

## Стационарные структуры в магнитной жидкости

Н. Ф. Пацегон, Л. Н. Попова

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

The space structures in an immovable volume of a magnetic fluid, being in a constant homogeneous magnetic field are studied. It is shown, that the nonhomogeneous distributions of the ferroparticles aggregates such as the static autosolitons and periodic strata may arise under the action of the field. The periodic strata are realized as the oriented along the field parallel strips, in which aggregates are concentrated, and are observed in the experiments with the magnetic fluid films. The estimates for the parameters of a model of the magnetic fluid are obtained as a result of the calculated and experimental data comparison.

### 1. Введение

Магнитные жидкости или феррожидкости представляют собой коллоидные растворы ферромагнитных наночастиц с характерным размером  $\sim 10$  нм в жидком носителе [1,2]. В качестве дисперсионной среды используют воду, углеводороды, минеральные и вакуумные масла, кремний-органические жидкости, физиологические растворы и жидкие металлы, а в качестве дисперсной фазы – частицы железа, магнетита, кобальта и других магнетиков. Для предотвращения слипания частиц их покрывают слоем поверхностно-активного вещества, например, олеиновой кислоты. Магнитные жидкости применяются в уплотнениях вращающихся валов, в подшипниках, сепараторах, акселерометрах, в герметизаторах, предохраняющих корпус жесткого диска персонального компьютера от пыли, в акустических динамиках для демпфирования мембраны, их используют в экологии и медицине [1-3].

В последние годы появились публикации, в которых описываются эксперименты с пленками магнитной жидкости [4-7]. Во внешнем магнитном поле феррочастицы, входящие в состав жидкости, образуют структуры различных конфигураций, зависящих от направления и величины поля, среда становится анизотропной, при этом изменяются условия ее взаимодействия с оптическим излучением. Способность магнитной жидкости изменять свою структуру под действием магнитного поля используют для создания магнитооптических приборов и устройств [3,5].

В связи с этим особое значение приобретают математические модели процессов структурирования магнитных жидкостей. Одним из авторов настоящей работы разработана модель среды с изменяющейся микроструктурой, которая учитывает взаимодействие феррочастиц и возможность образования из них агрегатов [8]. Состояние такой среды в постоянном однородном магнитном поле определяется двумя переменными: средним числом частиц в агрегатах  $\gamma = \nu^{-1}$  и параметром эффективного магнитного поля  $\lambda$ , учитывающим поле, создаваемое частицами, а изменение магнитного состояния среды описывается системой двух квазилинейных уравнений параболического типа. В статье [9]

приведены результаты качественного исследования динамической системы, которая получается в предельном случае, когда диффузионными процессами можно пренебречь. Однородные равновесные состояния среды изучены в работах [10,11], в этих же работах построены кривые равновесного намагничивания и рассмотрены волновые режимы типа волн переключения, которые описывают переход среды из метастабильного состояния в абсолютно устойчивое. В статье [12] сформулированы условия образования и устойчивости контрастных структур в жидкости при условии:  $D_v \ll D_\lambda$ , где  $D_\lambda$ ,  $D_v$  - квадраты характерных масштабов изменения  $\lambda$  и, соответственно  $\nu$ , в пространстве, параметры модели. Контрастные структуры реализуются в виде параллельных магнитному полю игольчатых конфигураций феррочастиц. В [13,14] рассмотрены статические и бегущие автосолитоны в малых объемах магнитной жидкости, т.е. при  $D_v \ll L^2 \ll D_\lambda$ , где  $L$  - характерный линейный размер области, занимаемой жидкостью. В этом случае в первом приближении по  $\varepsilon = \sqrt{D_v/D_\lambda}$  внутри автосолитона параметр  $\lambda$  остается постоянным, а изменяется только переменная  $\nu$ .

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [11-14]. Здесь изучаются статические автосолитоны и периодические страты в относительно больших объемах жидкости, т.е. при  $D_v \ll D_\lambda \ll L^2$ . В таких системах изменение переменной  $\lambda$  в автосолитоне сопоставимо с изменением переменной  $\nu$ , а эффективное магнитное поле, действующее внутри объема жидкости, может оказывать стабилизирующее влияние на неоднородные распределения феррочастиц. При построении стационарных структур в магнитной жидкости используются результаты и методы теории автосолитонов, изложенной в монографии [15]. В отличие от моностабильных и бистабильных систем, для которых разработана теория автосолитонов, рассматриваемая в работе среда с изменяющейся микроструктурой представляет собой мультистабильную систему, поэтому применение этой теории к исследованию её поведения в магнитном поле требует отдельного самостоятельного исследования.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный объем магнитной жидкости, находящейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности  $\vec{H} = H\vec{e}_y$ . Используем модель жидкости с изменяющейся микроструктурой [8], равновесная намагниченность которой определяется плотностью  $\rho$ , температурой  $T$ , напряженностью магнитного поля  $H$ , средним числом частиц в агрегатах  $\gamma = \nu^{-1}$  и параметром эффективного магнитного поля  $\lambda$ . Параметр  $\lambda$  позволяет учесть магнитодипольное взаимодействие между магнитными частицами в приближении самосогласованного поля: напряженность поля, которое действует на жидкий объем, представляется в виде  $H + \lambda M$ , где  $H$  - напряженность внешнего магнитного поля, а  $\lambda M$  - напряженность поля, которое создается

магнитными частицами. Изменение магнитного состояния жидкости описывается системой уравнений [8]:

$$\tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} = D_\lambda \Delta \lambda + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H), \quad \tau_\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} = D_\nu \Delta \nu + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H). \quad (2.1)$$

Функции  $Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H)$  и  $Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H)$  задаются выражениями:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = \frac{1}{2} [L^2 - L_*^2 - 2\beta(\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*})],$$

$$Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = f(\xi) - f(\xi_*) + \alpha(\nu - \nu_{1*})(\nu - \nu_{2*})(\nu - \nu_{3*}),$$

где  $\xi = m_1 H_e / (kT\nu)$ ,  $H_e = H + \lambda M$ ,  $n_i = c_i \rho / M$  - объемная плотность феррочастиц,  $c_i$  - массовая концентрация частиц, которая считается постоянной,  $M$  - масса одной частички,  $k$  - постоянная Больцмана. Намагниченность жидкости определяется уравнением  $M = M_s L(\xi)$ , где  $L(\xi) = \text{cth} \xi - 1/\xi$  - функция Ланжевена,  $M_* = M_s L(\xi_*) = M_s L_*$ ;  $M_s = m_1 n_i$  - намагниченность насыщения жидкости;  $\lambda_{i*}, \nu_{i*} (i = \overline{1,3})$  - равновесные значения  $\lambda$  и  $\nu$  при  $M = M_*$ ,  
причем

$\lambda_{1*} + \lambda_{2*} = 2\lambda_{3*}$ ;  $\nu_{1*} > \nu_{3*} > \nu_{2*}$ ;  $\nu_{i*} - \nu_{j*} = m_1 M_s L_*(\lambda_{i*} - \lambda_{j*}) / (kT\xi_*)$ ;  $\alpha = (kT / (m_1 M_s))^3 (\xi_* / L_*)^4 \beta$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ ;  $f(\xi) = \ln(\text{sh} \xi / \xi) - \xi L(\xi)$ . Параметры  $\tau_\lambda, \tau_\nu, D_\lambda, D_\nu$  и  $\beta$  считаются постоянными.

Однородные равновесные состояния жидкости  $\lambda = \lambda_n = \text{const}$ ,  $\nu = \nu_n = \text{const}$  удовлетворяют условиям:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0. \quad (2.2)$$

При  $\lambda_{1*} \neq \lambda_{2*}$  и фиксированном  $H$  функции  $\lambda(M), \nu(M)$ , определяемые этими уравнениями, неоднозначны, жидкость обладает самопересекающейся гладкой кривой намагничивания, имеющей при разных значениях  $H$  от одного до девяти равновесных состояний [11], и является мультистабильной.

Исследуем случай К-системы [15], для которой  $D_\nu / D_\lambda = \varepsilon^2 \ll 1$ . В К-системе характерный размер изменения параметра эффективного магнитного поля существенно превышает характерный размер изменения среднего числа частиц в агрегатах - параметр  $\nu$  является «быстрой» переменной, а параметр  $\lambda$  - «медленной» переменной. Кроме того, предположим, что выполняется неравенство  $D_\lambda \ll L^2$ , где  $L$  - характерный размер области, занимаемой жидкостью.

Как показано в работе [13], в широком диапазоне значений напряженности магнитного поля кривая локальной связи для магнитной жидкости, которая определяется уравнением  $Q^{(v)}(\lambda, \nu; H) = 0$  при  $H = const$ , имеет И-образную форму, т.е. рассматриваемая система является И-системой [15]. График функции  $Q^{(v)}(\lambda, \nu; H)$  от  $\nu$  при фиксированном значении  $\lambda$  качественно воспроизводит кривую локальной связи и также имеет И-образную форму. В случае И-системы уравнения (2.1) могут иметь решения типа статических автосолитонов и периодических страт [15]. Эти решения удовлетворяют краевым условиям, соответствующим отсутствию потоков на границе  $S$  объема жидкости:

$$\vec{n} \cdot \nabla \lambda|_S = 0, \quad \vec{n} \cdot \nabla \nu|_S = 0. \quad (2.3)$$

### 3. Асимптотическое приближение

Исследуем одномерные стационарные решения системы (2.1), которые удовлетворяют уравнениям:

$$D_\lambda \frac{d^2 \lambda}{dx^2} + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0 \quad D_\nu \frac{d^2 \nu}{dx^2} + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad (3.1)$$

и краевым условиям:

$$\frac{d\lambda}{dx}(0) = \frac{d\lambda}{dx}(L) = 0, \quad \frac{d\nu}{dx}(0) = \frac{d\nu}{dx}(L) = 0. \quad (3.2)$$

В рассматриваемом в работе случае уравнения электродинамики и краевые условия для магнитного поля удовлетворяются автоматически.

В безразмерных переменных уравнения (3.1) имеют вид:

$$\lambda'' + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0 \quad \varepsilon^2 \nu'' + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad (3.3)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерной переменной  $z = x/\sqrt{D_\lambda}$ .

Уединенный статический автосолитон представляет собой решение системы (3.1), которое симметрично относительно точки  $z = 0$ , а при  $z \rightarrow \pm\infty$  стремится к однородному равновесному состоянию  $\lambda = \lambda_h$ ,  $\nu = \nu_h$ . Распределение параметров  $\nu$  и  $\lambda$  в статическом автосолитоне показано на Рис.3.1.

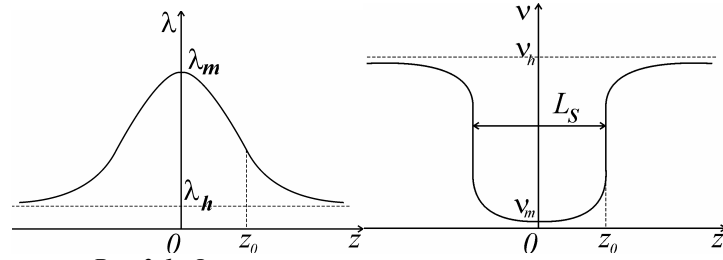


Рис.3.1. Форма статического автосолитона

Если умножить первое уравнение (3.3) на  $\lambda'$ , второе – на  $v'$  и проинтегрировать по  $z$  от  $0$  до  $\infty$ , получим:

$$\int_{\lambda_h}^{\lambda_m} Q^{(\lambda)}(\lambda, v(\lambda); H) d\lambda = 0, \quad \int_{v_h}^{v_m} Q^{(v)}(\lambda(v), v; H) dv = 0, \quad (3.4)$$

где  $\lambda(v)$ ,  $v(\lambda)$  – связь между переменными  $\lambda$ ,  $v$  в автосолидоне,  $\lambda_m = \lambda(0)$ ,  $v_m = v(0)$ .

Уравнения (3.3) можно записать в виде динамической системы четвертого порядка:

$$\varepsilon X_i' = f_i, \quad i = 1, 2 \quad X_i' = f_i, \quad i = 3, 4, \quad (3.5)$$

где  $X_1 = v$ ,  $X_2 = \varepsilon v'$ ,  $X_3 = \lambda$ ,  $X_4 = \lambda'$ ,  $f_1 = X_2$ ,  $f_2 = -Q^{(v)}(X_3, X_1; H)$ ,  $f_3 = X_4$ ,  $f_4 = -Q^{(\lambda)}(X_3, X_1; H)$ .

Уравнения (3.5) содержат малый параметр при производной и являются сингулярно возмущенными. Приближенное решение системы (3.5) может быть построено методом пограничных функций [16].

Из симметрии автосолитона относительно точки  $z=0$  следует, что при построении его формы достаточно рассмотреть два участка:  $m=1$ :  $0 \leq z \leq z_0 = L_s/2$  и  $m=2$ :  $z_0 \leq z \leq \infty$ , где  $L_s$  – безразмерная ширина автосолитона.

Граничные условия для неизвестных функций  $X_i(z)$  на каждом из участков имеют вид:

$$X_2^{(1)}(0) = 0, \quad X_4^{(1)}(0) = 0, \quad X_1^{(2)}(\infty) = v_h, \quad X_3^{(2)}(\infty) = \lambda_h, \quad (3.6)$$

$$X_i^{(1)}(z_0) = X_i^{(2)}(z_0), \quad i = \overline{1, 4} \quad (3.7)$$

Первые два равенства – это условия симметрии автосолитона. Последнее соотношение – условие непрерывности параметров  $\lambda$ ,  $v$  и их производных.

В соответствии с теорией сингулярных возмущений [16] представим решение системы (3.5) в виде:

$$X_i^{(m)} = \tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + \bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon), \quad i = \overline{1, 4}, \quad m = 1, 2 \quad (3.8)$$

где  $\zeta = z - z_0$ ,  $\xi = (z - z_0)/\varepsilon$ ,  $\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)$  - внешнее решение,  $\bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon)$  - внутреннее (пограничное) решение.

Подставляя (3.8) в (3.5), приходим к системе уравнений:

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_1^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_1^{(m)}}{d\xi} = \tilde{X}_2^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + \bar{X}_2^{(m)}(\xi, \varepsilon) \quad (3.9)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_2^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_2^{(m)}}{d\xi} = f_2\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)\right) + \bar{f}_2(\xi, \varepsilon) \quad (3.10)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_3^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_3^{(m)}}{d\xi} = \varepsilon \tilde{X}_4^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + \varepsilon \bar{X}_4^{(m)}(\xi, \varepsilon) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_4^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_4^{(m)}}{d\xi} = \varepsilon f_4\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)\right) + \varepsilon \bar{f}_2(\xi, \varepsilon), \quad (3.12)$$

где

$$\bar{f}_i(\xi, \varepsilon) = f_i\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon)\right) - f_i\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\varepsilon\xi, \varepsilon)\right), \quad i = 2, 4.$$

Подстановка (3.8) в первое граничное условие (3.7) дает:

$$X_2^{(1)}(0) = \tilde{X}_2^{(1)}(-z_0) + \bar{X}_2^{(1)}\left(-\frac{z_0}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (3.13)$$

Поскольку для пограничных функций

$$\bar{X}_i^{(1)}(-\infty) = \bar{X}_i^{(2)}(\infty) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (3.14)$$

из (3.13) следует

$$\tilde{X}_2^{(1)}(-z_0) = 0. \quad (3.15)$$

Аналогично из трех оставшихся условий (3.7) и (3.8) получаем:

$$\tilde{X}_4^{(1)}(-z_0) = 0, \quad \tilde{X}_1^{(2)}(\infty) = \nu_h, \quad \tilde{X}_3^{(2)}(\infty) = \lambda_h \quad (3.16)$$

$$\tilde{X}_i^{(1)}(0) + \bar{X}_i^{(1)}(0) = \tilde{X}_i^{(2)}(0) + \bar{X}_i^{(2)}(0), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3.17)$$

Выпишем асимптотическое разложение для внутреннего и внешнего решений:

$$\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon) = \tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\zeta) + \varepsilon \tilde{X}_{i,1}^{(m)}(\zeta) + \dots + \varepsilon^k \tilde{X}_{i,k}^{(m)}(\zeta) + \dots \quad (3.18)$$

$$\bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon) = \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi) + \varepsilon \bar{X}_{i,1}^{(m)}(\xi) + \dots + \varepsilon^k \bar{X}_{i,k}^{(m)}(\xi) + \dots \quad (3.19)$$

Если подставить (3.18), (3.19) в систему (3.9) - (3.12), разложить функции  $f_i(X_j)$  в ряды по степеням  $\varepsilon$ , и приравнять члены одинакового порядка малости, отдельно зависящие от  $\zeta$ , и, отдельно зависящие от  $\xi$ , для первых членов разложения получим:

$$\tilde{X}_{2,0}^{(m)}(\zeta) = 0, \quad f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\zeta)\right) = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{d\bar{X}_{1,0}^{(m)}}{d\xi} = \bar{X}_{2,0}^{(m)}(\xi), \quad \frac{d\bar{X}_{2,0}^{(m)}}{d\xi} = \bar{f}_{2,0} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\bar{X}_{3,0}^{(m)}}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\tilde{X}_{3,0}^{(m)}}{d\xi} = \tilde{X}_{4,0}^{(m)}(\zeta), \quad \frac{d\bar{X}_{4,0}^{(m)}}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\tilde{X}_{4,0}^{(m)}}{d\xi} = f_4\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\zeta)\right), \quad (3.22)$$

где

$$\bar{f}_{2,0} = f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)\right) - f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0)\right) = f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)\right).$$

Последнее равенство выписано с учетом второго условия (3.20).

Рассмотрим граничные условия. Равенство (3.15) выполняется для нулевого приближения в силу первого условия (3.20), первое равенство (3.16) дает:

$$\tilde{X}_{4,0}^{(l)}(-z_0) = 0. \quad (3.23)$$

Из двух других следует:

$$\tilde{X}_{1,0}^{(2)}(\infty) = \nu_h, \quad \tilde{X}_{3,0}^{(2)}(\infty) = \lambda_h. \quad (3.24)$$

Выпишем члены нулевого порядка для соотношения (3.17) при  $i = 1$ :

$$\tilde{X}_{1,0}^{(l)}(0) + \bar{X}_{1,0}^{(l)}(0) = \tilde{X}_{1,0}^{(2)}(0) + \bar{X}_{1,0}^{(2)}(0). \quad (3.25)$$

При  $i = 2$  из (3.17) с учетом (3.20) получаем:

$$\bar{X}_{2,0}^{(l)}(0) = \bar{X}_{2,0}^{(2)}(0). \quad (3.26)$$

Из (3.22) и (3.14) следует:

$$\bar{X}_{3,0}^{(m)}(0) = \text{const} = 0, \quad \bar{X}_{4,0}^{(m)}(0) = \text{const} = 0. \quad (3.27)$$

Поэтому при  $i = 3, 4$  равенства (3.17) дают:

$$\tilde{X}_{i,0}^{(l)}(0) = \tilde{X}_{i,0}^{(2)}(0). \quad (3.28)$$

Введем обозначения:  $\tilde{X}_{3,0}^{(m)}(0) = \lambda_s$ ,  $\tilde{X}_{1,0}^{(m)}(0) + \bar{X}_{1,0}^{(m)}(\xi) = u$ . Тогда система (3.21) сводится к уравнению:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = -Q^{(v)}(\lambda_s, u; H). \quad (3.29)$$

Если  $\lambda_- < \lambda_s < \lambda_+$ , где  $\lambda_-, \lambda_+$  - минимальное и максимальное значение функции  $\lambda(v)$ , определяющей кривую локальной связи, правая часть имеет три корня  $v_{si}, i = \overline{1,3}$ . Под кривой локальной связи величина  $Q^{(v)}$  положительна, а над кривой локальной связи – отрицательна [13], поэтому точки  $(\lambda_s, v_{s1}), (\lambda_s, v_{s3})$  являются седловыми, а точка  $(\lambda_s, v_{s2})$  - центр.

Условия (3.14), (3.26), (3.27) могут быть выполнены в том и только в том случае, когда решение уравнения (3.29) соответствует сепаратрисе, которая идет из одной седловой точки в другую [16]. Такая фазовая траектория существует, если  $\lambda_s$  удовлетворяет равенствам:

$$\int_{v_{s1}}^{v_{s3}} Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) dv = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda_s, v_{si}; H) = 0, \quad i = \overline{1,3}; \quad (3.30)$$

и соответствует стоячей волне переключения [17].

Из (3.27) следует, что в асимптотическое приближение для распределения  $\lambda(z)$  входит только внешнее решение. Асимптотическое приближение для  $v(z)$  содержит внешнее и внутреннее решение.

#### 4. Статические автосолитоны

Все фазовые траектории системы (3.3) близки к траекториям, состоящим из участков плавного и резкого распределения параметров.

Плавные распределения описываются уравнениями

$$\lambda'' + Q^{(\lambda)}(\lambda, \tilde{v}(\lambda); H) = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda, \tilde{v}; H) = 0, \quad (4.1)$$

которые следуют из второго равенства (3.20), второго и четвертого соотношений (3.22), и граничными условиями

$$\lambda'(0) = 0, \quad \lambda(\infty) = \lambda_h, \quad \lambda^{(1)}(z_0) = \lambda^{(2)}(z_0), \quad \lambda^{(1)'}(z_0) = \lambda^{(2)'}(z_0), \quad (4.2)$$

которые получаются из (3.23), (3.24) и (3.28). Из второго соотношения (4.1) видно, что плавные изменения происходят вдоль кривой локальной связи.

Резкие распределения с точностью до постоянной  $\tilde{X}_{3,0}^{(m)}(0) = \lambda_s$  совпадают со стоячей волной переключения, для них  $\lambda = \lambda_s = const$ , причем  $\lambda_s, v_{si}, i = \overline{1,3}$  однозначно определяются уравнениями (3.30).

Если воспользоваться механической аналогией, для уравнений (3.3) можно ввести потенциалы:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, v(\lambda); H) = \frac{dU_\lambda}{d\lambda}, \quad Q^{(v)}(\lambda(v), v; H) = \frac{dU_v}{dv} \quad (4.3)$$



Кривая локальной связи для магнитной жидкости имеет три участка (I, II, III) однозначной зависимости  $\nu(\lambda)$ , поэтому потенциал  $U_\lambda$  состоит из трех независимых ветвей:

$$U_\lambda^{I,II,III}(\lambda) = \int Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu_{I,II,III}(\lambda); H) d\lambda.$$

Функция  $U_\lambda^{III}(\lambda)$  имеет экстремум в точке  $\lambda = \lambda_h$ , отвечающей однородному состоянию системы. Тип экстремума определяется знаком величины

$$\frac{d^2 U_\lambda}{d\lambda^2} = \frac{Q_\lambda^{(\lambda)} Q_\nu^{(\nu)} - Q_\lambda^{(\nu)} Q_\nu^{(\lambda)}}{Q_\nu^{(\nu)}}.$$

Это выражение получено с учетом того, что на кривой локальной связи  $dv/d\lambda = -Q_\lambda^{(\nu)}/Q_\nu^{(\nu)}$ .

Существует интервал изменения напряженности магнитного поля, в котором кривая, которая задается уравнением  $Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0$  при фиксированном  $H$  (она называется кривой уравнения состояния), имеет S-образную форму и пересекается с кривой локальной связи в семи точках (Рис.4.1), соответствующих однородным равновесным состояниям жидкости. Справа от кривой уравнения состояния  $Q^{(\lambda)} < 0$ , а слева -  $Q^{(\lambda)} > 0$  [14]. Используем в качестве  $\lambda_h, \nu_h$  координаты точки б, принадлежащей ветви III кривой локальной связи. В этой точке  $d^2 U_\lambda / d\lambda^2 < 0$ , т.к.  $Q_\nu^{(\nu)} > 0$ ,  $Q_\lambda^{(\lambda)} < 0$ , а  $Q_\lambda^{(\nu)} Q_\nu^{(\lambda)} = m_I M_s [Q_\nu^{(\lambda)}]^2 / kT > 0$ . Поэтому потенциал  $U_\lambda^{III}$  принимает при  $\lambda = \lambda_h$  максимальное значение, потенциал  $U_\lambda^I$  вблизи этой точки экстремумов не имеет. Статический автосолитон можно построить, сшивая плавные распределения  $\lambda(z), \nu(z)$ , отвечающие ветвям I и III потенциала  $U_\lambda$ , с резким распределением  $\nu$ . Графики функций  $U_\lambda^I(\lambda)$  и  $U_\lambda^{III}(\lambda)$  пересекаются, однако точке их пересечения отвечают разные значения  $\nu$ . Для построения автосолитона ветви I и III потенциала необходимо расположить так, чтобы они пересекались в точке  $\lambda = \lambda_s$ , где плавные распределения должны переходить в резкое распределение в виде волны переключения. В таком случае будет выполняться условие:

$$U_\lambda^I(\lambda_s) = U_\lambda^{III}(\lambda_s). \quad (4.4)$$

Этому условию можно удовлетворить, т.к. потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной. Точка  $(\lambda_h, 0)$  является седлом, а  $(\lambda_m, 0)$

- центром динамической системы (3.1), ее фазовый портрет содержит сепаратрису,

которая выходит из седла  $(\lambda_h, 0)$  и входит в это седло. Соответствующее ей решение описывает распределение параметра эффективного магнитного поля в автосолитоне и может быть представлено в виде:

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_I(z), & 0 \leq z \leq L_s/2 \\ \lambda_{III}(z), & L_s/2 \leq z \leq \infty \end{cases} \quad (4.5)$$

Изменение параметра  $v$  задается выражением:

$$v(z) = u\left(\frac{z - L_s/2}{\varepsilon}\right) + \begin{cases} v_I(z) - v_{s1}, & 0 \leq z \leq L_s/2 \\ v_{III}(z) - v_{s3}, & L_s/2 \leq z \leq \infty. \end{cases} \quad (4.6)$$

Функции  $\lambda_{I,III}(z)$ ,  $v_{I,III}(z)$  являются решениями системы (4.1) на ветвях I, III.

Первое интегральное равенство (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\int_{\lambda_h}^{\lambda_s} Q^{(I)}(\lambda, v_{III}(\lambda); H) d\lambda + \int_{\lambda_s}^{\lambda_m} Q^{(III)}(\lambda, v_I(\lambda); H) d\lambda = 0$$

или, с учетом (4.4):

$$U_{\lambda}^I(\lambda_m) = U_{\lambda}^{III}(\lambda_h), \quad (4.7)$$

причем

$$Q^{(v)}(\lambda_m, v_m; H) = 0, \quad (4.8)$$

так как точка  $(\lambda_m, v_m)$  принадлежит кривой локальной связи.

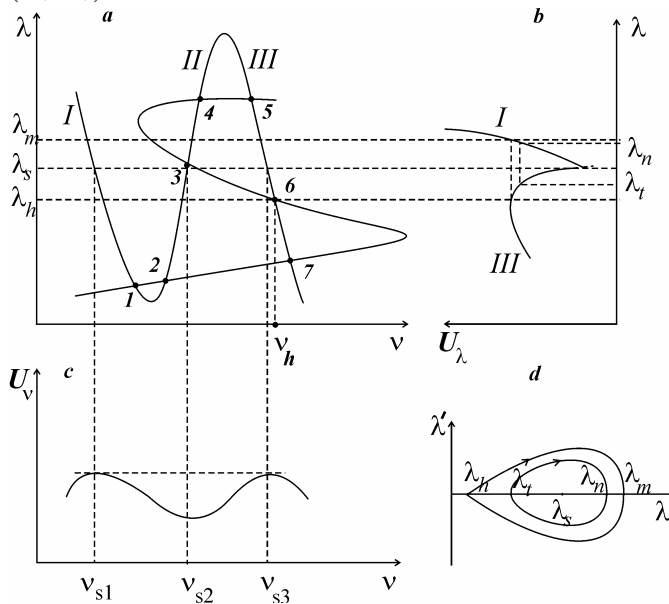


Рис. 4.1. Кривые локальной связи и уравнения состояния (a), потенциалы  $U_{\lambda}(\lambda)$ ,  $U_v(v)$  (b, c) и фазовые траектории дифференциального уравнения (4.1) (d)

Если аппроксимировать функцию  $Q^{(\nu)}(\lambda_s, \nu; H)$  кубическим полиномом, имеющим такие же корни  $\nu_{si}$  и приблизительно такие же производные в точках  $\nu_{si}$ :

$$Q^{(\nu)}(\lambda_s, \nu; H) \approx Q(\nu) = -B(\nu - \nu_{s1})(\nu - \nu_{s2})(\nu - \nu_{s3}),$$

$$\sum_{i=1}^3 Q^{(\nu)}(\lambda_s, \nu_{si}; H) = \sum_{i=1}^3 \frac{dQ}{d\nu}(\nu_{si}),$$

то форму волны переключения можно записать в явном виде:

$$u(\xi) = \frac{\nu_{s1} + \nu_{s3} \exp\left[\sqrt{B/2}(\nu_{s3} - \nu_{s1})\xi\right]}{1 + \exp\left[\sqrt{B/2}(\nu_{s3} - \nu_{s1})\xi\right]}. \quad (4.9)$$

Из дифференциального уравнения (4.1) для ветви I можно получить аналитическое выражение для величины  $L_s$ , определяющей ширину автосолитона:

$$L_s = \sqrt{2} \int_{\lambda_s}^{\lambda_m} d\lambda \left[ \int_{\lambda}^{\lambda_m} Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu(\lambda); H) d\lambda \right]^{-1/2}. \quad (4.10)$$

Следует отметить, что для рассматриваемой в настоящей работе мультистабильной системы решение типа статического автосолитона существует только в том случае, когда отрезки  $[\lambda_s, \lambda_m]$  ветви I и  $[\lambda_h, \lambda_s]$  ветви III кривой локальной связи не содержат неподвижных точек дифференциального уравнения (4.1).

При построении автосолитона сначала определяются однородные равновесные состояния жидкости  $\lambda_h, \nu_h$  как решение системы (2.2); параметр эффективного магнитного поля  $\lambda_s$ , при котором существует стоячая волна переключения в жидкости, – из условия (3.30); значения  $\lambda_m, \nu_m$ , удовлетворяющие соотношениям (4.7)–(4.8); ширина автосолитона  $L_s$ , которая задается выражением (4.10). После этого плавные распределения находятся численным интегрированием вдоль кривой локальной связи дифференциальных уравнений (4.1) с граничными условиями (4.2).

Описанный алгоритм был реализован на ПК для построения автосолитона в магнитной жидкости при разных значениях напряженности магнитного поля. На Рис.4.2(a) представлено распределение среднего числа частиц в агрегатах  $\gamma = 1/\nu$  (кривая 1) и параметра эффективного магнитного поля  $\lambda$  (кривая 2); на Рис.4.2(b) – изменение намагничивания в слое жидкости при  $H = 48 \text{ y}$ .

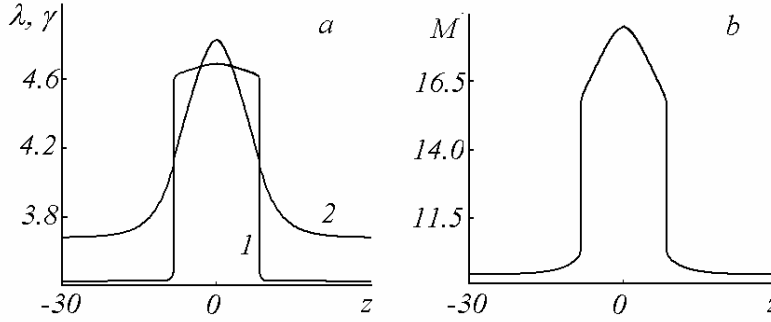


Рис.4.2. Статический автосолитон в магнитной жидкости при  $H=48$  э

Расчеты проводились при следующих значениях параметров жидкости:  $m_1 = 10^{-16}$  эрг/Гс,  $M_s = 40 \text{ А}\tilde{\text{н}}$ ,  $\xi_* = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\lambda_{3*} = 4$ ,  $\lambda_{1*} = 5$ ,  $\nu_{3*} = 0.25$ .

### 5. Периодические структуры

В разделах 3, 4 построено решение задачи (3.1) – (3.2) типа широкого статического автосолитона. Эта задача допускает также периодические решения в виде последовательности одинаковых страт, характеристики каждой из которых несколько отличаются от характеристик автосолитона [15].

Изменение параметра эффективного магнитного поля в автосолитоне описывается сепаратрисой динамической системы (4.1), которая выходит из седла  $(\lambda_n, 0)$  и входит в то же седло. Замкнутые траектории, расположенные внутри сепаратрисы, определяют зависимость  $\lambda(z)$  в периодических стратах (см. Рис.4.1(d)).

Изменение параметров  $\lambda(z), \nu(z)$  в стратах периода  $L_p$  задается выражениями:

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_I(z), & 0 \leq z \leq L_s/2 \\ \lambda_{III}(z), & L_s/2 \leq z \leq L_p/2 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\nu(z) = u \left( \frac{z - L_s/2}{\varepsilon} \right) + \begin{cases} \nu_I(z) - \nu_{s1}, & 0 \leq z \leq L_s/2 \\ \nu_{III}(z) - \nu_{s3}, & L_s/2 \leq z \leq L_p/2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь  $\lambda_{I,III}(z)$  и  $\nu_{I,III}(z)$  представляют собой решения системы (4.1) на интервале  $[0, L_p/2]$ , для которых выполняются условия:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_I}{dz}(0) = \frac{d\lambda_{III}}{dz}(L_p/2) = 0, \quad \frac{d\lambda_I}{dz}(L_s/2) = \frac{d\lambda_{III}}{dz}(L_s/2) \\ \lambda_I(L_s/2) = \lambda_{III}(L_s/2) = \lambda_s. \end{aligned}$$

Значения  $\lambda$  и  $\nu$  в точках  $z = kL_p$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  (обозначим их  $\lambda_n, \nu_n$ ) и в точках  $z = (k + 1/2)L_p$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  (обозначим их  $\lambda_t, \nu_t$ ) удовлетворяют соотношениям:

$$U_\lambda^I(\lambda_n) = U_\lambda^{III}(\lambda_t), \quad Q^{(\nu)}(\lambda_t, \nu_t; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda_n, \nu_n; H) = 0. \quad (5.3)$$

Первое равенство получается точно так же как условие (4.7) для автосолитона. При фиксированном  $H$  по величине  $\lambda_t$  ( $\lambda_h < \lambda_t < \lambda_s$ ) из этих уравнений однозначно определяются значения  $\nu_t$ ,  $\lambda_n$  и  $\nu_n$ .

Аналогично (4.10) можно получить выражение для ширины страты:

$$L_s = \sqrt{2} \int_{\lambda_s}^{\lambda_n} d\lambda \left[ \int_{\lambda}^{\lambda_n} Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu(\lambda); H) d\lambda \right]^{-1/2}, \quad (5.4)$$

и для периода –

$$L_p = L_s + \sqrt{2} \int_{\lambda_t}^{\lambda_s} d\lambda \left[ \int_{\lambda}^{\lambda_t} Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu_{III}(\lambda); H) d\lambda \right]^{-1/2}. \quad (5.5)$$

Значения  $L_s$  и  $L_p$  зависят от величины  $\lambda_t$  и напряженности поля. При  $\lambda_t \rightarrow \lambda_h$  период неограниченно возрастает, а форма страты стремится к форме автосолитона. Если  $\lambda_t \rightarrow \lambda_s$ , то  $\lambda(z) \rightarrow \lambda_s = const$ ,  $\nu(0) \rightarrow \nu_{s1}$ ,  $\nu(L_p/2) \rightarrow \nu_{s3}$ , при этом ширина страты и период стремятся к нулю. На Рис.5.1 представлена зависимость  $L_p$  (a) и  $L_s$  (b) от величины  $\lambda_t$  при разных значениях  $H$ :  $H = 49$  э (1), 50 э (2), 51 э (3).

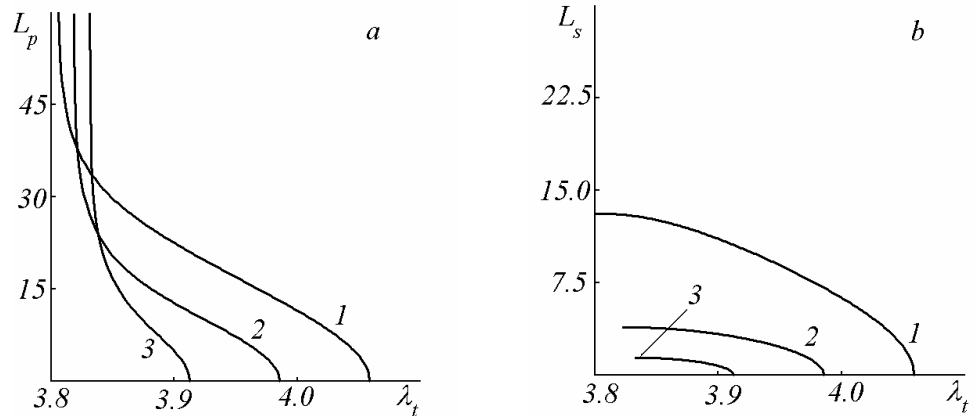


Рис.5.1. Зависимость ширины страты и периода от значения  $\lambda_t$

Из множества периодических распределений  $\lambda(z)$ ,  $\nu(z)$  в объеме магнитной жидкости реализуются только те, для которых размер  $L$  кратен периоду:  $L = L_p \cdot N$ , где  $N = 1, 2, \dots$  - число страт.

На Рис.5.2 показано изменение параметров  $\lambda$ ,  $\gamma = \nu^{-1}$  (a) и  $M$  (b) в периодических стратах, полученных для  $H = 50$  э при  $\lambda_t = 3.96$ ; в этом случае  $L_s \approx 1.25$ ,  $L_p \approx 4.5$ .

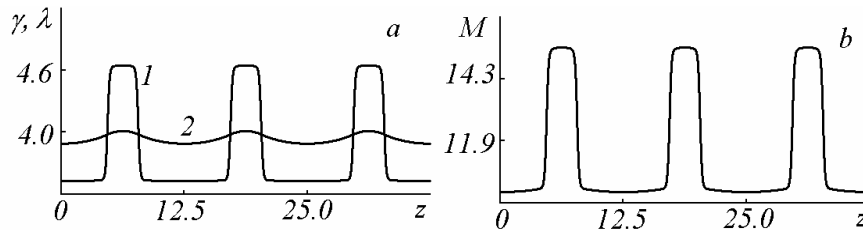


Рис.5.2. Периодические страты в магнитной жидкости

Периодические страты наблюдаются экспериментально в пленках магнитной жидкости [4-7]. В работе [4] описаны результаты экспериментов с магнитной жидкостью на основе керосина, содержащей частицы магнетита размера  $\sim 10$  нм, покрытые олеиновой кислотой. Пленку жидкости толщиной несколько микрометров помещали на дно стеклянной прямоугольной ячейки размерами  $4$  см  $\times$   $1$  см и включали постоянное магнитное поле, параллельное пленке. Через  $10$  с после включения поля в первоначально однородной жидкости появлялись агрегаты в виде цепочек из феррочастиц, ориентированные вдоль магнитного поля. Со временем агрегаты становились длиннее, а через  $2$  часа в пленке устанавливались почти периодические полосовые структуры из феррочастиц шириной  $\sim 1$  мкм и периодом  $\sim 20$  мкм, форма которых в дальнейшем оставалась неизменной. Фотоснимки структур в пленках жидкости были получены с помощью видеокамеры, связанной с оптическим микроскопом.

Авторы работы [5] экспериментально исследовали зависимость периода полосовых структур от напряженности внешнего магнитного поля. Было установлено, что с ростом поля период уменьшается. Кроме того, он зависит от толщины пленки, концентрации магнитной жидкости, ширины ячейки и может изменяться от нескольких микрометров до нескольких десятков микрометров. Похожие результаты описаны в монографии [3]. В ней также приводятся данные о влиянии магнитного поля на ширину полосовых структур: как и период, она уменьшается с усилением поля.

Для сравнения вычисленных значений параметров периодических страт с экспериментальными данными можно использовать средние значения  $L_p$  и  $L_s$

на интервале  $[\lambda_h, \lambda_s]$ :

$$\overline{L_p} = \frac{1}{\lambda_s - \lambda_h} \int_{\lambda_h}^{\lambda_s} L_p d\lambda_t \quad \overline{L_s} = \frac{1}{\lambda_s - \lambda_h} \int_{\lambda_h}^{\lambda_s} L_s d\lambda_t .$$

В частности, при  $H = 49, 50, 51, 52$  э получаем:  $\overline{L_s} \approx 20.1, 14.1, 12.5, 11.2$  и  $\overline{L_s} \approx 9.04, 2.99, 1.11, 0.23$ , соответственно, т.е. ширина страты и её период убывают с ростом поля так же, как в эксперименте.

Сравнивая расчетные значения с экспериментом, можно найти оценки для параметров  $\tau_\lambda, \tau_v, D_\lambda, D_v$  модели среды с изменяющейся микроструктурой, использованной в настоящей работе.

Величина  $\tau_v$  определяет характерное время образования агрегатов из феррочастиц. Как показывает эксперимент,  $\tau_v \approx 10$  с.

Значение  $\tau_\lambda$  представляет собой время релаксации параметра  $\lambda$  и, стало быть, напряженности эффективного магнитного поля  $H_e = H + \lambda M$ , действующего на частицы жидкости. Возникновение структур обусловлено неоднородностью поля, следовательно, время их образования сопоставимо с величиной  $\tau_\lambda$ :  $\tau_\lambda \approx 7200$  с.

Для определения  $D_\lambda$  находим то значение  $H$ , для которого, как в эксперименте,  $\overline{L_p} / \overline{L_s} = 20$ :  $H = 51.18$  э. В этом случае безразмерная ширина страты  $L_s = 0.8$ , следовательно  $D_\lambda = (L_d / L_s)^2 \approx 2$  мкм<sup>2</sup>, где  $L_d \approx 1$  мкм – экспериментально наблюдаемая толщина полосы, содержащей агрегаты из феррочастиц. При этом размерное значение периода структуры составляет  $\sim 20$  мкм, что согласуется с экспериментом.

На изображениях структур, приведенных на Рис.1 в работе [4], полосы, в которых концентрируются агрегаты, отделены от неагрегированной среды достаточно резкой границей. Следовательно толщина «переходного» слоя  $\sim \sqrt{D_v}$ , в котором происходит заметное изменение среднего числа частиц в агрегатах, существенно меньше ширины страты, т.е.  $D_v \ll 1$  мкм<sup>2</sup>.

Полученные оценки подтверждают использованное в работе предположение о том, что магнитная жидкость представляет собой К-систему, для которой  $D_v \ll D_\lambda$ , т.е. среднее число частиц в агрегатах является «быстрой» переменной, а параметр эффективного магнитного поля – «медленной» переменной.

## 6. Заключение

Исследованы одномерные пространственные структуры из феррочастиц, возникающие в неподвижном объеме магнитной жидкости под действием постоянного однородного магнитного поля. Уравнения, описывающие изменение магнитного состояния жидкости, определяют КИ - систему, в которой среднее число частиц в агрегатах является быстрой переменной, а параметр эффективного магнитного поля – медленной переменной. Методами теории автосолиитонов найдены стационарные решения этих уравнений типа статических автосолиитонов и периодических страт. Полученные решения реализуются в виде параллельных слоев или полос, в которых концентрируются агрегаты из феррочастиц, ориентированных вдоль магнитного поля. Полосовые структуры наблюдаются экспериментально в тонких пленках магнитной

жидкости. В результате сравнения расчетных значений геометрических характеристик периодических страт с экспериментом найдены оценки для параметров использованной в работе модели среды с изменяющейся микроструктурой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989. – 356 с.
2. Magnetic Fluids and Application Handbook // Ed. B.Berkovski. – New York: Bege House, Inc., 1996. – 831 p.
3. Пул Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. – М.: Техносфера, 2006. – 334 с.
4. Hong C.-Y., Yang I.J., Horng H.E. Ordered structures in  $Fe_3O_4$  kerosene-based ferrofluids // J. Appl. Physics, - 1997. – Vol. 81, No.8. - P.4275-4277.
5. Yang S.-Y., Horng H.-E., Hong C.-Y. Structures, Optical Properties and Potentially Electro-Optical Applications of Magnetic Fluid Films // Tamkang Journal of Science and Engineering, – 2002. - Vol.5, No.2. – P. 85-93.
6. Li J., Lin X.-D., Lin Y.-Q., Huang Y., Bai L. Relaxation behavior measuring of transmitted light through ferrofluids film // Applied Physics. B, – 2006. – Vol.82, No.1. – P. 81-84.
7. Chen J., Chen X., Pu S. Realization of optical limiting with a magnetic fluid film // Optics Communications, - 2007. – Vol. 276, No. 2. – P.268-271.
8. Пацегон Н.Ф. Некоторые процессы самоорганизации в намагничивающихся средах // Магнитная гидродинамика, - 1993. - №1. – С.13-23
9. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н., Свириденко С.А. Качественное исследование процессов структурирования магнитной жидкости // Вісник Харк. ун-ту. Математика, прикладна математика і механіка, - 2003. - вип. 52, №582. – С.81-89.
10. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. О равновесной намагниченности магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика, - 1996. - №3. – С.323-330.
11. Patsegon N., Popova L. Wave structures in magnetic fluid // Int. J. Fluid Mech. Res., - 2003. – No. 3. - P.323-336.
12. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Образование и устойчивость пространственных структур в магнитной жидкости // Прикладная гидромеханика, - 2003. – т. 5 (77), №1. – С.62-70.
13. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Статические автосолитоны в магнитной жидкости // Вісник Харк. ун-ту. Математика, прикладна математика і механіка, - 2004. - №645, вып. 4. – С.93-101.
14. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Автоволновые процессы в магнитной жидкости // Прикладная гидромеханика, - 2007. – т. 9, №1. – С.54-65.
15. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны: Локализованные сильно-неравновесные области в однородных диссипативных системах. – М.: Наука, 1991. – 200 с.
16. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1990. - 208 с.
17. Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. – М.: Наука, 1983. – 286 с.