

Весовые функции полиномиального регрессионного анализа

А. В. Омельченко, А. В. Федоров

Харьковский национальный университет радиотехники, Украина

The concepts of weight functions of polynomial regression analysis and their frequency characteristics are defined. The analytical expressions for asymptotic weight functions of the method of least squares are obtained. A method of synthesis of weight functions on preset properties is offered. For polynomial models of the first, second and fourth orders examples of weight functions synthesis are given.

Введение

При анализе зависимостей различной природы требуется аппроксимировать последовательности данных полиномиальными функциями. Подобные задачи возникают, например, в системах траекторных измерений, в гравиметрии и в других приложениях. Обычно для такой аппроксимации используется метод наименьших квадратов (МНК) [1–3]. Однако, в тех случаях, когда ошибки наблюдения не являются белым шумом, МНК не обеспечивает минимально возможных дисперсий оценок параметров функции регрессии. Поэтому актуальным является создание методов оценивания параметров полиномиальной регрессии для случая, когда ошибки наблюдения являются коррелированными.

В настоящей работе задача оценивания параметров полиномиальной регрессии решается с использованием аппарата весовых функций, применение которого для спектрального анализа сигналов получило широкое распространение [4–6].

Целью работы является обоснование метода оценивания параметров полиномиальной регрессии для случая коррелированных ошибок наблюдений, в частности ошибок наблюдений, представимых в виде ограниченного по полосе случайного процесса.

Для достижения сформулированной цели необходимо решить следующие задачи:

- определить понятие весовых функций полиномиального регрессионного анализа и получить для них аналитические выражения;
- обосновать метод синтеза алгоритмов оценивания параметров полиномиальной регрессии, обеспечивающих весовые функции с требуемыми свойствами;
- синтезировать весовые функции полиномиального регрессионного анализа, применение которых обеспечивает эффективное подавление гармонических помех.

1. Постановка задачи

Будем полагать, что в моменты времени t_k , $k = \overline{0, K-1}$ ($t_0 = 0$, $t_{K-1} = T$) наблюдается совокупность данных представляющая собой сумму

детерминированной составляющей в виде полинома степени n с коэффициентами a_i , $i = \overline{0, n}$ и ошибки (шума) наблюдения $\zeta(t)$

$$z(t_k) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t_k^i + \zeta(t_k). \quad (1)$$

Шум $\zeta(t)$ предполагается стационарным случайным процессом с нулевым средним значением и спектральной функцией $G(f)$, удовлетворяющей условию [5]

$$\int_0^{\infty} f^{2n} dG(f) < \infty. \quad (2)$$

Требуется найти несмещенные оценки \hat{a}_i коэффициентов a_i , имеющие минимальное среднеквадратическое отклонение относительно истинных значений $M[\hat{a}_i - a_i]^2$, $i = \overline{0, n}$.

2. Метод наименьших квадратов

Оценивание коэффициентов a_i по методу наименьших квадратов состоит в минимизации взвешенной суммы [1, 2]

$$S(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k [z(t_k) - \sum_{i=0}^n a_i \cdot t_k^i]^2, \quad (3)$$

где p_k – неотрицательные веса измерений, удовлетворяющие условию $\sum_{k=0}^{K-1} p_k = 1$.

В результате дифференцирования выражения (3) по искомым коэффициентам a_0, \dots, a_n и приравнивания результатов нулю получают систему линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{K-1} p_k t_k^{i+r} = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot p_k t_k^r, \quad r = \overline{0, n}. \quad (4)$$

Система уравнений (4) может быть решена непосредственно. Однако более удобным является ее решение с использованием ортогональных полиномов Чебышева. В рамках последнего подхода уравнение наблюдения (1) представляется в виде

$$z(t_k) = \sum_{i=0}^n \rho_i \cdot \psi_i(t_k) + \zeta(t_k), \quad (5)$$

где $\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)$ – полиномы Чебышева, ортогональные на множестве точек t_0, t_1, \dots, t_{K-1} с весами p_0, p_1, \dots, p_{K-1} . Коэффициенты разложения в (5) оцениваются согласно выражению:

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{E_i} \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \psi_i(t_k) \cdot p_k, \quad i = \overline{0, n}, \quad (6)$$

где

$$E_i = \sum_{k=0}^{K-1} [\psi_i(t_k)]^2 p_k, \quad (7)$$

а оценки искомым коэффициентов $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n$ определяются по найденным значениям ρ_0, \dots, ρ_n . При этом коэффициент старшей степени $a_n = \rho_n$, а остальные

$$a_i = \rho_i + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \cdot \rho_j, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (8)$$

где h_{ij} – множители, зависящие от вида соответствующих полиномов $\psi_j(t_k), j = \overline{i+1, n}$.

В любом случае в рамках МНК оценки коэффициентов полиномиальной регрессии представимы в виде взвешенной суммы наблюдений:

$$\hat{a}_i = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot w_i(k), \quad i = \overline{0, n}, \quad (9)$$

где $w_i(k)$ – весовые коэффициенты, представляющие собой взвешенную сумму нормированных полиномов Чебышева

$$w_i(k) = [\varphi_i(t_k) + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \varphi_j(t_k)] p_k, \quad \varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k) / E_i.$$

Влияние гармонических, с частотой f , составляющих помехи $\zeta(t)$ на оценку i -го коэффициента регрессионной модели может быть охарактеризовано преобразованием Фурье от весов

$$h_i(f) = \sum_{k=0}^{K-1} w_i(k) \exp(-j2\pi f t_k), \quad f \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (10)$$

3. Весовые функции регрессионного анализа

Воспользуемся в (9) соотношением [7]

$$z(\tau) = \int_0^T z^{(i)}(t) u_{i-1}(\tau - t) dt + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{\tau^p}{p!} z^{(p)}(0), \quad i \geq 1, \quad (11)$$

где функция

$$u_i(x) = \begin{cases} x^i / i!, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ввиду справедливости соотношений (1, 2) процесс $z(t)$ дифференцируем в среднеквадратическом смысле. Поэтому формула (9) с учетом выражения (11) примет вид

$$\hat{a}_i = \int_0^T z^{(i)}(t) V_i(t) dt + \sum_{p=0}^{i-1} \frac{z^{(p)}(0)}{p!} \sum_{k=0}^{K-1} w_i(k) \cdot t_k^p, \quad (12)$$

где

$$V_i(t) = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k \geq t}}^{K-1} w_i(k) \cdot (t_k - t)^{i-1}. \quad (13)$$

Из свойств ортогональности полиномов Чебышева получим

$$\sum_{k=0}^{K-1} w_i(k) \cdot t_k^p = 0, \quad p < i, \quad (14)$$

что является одним из условий, обеспечивающих несмещенность оценок (9).

С учетом (14) представим выражения (12, 13) в следующем виде

$$\hat{a}_i = \int_0^T z^{(i)}(t) V_i(t) dt.$$

где

$$V_i = \frac{(-1)^i}{(i-1)!} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^{K-1} w_i(k) \cdot (t - t_k)^{i-1}. \quad (15)$$

Функции вида (15) представляют собой сплайны порядка $(i-1)$ дефекта 1 с узлами в точках $t_k, k = \overline{0, K-1}$.

Функции $V_i(t)$, участвующие в интеграле (12) в качестве множителя при i -ой производной от наблюдаемого процесса, будем называть весовыми функциями регрессионного анализа. Они обладают основными свойствами весовых функций, используемых при спектральном анализе сигналов [6].

Преобразование Фурье весовых функций

$$H_i(f) = \int_0^T V_i(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad f \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n}$$

характеризует влияние гармонических составляющих i -ой производной помехи $\zeta(t)$ на оценку i -го коэффициента регрессионной модели.

Функции $H_i(f)$ будем называть частотными характеристиками регрессионного анализа. С использованием выражения (10) можно показать, что

$$H_i(f) = \frac{h_i(f)}{(-j2\pi f)^i},$$

где функция $h_i(f)$ представляет собой преобразование Фурье весовых коэффициентов $w_i(k)$ и определяется согласно (10).

Максимальное значение модуля частотной характеристики достигается, как правило, на нулевой частоте и для несмещенных оценок

$$H_i(0) = \int_0^T V_i(t) dt = \frac{1}{i!}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В то же время для частотной характеристики относительно исходного сигнала $z(t)$ имеем $h_i(0) = 0$. Понятие частотной характеристики полезно при полиномиальном регрессионном анализе сигналов на фоне коррелированных шумов наблюдения в виде ограниченных по полосе случайных процессов.

Во многих случаях ошибки наблюдения (шумы) содержат составляющие вида $e(t) = b_p t^p$, где p больше порядка модели n . Это приводит к смещениям оценок коэффициентов

$$M[\hat{a}_i] - a_i = \int_0^T e^{(i)}(t) V_i(t) dt = b_p \cdot p \cdot \dots \cdot (p - i + 1) \cdot \int_0^T t^{p-i} \cdot V_i(t) dt .$$

Поэтому для подавления полиномиальных помех весовые функции должны иметь малую, по возможности, ширину.

4. Синтез весовых функций

К весовым функциям регрессионного анализа, точно также как и к весовым функциям спектрального анализа, предъявляются противоречивые требования по эквивалентной шумовой полосе и скорости спада боковых лепестков преобразования Фурье от весовых функций. Эквивалентная шумовая полоса характеризует мощность шума, накапливаемого окном $v(t)$ в процессе анализа, и определяется согласно формуле [6]

$$\theta = \int_0^T v^2(t) dt / [\int_0^T v(t) dt]^2 .$$

Наименьшая шумовая полоса $\theta = 1/T$ достигается для прямоугольного временного окна.

В зависимости от вида помехи $\zeta(t)$ в модели (1) целесообразно использовать метод обработки, обеспечивающий минимальную дисперсию оценки параметра регрессии. Это достигается соответствующим выбором весовой функции регрессионного анализа.

Для синтеза весовых функций воспользуемся представлением весовых коэффициентов в виде линейной комбинации полиномов Чебышева:

$$w_i(k) = \tilde{w}_i(k) + \sum_{r=1}^m \alpha_{j_r} \varphi_{j_r}(t_k) p_k, \quad j_r \in \{n+1, n+2, \dots\}, \quad (16)$$

где $\tilde{w}_i(k) = [\varphi_i(t_k) + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} \varphi_j(t_k)] p_k$, а число m определяется требованиями задачи.

Подставляя весовые коэффициенты (16) в выражение (15) получим представление весовой функции в виде линейной комбинации

$$V_i(t) = \tilde{V}_i(t) + \sum_{r=1}^m \alpha_{j_r} \tilde{V}_{j_r}(t), \quad (17)$$

где

$$\tilde{V}_i(t) = \frac{(-1)^i}{(i-1)!} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^{K-1} \tilde{w}_i(k) \cdot (t - t_k)^{i-1}; \quad \tilde{V}_j(t) = \frac{(-1)^j}{(j-1)!} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^{K-1} \varphi_j(t_k) \cdot p_k \cdot (t - t_k)^{j-1}.$$

Если весовая функция регрессионного анализа должна иметь малую эквивалентную шумовую полосу (т. е. плоскую вершину), то коэффициенты α_{j_r} , $r = \overline{1, m}$ могут быть выбраны из системы линейных уравнений

$$\sum_{r=1}^m \alpha_{j_r} \cdot [\tilde{V}_{j_r}(t_{k_v}) - \tilde{V}_{j_r}(t_{\max})] = \tilde{V}_i(t_{\max}) - \tilde{V}_i(t_{k_v}), \quad v = \overline{1, m}; \quad (18)$$

где t_{\max} – центральная точка интервала наблюдения, а точки $t_{k_v}, v = \overline{1, m}$ выбираются в центральной части интервала наблюдения.

Если же весовая функция должна обладать высокой скоростью спада боковых лепестков преобразования Фурье, то коэффициенты $\alpha_{j_r}, r = \overline{1, m}$ в (16) можно определить как

$$\alpha_{j_r} = \tilde{\alpha}_{j_r} / \tilde{\alpha}_i, \quad (19)$$

где коэффициенты $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{j_r}$ определяются из решения системы линейных уравнений

$$\tilde{\alpha}_i \cdot V_i(t_v) + \sum_{r=1}^m \tilde{\alpha}_{j_r} \tilde{V}_{j_r}(t_v) = \varepsilon_v, \quad v = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Совокупность вещественных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ в выражениях (20) выбирается таким образом, чтобы обеспечивалась требуемая скорость изменения весовой функции в окрестности точки 0.

5. Модель первого порядка

Воспользуемся представлением регрессионной зависимости в виде линейной комбинации многочленов Чебышева [2]

$$M[z(t)] = \rho_0 \psi_0(t) + \rho_1 \psi_1(t), \quad (21)$$

где

$$\psi_0(t) = 1; \quad \psi_1(t) = t - \bar{t}, \quad \bar{t} = \sum_{k=0}^{K-1} t_k p_k.$$

Согласно МНК имеем

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot p_k; \quad \hat{\rho}_1 = \frac{1}{E_1} \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \psi_1(t_k) \cdot p_k,$$

где

$$E_1 = \sum_{k=0}^{K-1} [\psi_1(t_k)]^2 \cdot p_k.$$

Коэффициенты линейной регрессии

$$\hat{a}_0 = \hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_1 \cdot \bar{t}, \quad \hat{a}_1 = \hat{\rho}_1 = \int_0^T z'(t) V_1(t) dt,$$

где весовая функция линейного регрессионного анализа

$$V_1(t) = -\frac{1}{E_1} \sum_{k=0}^{K-1} \psi_1(t_k) \cdot e(t - t_k), \quad e(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Можно показать, что если отсчеты времени $t_k, k = \overline{0, K-1}$ отстоят друг от друга на одинаковый интервал дискретизации Δ и веса $p_k, k = \overline{0, K-1}$ одинаковы для всех отсчетов, то при $\Delta \rightarrow 0$ весовая функция $V_1(t)$ сходится к функции

$$V_{1a}(t) = \frac{6}{T} \cdot \frac{t}{T} \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (22)$$

Очевидно, что в отсутствие ошибок наблюдения имеем $z'(t) = a_1$ и $\int_0^T V_{1a}(t) dt = 1$.

Согласно методу, изложенному в предыдущем разделе, выполним синтез весовых функций линейного регрессионного анализа.

Предположим, что на интервале $[0,1]$ наблюдается 129 равноотстоящих временных отсчетов смеси вида (1). Синтез весовых коэффициентов $w_1(k)$, $k = \overline{0, K-1}$ выполним согласно формулам (16–18) в базисе полиномов Чебышева $\{\varphi_1(t), \varphi_3(t), \varphi_5(t)\}$. При этом примем $t_{\max} = 1/2$, $t_{k_1} = 15/32$, $t_{k_2} = 14/32$. В результате придем к весовым коэффициентам, которые соответствуют весовой функции, изображенной на рис. 1 сплошной кривой (2). Пунктирной кривой (1) на рис. 1 изображена весовая функция линейного регрессионного анализа (22). Амплитудно–частотные характеристики (АЧХ) синтезированной весовой функции и весовой функции (22) представлены на рис. 2 соответственно сплошной (2) и пунктирной (1) кривыми.

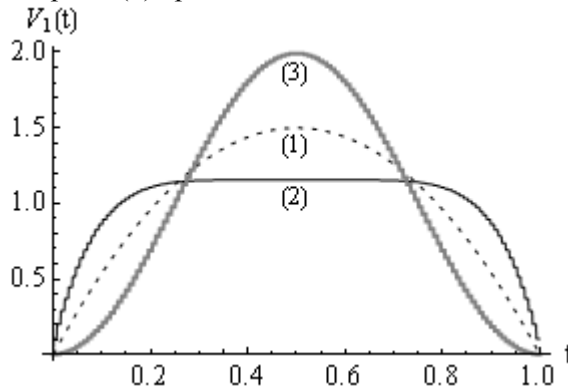


Рис.1. Весовые функции линейного регрессионного анализа

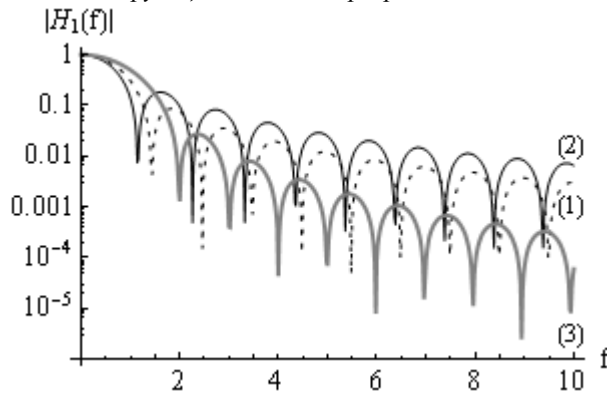


Рис.2. АЧХ весовых функций линейного регрессионного анализа

Из графиков, представленных на рис. 2, видно, что синтезированная весовая функция обеспечивает АЧХ с более узким главным лепестком. Эквивалентная шумовая полоса для синтезированной весовой функции $\theta \approx 1,07$ тогда как для

весовой функции (22) $\theta \approx 1,2$. При этом АЧХ синтезированного окна обладает большим уровнем боковых лепестков.

Синтезируем теперь весовую функцию с большей скоростью спада боковых лепестков преобразования Фурье по сравнению с весовой функцией МНК. При этом интервал наблюдения и число отсчетов оставим теми же, что и в предыдущем примере. Синтез весовых коэффициентов $w_1(k)$ выполним согласно формулам (16,19,20) в базисе полиномов Чебышева $\{\varphi_1(t), \varphi_3(t), \varphi_5(t)\}$. При этом будем предполагать кубическую скорость возрастания весовой функции: $\varepsilon_1 = 1; \varepsilon_2 = 2^3; \varepsilon_3 = 3^3$. В результате придем к весовым коэффициентам, которые соответствуют весовой функции, изображенной на рис. 1 утолщенной серой кривой (3). На рис. 2 такой же кривой (3) изображена АЧХ синтезированной весовой функции. Как видно из графиков синтезированная весовая функция обладает меньшим уровнем боковых лепестков АЧХ, чем весовая функция МНК. Платой за это преимущество является более широкий главный лепесток частотной характеристики. Для синтезированной весовой функции эквивалентная шумовая полоса составляет $\theta \approx 1,5$, тогда как для весовой функции (22) $\theta \approx 1,2$.

6. Модель второго порядка

Воспользуемся представлением квадратичной регрессии по методу наименьших квадратов в виде линейной комбинации многочленов Чебышева [2]

$$M[z(t)] = \rho_0 \psi_0(t) + \rho_1 \psi_1(t) + \rho_2 \psi_2(t),$$

где

$$\psi_0(t) = 1; \quad \psi_1(t) = t - \bar{t}; \quad \psi_2(t) = (t - \bar{t})^2 - \alpha \cdot (t - \bar{t}) - \beta. \quad (23)$$

В выражении (23) использованы параметры

$$\bar{t} = \sum_{k=0}^{K-1} t_k p_k; \quad \alpha = \sum_{k=0}^{K-1} (t_k - \bar{t})^3 p_k / \sum_{k=0}^{K-1} (t_k - \bar{t})^2 p_k; \quad \beta = \sum_{k=0}^{K-1} (t_k - \bar{t})^2 p_k.$$

В рамках метода наименьших квадратов с учетом ортогональности многочленов Чебышева имеем

$$\hat{\rho}_0 = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) p_k; \quad \hat{\rho}_1 = \frac{1}{E_1} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \psi_1(t_k) \cdot p_k; \quad \hat{\rho}_2 = \frac{1}{E_2} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \psi_2(t_k) \cdot p_k,$$

где

$$E_1 = \sum_{k=0}^{K-1} [\psi_1(t_k)]^2 \cdot p_k; \quad E_2 = \sum_{k=0}^{K-1} [\psi_2(t_k)]^2 \cdot p_k.$$

Для коэффициентов полиномиального разложения квадратичной регрессии по аргументу $t - \bar{t}$ получим

$$\hat{a}_0 = \hat{\rho}_0 - \beta \cdot \hat{\rho}_2, \quad \hat{a}_1 = \hat{\rho}_1 - \alpha \cdot \hat{\rho}_2, \quad \hat{a}_2 = \hat{\rho}_2.$$

Выражение для весовой функции (15) представим в следующем виде

$$V_2(t) = \frac{1}{E_2} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^{K-1} \psi_2(t_k) \cdot (t - t_k) p_k. \quad (24)$$

Подставив в (24) выражение (23) для $\psi_2(t)$ можно показать, что при одинаковых весах измерений и $\Delta \rightarrow 0$ весовая функция $V_2(t)$ сходится к функции

$$V_{2a}(t) = \frac{15}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2. \quad (25)$$

Для весового окна (25) эквивалентная шумовая полоса $\theta = 1,43/T$.

Проиллюстрируем эффективность предложенного метода синтеза весовой функции регрессионного анализа с требуемыми свойствами.

Аналогично предыдущему, будем предполагать, что на интервале $[0,1]$ наблюдается 129 равноотстоящих временных отсчетов смеси вида (1). Согласно формулам (16–18) выполним синтез весовых коэффициентов в базисе полиномов Чебышева $\{\varphi_2(t), \varphi_4(t), \varphi_6(t)\}$. При этом положим $t_{\max} = 1/2$, $t_{k_1} = 15/32$, $t_{k_2} = 14/32$. В результате придем к весовым коэффициентам, которые соответствуют весовой функции, изображенной на рис. 3 сплошной кривой (2). Пунктирной кривой (1) на рис. 3 изображена весовая функция квадратичного регрессионного анализа (25). АЧХ синтезированной весовой функции и АЧХ весовой функции МНК $V_{2a}(t)$ представлены на рис. 4 соответственно сплошной (2) и пунктирной (1) кривыми. Как видно из графиков, синтезированная весовая функция обеспечивает частотную характеристику с более узким главным лепестком и большим уровнем боковых лепестков. Эквивалентная шумовая полоса для синтезированной весовой функции $\theta \approx 1,17$ тогда как для весовой функции (25) $\theta \approx 1,43$.

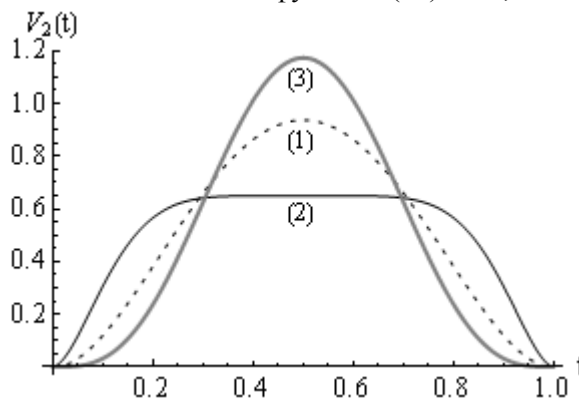


Рис. 3. Весовые функции квадратичного регрессионного анализа

Рассмотрим теперь пример синтеза весовой функции с большей скоростью спада боковых лепестков преобразования Фурье, чем в случае весовой функции метода наименьших квадратов. При этом интервал наблюдения и число отсчетов остаются теми же, что и в предыдущем примере. Синтез весовых коэффициентов выполним согласно формулам (16, 19, 20) в базисе полиномов Чебышева $\{\varphi_2(t), \varphi_4(t), \varphi_6(t)\}$. При этом будем предполагать кубическую скорость возрастания весовой функции: $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 2^3$; $\varepsilon_3 = 3^3$. В результате придем к весовым коэффициентам, которые соответствуют весовой функции, изображенной на рис. 3 утолщенной серой кривой (3). АЧХ синтезированной

весовой функции изображена на рис. 4 утолщенной серой кривой (3). Как видно из графиков, синтезированная весовая функция обладает меньшим уровнем боковых лепестков АЧХ, чем весовая функция метода наименьших квадратов. Платой за это преимущество является более широкий главный лепесток частотной характеристики. Эквивалентная шумовая полоса для синтезированной весовой функции $\theta \approx 1,76$ тогда как для весовой функции (25) $\theta \approx 1,43$.

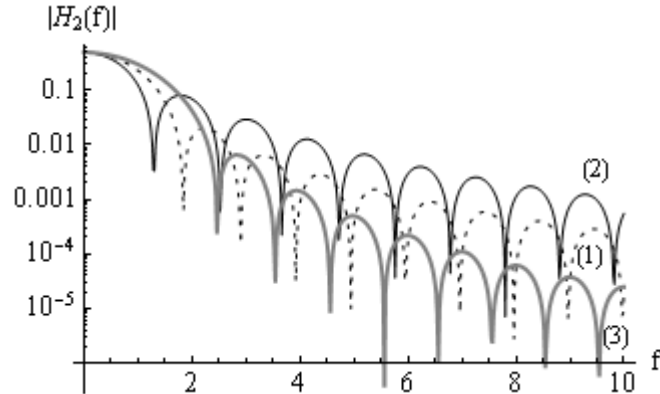


Рис. 4. АЧХ весовых функций квадратичного регрессионного анализа

7. Оценивание коэффициента при второй степени в модели четвертого порядка

Исследуем, каким образом изменяются весовая функция и частотная характеристика квадратичного регрессионного анализа, если порядок модели (1) повышается с двух до четырех. В рассматриваемом случае $n=4$ и для наблюдений, взятых с одинаковым шагом Δ , формула (8) принимает вид

$$\hat{a}_2 = \hat{\rho}_2 + h_{24} \cdot \hat{\rho}_4, \quad (26)$$

где

$$\hat{\rho}_2 = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \varphi_2(t_k) p_k, \quad \hat{\rho}_4 = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \varphi_4(t_k) p_k.$$

Выражение (26) представим в виде

$$\hat{a}_2 = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \cdot \tilde{w}_2(k), \quad \tilde{w}_2(k) = [\varphi_2(t_k) + h_{24} \cdot \varphi_4(t_k)] \cdot p_k.$$

Предполагая веса p_k одинаковыми для всех отсчетов и воспользовавшись видом ортогональных полиномов Чебышева [1] получим

$$h_{24} = -\frac{\Delta^2}{14} \cdot (3K^2 - 13).$$

Таким образом, весовая функция квадратичного регрессионного анализа в данном случае допускает представление

$$\tilde{V}_2(t) = \frac{1}{K} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^{K-1} [\varphi_2(t_k) + h_{24} \cdot \varphi_4(t_k)] \cdot (t - t_k). \quad (27)$$

На рис. 5 сплошной кривой изображена весовая функция (27) для случая 129 равноотстоящих временных отсчетов, взятых на интервале $[0, 1]$. Пунктирной

кривой здесь изображена весовая функция квадратичного регрессионного анализа для полиномиальной модели порядка 2. Вид АЧХ приведенных весовых функций показан на рис. 6.

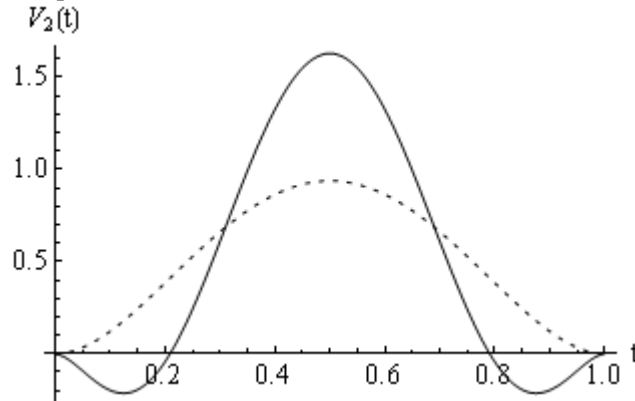


Рис. 5. Весовые функции квадратичного регрессионного анализа для полиномиальных моделей порядка 2 – пунктирная кривая и 4 – сплошная кривая

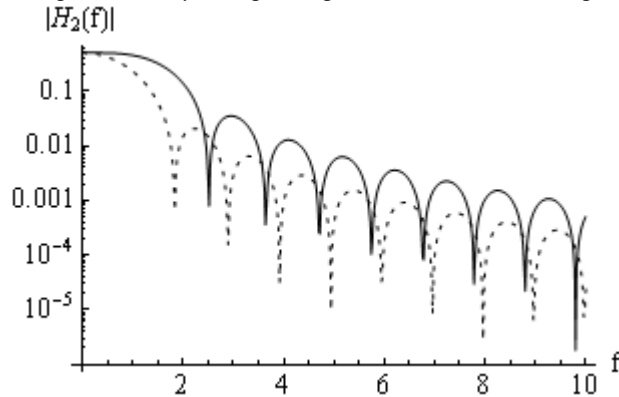


Рис. 6. АЧХ весовых функций квадратичного регрессионного анализа для полиномиальных моделей порядка 2 – пунктирная кривая и 4 – сплошная кривая

Как следует из результатов исследований, представленных на рис. 6, платой за увеличение порядка модели с двух до четырех является значительное расширение главного лепестка АЧХ с одновременным увеличением уровня боковых лепестков. При этом эквивалентная шумовая полоса возрастает примерно вдвое: с $\theta \approx 1,43$ до $\theta \approx 2,79$.

8. Модели третьего и четвертого порядков

При оценивании коэффициентов в полиномиальных моделях третьего и четвертого порядков также полезно пользоваться понятием весовых функций.

Можно показать, что если на интервале $[0, T]$ наблюдается последовательность равноотстоящих отсчетов смеси сигнала и помехи, то для моделей третьего и четвертого порядков асимптотические весовые функции соответственно равны (при $\Delta \rightarrow 0$ и $p_k = 1/K, k = \overline{0, K-1}$)

$$V_{3a}(t) = \frac{70}{3T} \left(\frac{t}{T}\right)^3 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3, \quad V_{4a}(t) = \frac{105}{4T} \left(\frac{t}{T}\right)^4 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^4. \quad (28)$$

Изложенный выше метод позволяет синтезировать алгоритмы обработки данных с весовыми функциями отличными от весовых функций метода наименьших квадратов. В качестве примера на рис. 7 сплошными кривыми приведены синтезированные весовые функции регрессионного анализа для модели четвертого порядка. Пунктирной кривой здесь изображена асимптотическая весовая функция метода наименьших квадратов (28).

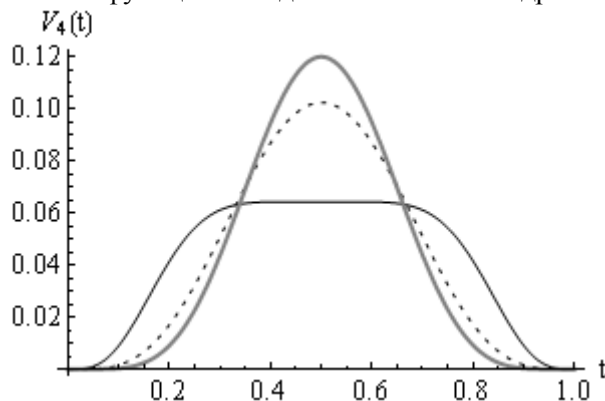


Рис. 7. Весовые функции регрессионного анализа для модели порядка 4

Выводы

В настоящей работе определено понятие весовых функций и на его основе разработан метод оценивания параметров полиномиальной регрессии для случая коррелированных ошибок наблюдения.

В результате выполненных исследований сделаны следующие выводы.

1. Оценки наименьших квадратов параметров полиномиальной регрессии относятся к классу линейных оценок, в которых значение оцениваемого параметра выражается в виде взвешенной суммы отсчетов наблюдаемого сигнала.

2. При оценивании коэффициентов полиномиальной регрессии в случае коррелированных ошибок наблюдения полезно пользоваться понятиями весовой функции и частотной характеристики регрессионного анализа.

3. Получены аналитические выражения для асимптотических весовых функций МНК, которые представляют собой полиномы с порядком в два раза превышающим порядок модели регрессионного анализа.

4. В зависимости от вида помехи целесообразно выбирать веса обработки, обеспечивающие минимальную дисперсию оценки параметра регрессии. Этого можно добиться путем соответствующего выбора весовой функции регрессионного анализа.

5. Разработан метод синтеза весовых функций полиномиального регрессионного анализа, в котором используется представление весов обработки линейной комбинацией многочленов Чебышева.

6. Для полиномиальных моделей первого, второго и четвертого порядков приведены примеры синтеза весовых функций регрессионного анализа.

7. Выполнено исследование весовой функции квадратичного регрессионного анализа для модели четвертого порядка. Показано, что весовая функция в

рассматриваемом случае допускает представление в виде линейной комбинации многочленов Чебышева порядка 2 и 4. Увеличение порядка модели с двух до четырех приводит к значительному расширению частотной характеристики с одновременным увеличением уровня ее боковых лепестков.

Практическая значимость работы состоит в том, что применение весовых функций, синтезированных согласно предложенной методике, позволяет повысить точность оценивания коэффициентов полиномиальной регрессии в условиях коррелированных шумов наблюдения в виде ограниченных по полосе случайных процессов. Дальнейшие исследования предполагается посвятить синтезу весовых функций для конкретных моделей шумов наблюдения, возникающих в прикладных задачах регрессионного анализа.

Авторы выражают благодарность Ph.D. Занимонскому Е.М., обратившему их внимание на вопросы применения весовых функций в регрессионном анализе данных и высказавшего ряд полезных замечаний при обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ, 3-е изд.: Пер. с англ. – М.: «Издательский дом Вильямс», 2007. – 912 с.
2. Румшицкий Л. З. Математическая обработка результатов экспериментов. – М.: Главная ред. физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1971. – 192 с.
3. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороходов А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. литературы, 1985. – 640 с.
4. Марпл–мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
5. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1981. – 280 с.
6. Хэррис Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР. – 1978. – т. 66, №1. – С. 60 – 96.
7. Кравченко В.Ф., Нагорный В.Д. Среднеквадратическое приближение как оператор линейной системы // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – т. 2, №4. – С. 10 – 15.