

## Побудова та ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем

О. М. Назаренко

*Сумський державний університет, Україна*

An algorithm of design and identification of linear-quadratic models for weakly formalized dynamic systems has been presented. Method of phase trajectory decomposition has been developed for parameter estimation of differential equation. Trend and periodic components has been decomposed and refined in the iterative statistical procedure. System regulator has also been estimated in both linear and linear-quadratic forms. The algorithm has been approbated using real statistical dataset. The obtained results have been demonstrated great simulation properties of the designed models.

### 1. Вступ

Сучасний етап розвитку системного аналізу і математичного моделювання характеризується розширенням сфери їх застосування на слабо формалізовані динамічні системи, до яких зокрема відносять соціальні, економічні, екологічні системи, тощо. У більшості випадків класичні методи моделювання для таких систем не можуть бути застосовані безпосередньо, а отже, потребують певної адаптації [1, 2]. Математичні моделі слабо формалізованих динамічних систем можуть використовуватися для аналізу їх динаміки (імітації руху, прогнозування майбутніх станів) [3, 4] та оптимізації еволюції у майбутньому [5]. В залежності від мети моделювання може змінюватись як сама модель, так і методи її побудови. Дана робота присвячена побудові моделей динамічних систем, спрямованих перш за все на імітацію процесу. Однак за певних умов побудовані моделі також можуть бути застосовані у задачах оптимального керування.

Найпоширенішими формами моделей динамічних систем у математичному моделюванні є диференціальна або диференціально-алгебраїчна. Для більшості механічних або технічних систем функціональна форма, фазові координати та параметри цих рівнянь є заздалегідь відомими. До того ж можливість проведення експерименту над такими системами значно полегшує їх моделювання [6]. Слабо формалізовані системи, не маючи цих переваг, одночасно є більш гнучкими для дослідника. Так, наприклад, часто вдається уникнути нелінійності та великої кількості фазових координат у моделі [7].

Головною ж перепоною на етапі побудови моделей таких систем є оцінювання невідомих параметрів, або параметрична ідентифікація. Сучасні процедури параметричної ідентифікації можна розділити на декілька категорій [8, 9]. До першої відносяться різноманітні диференціальні схеми, головна ідея яких полягає у поданні першої похідної диференціального рівняння у вигляді кінцевих різниць або поліному та зведенні моделі до рівнянь класичної або динамічної регресій. Друга категорія об'єднує інтегральні схеми оцінювання, головною перевагою яких є можливість лінеаризувати вихідну модель і

залишитись в рамках добре вивчених лінійних процедур ідентифікації. Наступна категорія об'єднує широкий клас чисельних методів нелінійного оцінювання параметрів регресійних рівнянь, поданих у вигляді не самих диференціальних рівнянь, а їх розв'язків. Процедура оцінювання у такому випадку полягає в ітераційному повторенні двох етапів: чисельного інтегрування диференціального рівняння та чисельної мінімізації нелінійної функції помилок.

Дана робота спирається на методи колокації [8], що відносять до четвертої категорії процедур параметричної ідентифікації динамічних моделей. В основі методів колокації лежить декомпозиція траєкторії руху на базові функції. Остання задача також має самостійне значення, адже при вивченні рядів динаміки виникає потреба виділяти у статистичних даних випадкової величини не випадкові компоненти: тренд і періодуку [10].

## 2. Постановка задачі

Нехай динамічна система характеризується вектором-стовпцем фазових координат  $\mathbf{x}(\tau) = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$  з евклідового простору  $E^m$ . Його компоненти та розмірність  $m$  залежать від конкретної задачі та визначаються досвідом, інтуїцією дослідника або процедурою кореляційного аналізу [11]. Оскільки досліджувана динамічна система є слабо формалізованою, то в якості рівняння руху пропонується розглянути лінійне стаціонарне диференціальне рівняння першого порядку

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = A\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{v}(\tau), \quad \mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

де  $\mathbf{x}_0$  – відомий початковий стан;  $A$  – невідома матриця розмірності  $m \times m$ ;

$\mathbf{v}(\tau) = (v_1, v_2, \dots, v_m)'$  – вектор-стовпець керувань, які у загальному випадку також є невідомими.

Введемо у розгляд також скалярну величину  $G$ , рівняння якої

$$G = G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (2)$$

задає поверхню  $\sigma$ , вздовж якої рухається динамічна система. Різного роду функціонали  $G$  можуть використовуватися у задачах оптимального керування. Функціональна форма  $G$  також є невідомою. Проте, як показує практика [4], лінійно-квадратична апроксимація  $G$  є достатньою для моделювання багатьох слабо формалізованих систем. Рівняння (1), (2) необхідно ідентифікувати сумісно. Для цього при практичних дослідженнях застосовують метод оберненого зв'язку [6, 12]. Тому величину  $G$  часто називають регулятором динамічної системи.

Нехай існує  $m$ -вимірний часовий ряд  $\{\mathbf{x}_\tau, \tau = 0, 1, \dots, N\}$  спостережень кожної фазової координати та одновимірний часовий ряд  $\{G_\tau, \tau = 0, 1, \dots, N\}$  спостережень регулятора динамічної системи. Тоді задача полягає у знаходженні таких значень невідомих керувань  $\mathbf{v}(t)$  і параметрів моделі (1), (2), щоб при переведенні системи із заданого початкового стану  $\mathbf{x}_0$  в деяку кінцеву бажану точку  $\mathbf{x}_1$  модельні траєкторії фазових координат і регулятора системи апроксимували реальні траєкторії  $\{\mathbf{x}_\tau\}$ ,  $\{G_\tau\}$  з якомога більшою точністю.

### 3. Ідентифікація рівняння руху методом декомпозиції траєкторії на не випадкові складові

Період часу, на якому відбувається ідентифікація моделі називають базовим (навчальним), адже на ньому відбувається налагодження моделі на задану базу даних. На базовому періоді тестуються імітаційні властивості моделі і при необхідності відбувається її калібрування. Період, наступний за базовим, є періодом практичного впровадження моделі (прогнозування, оптимізації, тощо). Тому, ввівши для зручності нову змінну часу  $t = \tau - N$ , отримаємо базовий період  $[-N, 0]$ . Така заміна також зручна для подання початкової умови  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Оскільки точка  $t = 0$  є особливою точкою траєкторії, надалі пропонується розглядати базовий період на проміжку  $[-N, -1]$ .

За аналогією з відомими методами аналізу часових рядів [10], будемо припускати, що траєкторія руху динамічної системи подається адитивною комбінацією її складових:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{тр}}(t) + \mathbf{x}_{\text{п}}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (3)$$

де  $\mathbf{x}_{\text{тр}}(t)$  – трендова складова (експонента, піднесена до дійсного степеня),  $\mathbf{x}_{\text{п}}(t)$  – періодична складова (лінійна комбінація гармонік з деякими частотами),  $\mathbf{v}(t)$  – випадкова складова декомпозиції.

1. Для ідентифікації трендової складової  $\mathbf{x}_{\text{тр}}(t)$  розглянемо регресійну модель

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}_0 + e^{\Lambda t} \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (4)$$

у якій  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{d}_1$  – деякі сталі вектори;  $\Lambda$  – діагональна матриця з елементами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  на діагоналі;  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  – випадкове збурення. Оскільки член  $e^{\Lambda t}$  суттєвий для асимптотичної стійкості фазової траєкторії на періоді часу, наступному за базовим, пропонується накласти додаткову умову  $\Lambda < 0$ . Математично зрозуміло, що у випадку статистичних даних, які у середньому монотонно зростають та опуклі вгору, ця умова буде виконуватися автоматично. Якщо ж дані в середньому опуклі вниз, можна спробувати перейти до нових фазових координат. Так, у статистиці відомою практикою заміни опуклості вниз на опуклість вгору є логарифмування вихідної статистичної інформації [11, 13].

Регресійна модель (4) відноситься до класу нелінійних за параметрами і може бути оцінена відомими нелінійними алгоритмами. Проте умова  $\Lambda < 0$  значно ускладнює цю задачу. Тому для ідентифікації моделі (4) в роботі пропонується метод, який полягає в ітераційному застосуванні методу найменших квадратів (МНК) для кожної з  $m$  компонент моделі (4) перебором значень  $\Lambda < 0$ . Необхідно знайти такі елементи матриці  $\Lambda$ , при яких відповідні коефіцієнти детерміації  $R^2$  будуть максимальні. Для вибору оптимального  $\Lambda$  можна користуватися як методом звичайного перебору, так і більш ефективними методами чисельного пошуку максимуму (методом дихотомії, випадкового пошуку, тощо). Знайдене оптимальне  $\hat{\Lambda}$  буде точкою глобального максимуму, оскільки у даному випадку цільова функція є унімодальною.

2. Наступним етапом декомпозиції фазової траєкторії є виділення періодичної складової  $\mathbf{x}_{\text{п}}(t)$  в оцінках  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  випадкових збурень моделі (4). Подаючи

періодичну складову  $\mathbf{x}_n(t)$  у вигляді ряду Фур'є, обмеженого першими  $K$  членами розкладу, приходимо до регресійної моделі

$$\hat{\varepsilon}(t) = \sum_{k=1}^K (\mathbf{b}_k \cos w_k t + \mathbf{c}_k \sin w_k t) + \boldsymbol{\mu}(t) \quad , \quad (5)$$

де  $\mathbf{b}_k, \mathbf{c}_k$  – деякі сталі вектори;  $w_k$  – частота  $k$ -го члену ряду Фур'є;  $\boldsymbol{\mu}(t)$  – випадкове збурення.

Зазначимо, що оскільки регресійна модель (5) не має вільного члена, то у загальному випадку для неї не будуть виконуватись умови Гауса-Маркова для класичних регресій [11, 13]. Для того, щоб уникнути нелінійного оцінювання, знайдемо такі значення частот  $w_k$ , при яких модель (5) буде класичною регресійною. Відомо, що для регресій без вільного члена це можливо у випадку, коли середні всіх регресорів та регресанду будуть дорівнювати нулю [13]. Середнє регресанду  $\bar{\hat{\varepsilon}} \equiv 0$  за властивістю МНК-залишків регресійної моделі (4). Тоді необхідно знайти такі частоти  $\hat{w}_k$ , при яких середні регресорів  $\overline{\cos w_k t}$  і  $\overline{\sin w_k t}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) дорівнювали б нулю. Оскільки, як вже зазначалося, оцінювання проводиться на періоді  $[-N, -1]$ , то повинні виконуватись рівності

$$\overline{\cos \hat{w}_k t} = \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^{-1} \cos \hat{w}_k t = \frac{1}{N} \frac{\cos \frac{(N+1)\hat{w}_k}{2} \sin \frac{N\hat{w}_k}{2}}{\sin \frac{\hat{w}_k}{2}} = 0,$$

$$\overline{\sin \hat{w}_k t} = \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^{-1} \sin \hat{w}_k t = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{(N+1)\hat{w}_k}{2} \sin \frac{N\hat{w}_k}{2}}{\sin \frac{\hat{w}_k}{2}} = 0,$$

звідки знаходимо, що  $\sin \frac{N\hat{w}_k}{2} = 0$ , тобто

$$\hat{w}_k = \frac{2\pi}{N} k, \quad k=1, 2, \dots, K. \quad (6)$$

Отже, частоти (6) дозволяють оцінювати регресійну модель (5) за допомогою звичайного МНК.

**3.** Може виявитися, що трендова та періодична складові корелюють між собою. Це легко перевірити за допомогою статистичних тестів [11, 13]. У такому випадку необхідно провести переоцінювання трендової і періодичної складових, записавши їх разом у регресійній моделі типу (3)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}_0 + e^{\hat{\lambda} t} \mathbf{d}_1 + \sum_{k=1}^K (\mathbf{b}_k \cos \hat{w}_k t + \mathbf{c}_k \sin \hat{w}_k t) + \mathbf{v}(t) \quad . \quad (7)$$

Оскільки оцінювання регресії (7) можна провести в рамках звичайного МНК, видається можливим обчислити  $t$ -статистику Ст'юдента для кожного невідомого коефіцієнта. Це дає можливість провести рафінування моделі (7), послідовно відкидаючи незначущі коефіцієнти розкладу.

4. Після того, як отримано розклад (7), а всі його невідомі параметри оцінені на проміжку  $[-N, -1]$ , можна перейти до виконання граничної умови  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Це означає, що в моделі (7) після процедури її рафінування треба переоцінити ті коефіцієнти, що залишилися, з наступним обмеженням на параметри

$$\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1 + \sum_{k=1}^{\hat{K}} \mathbf{b}_k = \mathbf{x}_0. \quad (8)$$

Оскільки вираз (8) лінійний, то для його врахування при оцінюванні регресії (7), можна використовувати процедуру МНК з лінійними обмеженнями на параметри [13]. Тоді отримаємо повністю ідентифіковану модель декомпозиції траєкторії руху на складові:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{d}}_0 + e^{\hat{\Lambda}t} \hat{\mathbf{d}}_1 + \sum_{k=1}^{\hat{K}} (\hat{\mathbf{b}}_k \cos \hat{\omega}_k t + \hat{\mathbf{c}}_k \sin \hat{\omega}_k t) . \quad (9)$$

5. Перехід від моделі (9) до диференціального рівняння (1) пропонується робити наступним чином. Нехай  $A = \hat{\Lambda}$ . Моделі з діагональною матрицею  $A$  добре відомі в теорії виробництва [1], теорії інвестицій [5], теорії соціального розвитку [2]. Такі моделі також зустрічаються в механіці та фізиці [7, 15].

Якщо якість моделі (9) задовольняє дослідника, то знаючи  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , можна явно обчислити похідну

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\Lambda} e^{\hat{\Lambda}t} \hat{\mathbf{d}}_1 + \sum_{k=1}^{\hat{K}} (\hat{\omega}_k \hat{\mathbf{b}}_k \cos \hat{\omega}_k t - \hat{\omega}_k \hat{\mathbf{c}}_k \sin \hat{\omega}_k t) . \quad (10)$$

Підставляючи вираз (10) у формулу (1), можна отримати явний вираз для вектора керувань

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = -\hat{\Lambda} \hat{\mathbf{d}}_0 + \sum_{k=1}^{\hat{K}} [(\hat{\omega}_k \hat{\mathbf{c}}_k - \hat{\Lambda} \hat{\mathbf{b}}_k) \cos \hat{\omega}_k t - (\hat{\omega}_k \hat{\mathbf{b}}_k + \hat{\Lambda} \hat{\mathbf{c}}_k) \sin \hat{\omega}_k t] \quad (11)$$

Отже, ідентифіковане рівняння руху (1) приймає вигляд

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\Lambda} \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{v}}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (12)$$

Очевидно, математичний розв'язок задачі Коші (12) співпадає з модельною кривою декомпозиції (9). Тому для безумовного прогнозування [11] еволюції динамічної системи можна використовувати безпосередньо функцію регресії (9).

#### 4. Конструювання регулятора

Регулятор (2) динамічної системи може бути додатковим джерелом інформації про правильність ідентифікації рівняння руху (1). Для деяких систем регулятор (2) можна обрати в лінійній формі. Наприклад,

$$G = G_0 + \mathbf{p}'_0 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{q}_0 \mathbf{v}. \quad (13)$$

Тут  $G_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{q}_0$  – невідомі параметри, що підлягають оцінюванню. Функціонал від потенціалу виду (13) разом із рівнянням руху (12) можуть бути використані при постановці лінійної задачі оптимального керування [15].

Якщо з якихось причин лінійна форма (13) регулятора (2) не задовольняє дослідника, можна перейти до квадратичної форми

$$G = G_0 + \mathbf{p}'_0 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{q}_0 \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v}' Q \mathbf{v}, \quad (14)$$

в якій матриця  $Q$  – деяка симетрична невідроджена матриця. На практиці [4] її можна обирати у вигляді  $Q = kI$  або  $Q = kA'A$ , де  $k$  – деякий невідомий коефіцієнт. Функціонал від потенціалу виду (14) разом із рівнянням руху (12) можуть бути використані при постановці LQ-задач оптимального керування [7]. У такому випадку часто вимагають, щоб матриця  $Q$  була додатно або від'ємно визначена.

### 5. Чисельний експеримент і аналіз результатів

У якості слабо формалізованої системи у роботі пропонується розглянути макроекономічну систему США. Фазовими координатами системи можуть бути обрані сумарні споживчі витрати ( $x_1$ ), приріст основних фондів ( $x_2$ ) та експорт товарів і послуг ( $x_3$ ). Як показує практика [3-5], присутність трьох факторів у моделі макроекономічної динаміки ( $m = 3$ ) у більшості випадків виявляється достатньою. Регулятором системи пропонується обрати ВВП країни як найбільш важливий і чутливий до обраних факторів показник. Статистична інформація [16] зібрана за період 1971-1999 рр. ( $N = 28$ ) і позначена точками на рис. 1. Як видно з графіків, статистичні дані виявилися у середньому зростаючими та опуклими вниз. Тому, як вже зазначалося, при розрахунках будемо використовувати прологарифмовану статистику.

За допомогою ітераційної процедури оцінювання моделі (4) для кожної фазової координати отримані наступні значення елементів матриці  $\Lambda$ :

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} -0.0499 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0666 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0528 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

При заданих  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) максимальні значення коефіцієнтів детермінації  $R^2$  виявилися рівними 0.9602 для  $x_1$ , 0.9432 для  $x_2$  і 0.9791 для  $x_3$ . Тому доцільно залишки розкласти у вигляді обрізаних рядів Фур'є.

Обмежившись першими трьома членами ряду Фур'є ( $K = 3$ ) моделі (5), за формулою (6) обчислюємо частоти періодичної складової траєкторії руху:

$$\hat{w}_1 = 0.2244, \quad \hat{w}_2 = 0.4488, \quad \hat{w}_3 = 0.6732. \quad (16)$$

Далі, оцінюючи модель (7) при знайдених значеннях (15), (16), після відкидання всіх незначущих членів розкладу та виконання обмежень на параметри (8), остаточно приходимо до наступних моделей декомпозиції (9):

$$\hat{x}_1(t) = 2.7256 - 0.7319e^{\hat{\lambda}_1 t} - 0.0306 \cos(\hat{w}_1 t) + 0.1483 \cos(\hat{w}_2 t) + 0.0478 \sin(\hat{w}_3 t),$$

$$\hat{x}_2(t) = 2.3227 - 0.3970e^{\hat{\lambda}_2 t} + 0.0076 \cos(\hat{w}_1 t) + 0.2150 \cos(\hat{w}_2 t) - 0.0297 \sin(\hat{w}_2 t),$$

$$\hat{x}_3(t) = 3.493 - 0.842 e^{\hat{\lambda}_3 t} + 0.024 \cos(\hat{w}_1 t) + 0.128 \sin(\hat{w}_1 t) + \\ + 0.062 \cos(\hat{w}_2 t) + 0.073 \sin(\hat{w}_3 t).$$

Коефіцієнти детермінації побудованих моделей дорівнюють 0.9875, 0.9884, 0.9927 відповідно. Збільшення значень  $R^2$  можна робити шляхом введення

додаткових членів ряду Фур'є або використовуючи інформацію про інші фактори, що впливають на регулятор даної системи.

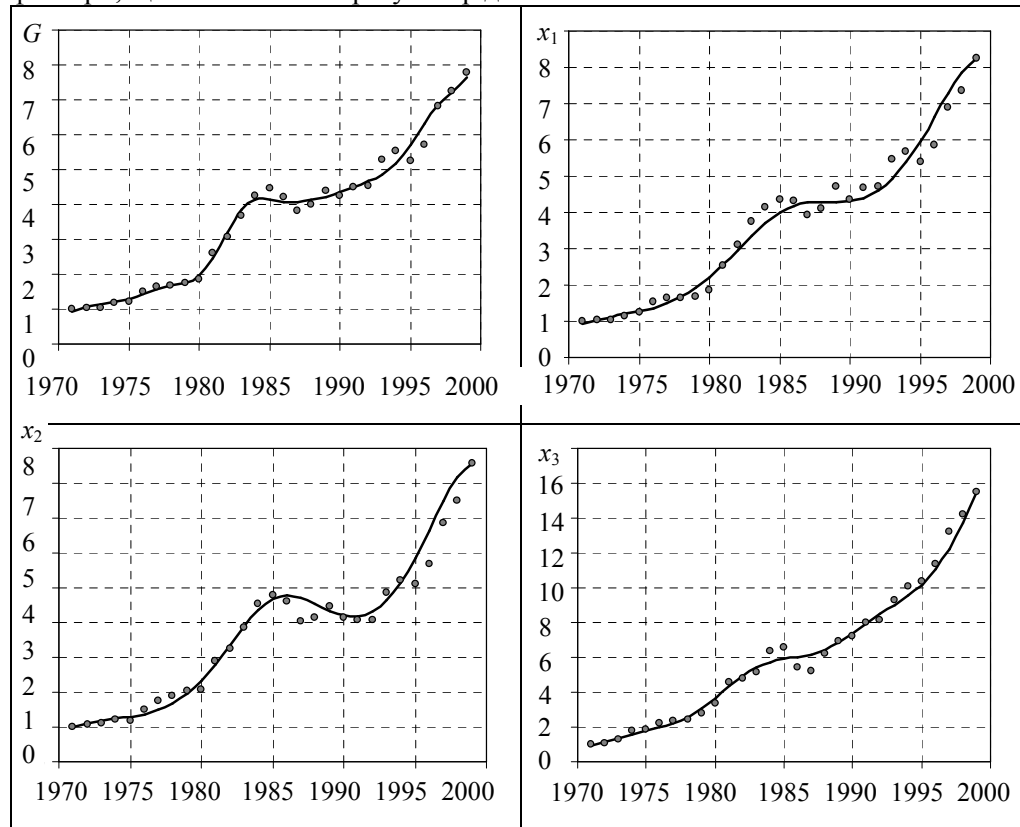


Рис. 1. Реальні та модельні траєкторії руху динамічної системи

Регулятор динамічної системи, специфікований у лінійній формі (13), після повної ідентифікації приймає вигляд

$$G = 2.5957 - 14.5174\dot{x}_3 - 131.4756v_1 - 498.7809v_2 + 13.9081v_3, \quad R^2 = 0.9879.$$

Перехід до квадратичної форми (14) регулятора  $G$  не поліпшує результат: квадратичний доданок у даному випадку виявився незначущим.

Модельні траєкторії руху, зображені кривими на рис. 1, свідчать про високу якість апроксимації вихідної інформації і можливість використання побудованих моделей для імітації та оптимізації еволюції динамічної системи.

## 6. Висновки

У роботі запропоновано ефективний алгоритм ідентифікації лінійно-квадратичних моделей для слабо формалізованих динамічних систем. Для оцінювання невідомих параметрів рівняння руху використано підхід, що базується на декомпозиції траєкторії руху на невідповідні складові – трендову і періодичну. Оцінювання проводилося в рамках лінійного регресійного аналізу, граничні умови для диференціального рівняння виконувалися за допомогою МНК з обмеженнями на параметри. Отримані результати свідчать про достатньо

високу якість побудованих моделей і можливість їх використання у практиці імітації та оптимізації еволюції динамічних систем.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295с.
2. Гуц А.К. и др. Социальные системы. Формализация и компьютерное моделирование: Учебное пособие. – Омск: Омск. гос. ун-т, 2000. – 160 с.
3. Васильев А.А., Назаренко А.М. Дискретизация и численная идентификация дифференциально-игровых моделей макроэкономической динамики // Вісник Харк. нац. ун-та., – 2006. – №733. Сер. „Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, вип. 6. – С. 35-47.
4. Nazarenko O.M., Filchenko D.V. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective. \ International Journal of Innovating Computing, Information and Control. – Vol. 4, Number 7, 2008. – pp.1553-1566.
5. Чекарев Д.А. Модель экономической системы с эффектом накопления в задаче оптимального управления внешним долгом \ Моделирование и обработка информации: Сб.ст. / Моск. физ.-тех. институт. – М., 2003. – С. 39-43.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. 4-ое, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591 с.
7. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. – 508 pp.
8. J.O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell, J. Cao. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach \ Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – Vol. 69, Issue 5, 2007. – pp. 741-796.
9. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния / Под ред. Райбмана Н.С. – М.: Мир, 1975. – 680 с.
10. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: Юнити, 1998. – 1012 с.
11. Назаренко О.М. Основы эконометрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: „Центр навчальної літератури”, 2005. – 392 с.
12. Назаренко О.М., Фільченко Д.В. Параметрична ідентифікація стаціонарних лінійно-квадратичних моделей динамічних систем // Складні системи і процеси. – Запоріжжя, ГУ «ЗІДМУ», 2007. – С. 37-43.
13. Greene W.H. Econometric Analysis. Fifth Edition. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 802 p.
14. Bates D.M., Watts D.B. Nonlinear Regression Analysis and Its Applications. – N.Y.: Wiley, 1988. – 365p.
15. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Изд-во Мир, 1972.
16. <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>