq. u.Electroakust.- 1939, v.54, N2
16. В.С.Рогожин. Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций // Сиб. мат. журн., т.11, №5, 1961. – С.734-745.