Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 004.925.8:519.688 № 833, 2008, с.222-230

Побудова чотиригранника з використанням "тільки лінійки"

Ю. Л. Подпалов
Харківсьский національний університет ім. В.Н. Каразіна, Україна

The two iterative algorithms of construction of triangles by three given sides without compasses, but by with the ruler with sides sizes indicted on it are considered in the paper. The convergence of one algorithm in case of arbitrary triangle is proved. The examples of each algorithm applications (triangle's height constructions, thrisecting an angle problem solution) is given. The example of the use of the second algorithm is resulted for the construction of spatial body – tetrahedron. These algorithms do not require the calculation of trigonometric functions, decision of nonlinear equalizations. They can present a value for computer geometry at the design of many-sided surfaces and for engineering calculations.

1. Вступ

У класичному розумінні термін "побудова з використанням тільки лінійки" означає, що лінійка застосовують виключно для проведення прямих і вона не має одиниць виміру. Нижче вивчаються алгоритми побудови послідовних наближень до трикутника за вказаними сторонами фактично за допомогою тільки лінійки, однак на яку нанесені відмітки згідно з довжинами сторін – тому у назві цієї роботи стоять лапки.

У роботах [1,2,3,4,5] приведено багато прикладів побудови геометричних фігур при різних обмеженнях що до типу застосованих інструментів. Там розглядаються задачі побудови з використанням тільки циркуля, прямого кута, лінійки з паралельними сторонами і т.п. Якщо точно, то методи, що вивчаються нижче відносяться до методів побудови фігур з використанням лінійки та декількох еталонів, які можуть бути нанесені, наприклад, на цю лінійку.

Ці методи ітеративні і тому можна говорити тільки про побудову фігур з деякою точністю. Ітеративним методам побудов присвячена книга [5]. Там приведені алгоритми побудови дотичної та нормалі до кривої, спрямлення дуги, рішення задачі Аполлонія та ін. Однак, вони розраховані на застосування циркуля або лінійки, або присутності на кресленні хоча б частки кривої другого порядку, або ще щось. При реалізації цих методів на комп'ютері користуються тригонометричними функціями, шукають рішення нелінійних рівнянь

Методи, що пропонуються нижче, потребують тільки лінійки, та декількох еталонів, за допомогою яких можна переносити розміри відрізків. Застосування цих ітераційних процесів в обчислювальній геометрії дозволяє будувати багато різних фігур та тіл з потрібною точністю не проводячи згаданих розрахунків, для яких часто немає надійних алгоритмів.

2. Метод послідовних відрізків.

Проф. А.Д. Милка винайшов несподіваний і красивий в своїй простоті ітеративний алгоритм побудови трикутника по заданих трьох сторонах, який при проведенні креслень на папері дуже швидко збігавсь [6]. Він запропонував автору доказати збіжність цього методу та знайти область його застосування.

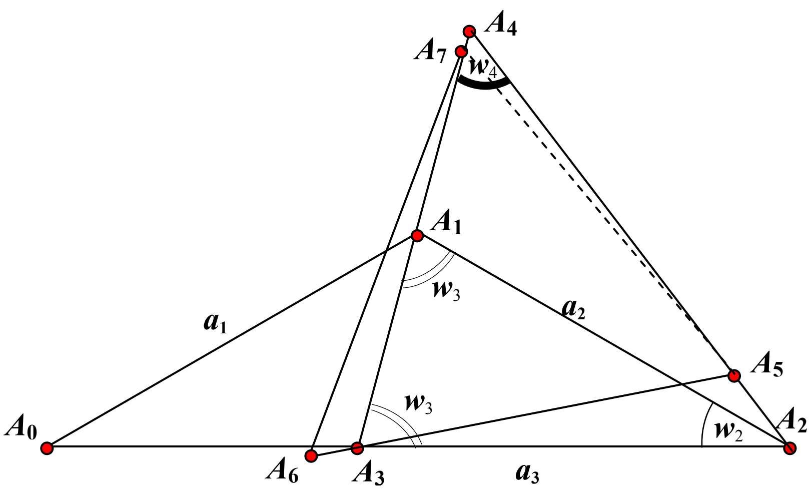
Отже, нехай є лінійка, на яку нанесено три еталони відповідно довжинам сторін $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ деякого трикутника і треба накреслити цей трикутник. Вважатимемо, що за допомогою цієї лінійки ми можемо виконувати слідуючи операції**:** проводити прямі лінії, відкладати від заданої точці відрізок заданої довжини згідно з потрібним еталоном. Окрім того припустимо, що ми можемо порівнювати довжину відрізка з еталоном та відповідати на запитання, чи вона більша за еталон, чи ні.

Перш за все, за допомогою такої лінійки легко перевірити взагалі можливість побудови потрібного трикутника. Для цього треба накреслити пряму, поставити на ній точку, відкласти від неї спочатку найбільшу із сторін, а потім від цієї точки в тому ж напрямку відкласти послідовно інші сторони – наочна перевірка правила трикутника.

Алгоритм побудови трикутника включає наступні кроки.

1-й крок. Проводимо в якому-небудь напрямі відрізок $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1$, довжини $\boldsymbol{a}_1$**.**

2-й крок. Від т.$\boldsymbol{A}_1$ під будь-яким кутом до $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1$ (не рівним 0) проводимо відрізок $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ довжини $\boldsymbol{a}_2$**.**



…

i-й крок. Від т.$\boldsymbol{A}_{i-1}$ у напрямі т.$\boldsymbol{A}_{i-3}$ відкладаємо відрізок $\boldsymbol{A}_{i-1}\boldsymbol{A}_i$ довжини $\boldsymbol{a}_k$, де k=1+(i+2) mod 3 - отримуємо т.$\boldsymbol{A}_i$. і т.д.

На малюнку вище приведено результат сьомі кроків.

Легко бачити, що положення побудованого трикутника залежить як від вибраних напрямків перших двох кроків, так і від числа виконаних ітерацій, що заважає, наприклад, побудувати два трикутника на спільній стороні.

3. Випадок рівностороннього трикутника

Доведемо збіжність цього алгоритму для випадку, коли $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}$.

Після *1-го* та *2-го* кроків побудови і проведення відрізка $\boldsymbol{A_2A_0}$ ми матимемо рівнобічний трикутник $\boldsymbol{A_0A_1A_2}$ з кутом, наприклад, $\boldsymbol{w_2}$ при вершині $\boldsymbol{A_2}$. Після 3-го кроку на стороні $\boldsymbol{A_2A_0}$ з'явиться т.$\boldsymbol{A_3}$ і відрізок $\boldsymbol{A_2A_3}$ довжини $\boldsymbol{a}$**.** Якщо потім побудувати відрізок $\boldsymbol{A_3A_1}$**,** то отримаємо рівнобедрений трикутник $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$, у якого кути при вершинах $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_3}$ рівні $\boldsymbol{w_3= \pi/2\text{-}w_2/2}$. Аналогічно після 4-го кроку отримаємо рівнобедрений трикутник $\boldsymbol{A_3A_4A_2}$ з кутами при вершинах $\boldsymbol{A_4}$ і $\boldsymbol{A_2}$ величиною $\boldsymbol{w_4= \pi/2\text{-}w_3/2 = \pi/2\text{-} \pi /4+w_2/4}$.

Хай, наприклад, $\boldsymbol{w_2<\pi/2}$. Після 7-и кроків матимемо показане вище креслення:

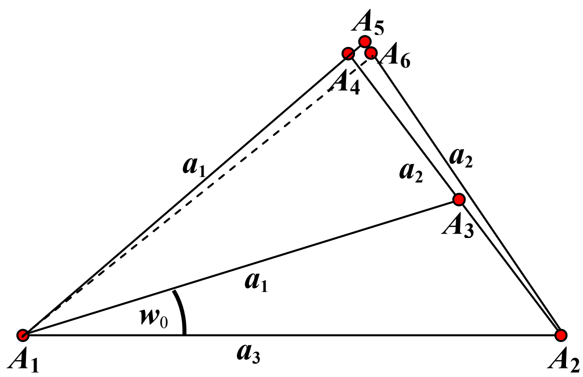
Легко бачити, що $\boldsymbol{w_{i+1}=(\pi\text{-}w_i)}/2$. Це означає, що після N кроків матимемо $\boldsymbol{w_N=\pi/2\cdot(1\text{-}1/2+1/4+\ldots+1/(\text{-}2)^{N\text{-}2}\ )+w_2/(\text{-}2)^{N\text{-}2})}$. У границі цей вираз дорівнює $\boldsymbol{\pi}/3$. Таким чином, можна побудувати рівносторонній трикутник з потрібною точністю.

Якщо, наприклад, почнемо з кута $\boldsymbol{w_2= \pi/6}$, то після 7-ої ітерації у трикутнику $\boldsymbol{A_5A_6A_7}$ кути при вершинах $\boldsymbol{A_5}$ і $\boldsymbol{A_7}$ будуть рівні $\boldsymbol{w_7}\approx 60{,}3°$.

4. Метод частково випадкових напрямів.

Розглянемо тепер інший метод побудови трикутника, який розробили автор та Милка А.Д. незалежно один від одного. Ідея методу полягає в наступному: відкладемо на якійсь прямій одну із сторін, а інші по черзі будемо відкладати то від лівого, то від правого краю в кінець попереднього відрізка поки їх кінці не співпадуть з потрібною точністю (наприклад, з точністю до товщини грифеля).

У своєї суті ця задача зводиться до пошуку точки перетину двох кіл. У роботі [5] (с.47-49) приведено ітеративний алгоритм рішення цієї задачі. Це узагальнений метод дотичних, але він потребує вміння будувати дотичні до кривих на кожному кроці ітерації, що робиться за допомогою циркуля. Ми пропонуємо значно простіший метод.



Алгоритм побудови включає наступні кроки.

1-й крок. Будуємо горизонтально відрізок $\boldsymbol{A_1A_2}$, довжини $\boldsymbol{a_3}$ (наприклад).

2-й крок. Під кутом $0<w_0<\pi$ до нього проведемо відрізок $\boldsymbol{A_1A_3}$, довжини $\boldsymbol{a_1}$.

3-ий крок. Від т.$\boldsymbol{A_2}$ у напрямі т.$\boldsymbol{A_3}$ відкладемо відрізок довжини $\boldsymbol{a_2}$ – отримаємо т.$\boldsymbol{A_4}$.

4-ий крок. Від т.A_1 у напрямі т.A_4 відкладемо відрізок довжини a_1 – отримаємо т.A_5.

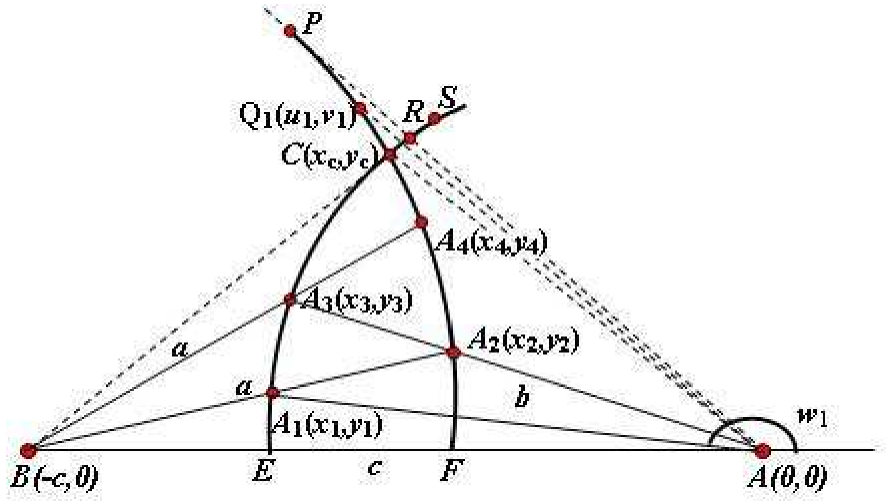
...

і-ий крок. Від т.A_k, де $k=1+i \bmod 2$ у напрямі к.A_{i-1} відкладемо відрізок A_kA_{i-1} довжини a_k - отримаємо т.A_{i+1}.

5. Доказ збіжності методу частково випадкових напрямів.

Для зручності далі будемо використовувати назви сторін a, b, c.

Нехай відрізок AB має довжину c, будемо шукати місце знаходження т.C перетину двох кіл радіусів a і b з центрами в т.B і в т.A відповідно. Оскільки доказ буде спиратися на креслення, то треба розглядати всі можливі варіанти, що виникають при різних співвідношеннях довжин сторін a, b, c, взаємного розташуванні центрів кіл, та величини початкового кута w_1. Розглянемо тільки два, бо в інших випадках доказ аналогічний.



Хай, наприклад, $c>a$, $c>b$ ($a+b>c$), тоді абсциса т.C знаходитиметься десь на відрізку EF між двома дугами. Перший промінь будемо проводити з т.A під кутом $0<w_1<\pi$ до прямої AB. Нехай BS – дотична з т.B до правого кола. Тоді в загалі кажучи, досить розглянути випадок, коли $w_s<w_1<\pi$, де w_s – кут нахилу радіуса AS до основи. Згідно з алгоритмом проведемо радіус AA_1 під цім кутом w_1. Принциповим тут буде положення т.A_1: не вище за т.C; вище за т.C, але не вище за т.R – точку перетину дотичної із т.A до лівого кола. На наступним кроці проведемо радіус в напрямі променя BA_1 - отримуємо т.$A_2(x_2,y_2)$. Проводячи радіус в напрямі променя AA_2 отримуємо т.$A_3(x_3,y_3)$ і т.д.

Випадок 1. Пряма AA_1 проходить нижче за т.C. перетину кіл. Тоді отримавши на другому кроці т.$A_2(x_2,y_2)$ маємо $y_2=y_1 \cdot a/BA_1$. Так як $a>BA_1$, то $y_1<y_2$. Аналогічно після *3-го* кроку отримаємо т.$A_3(x_3,y_3)$ і $y_1<y_2<y_3$. Таким чином, в результаті роботи алгоритму ми отримуємо члени нескінченно зростаючій послідовності y_i, кожен з яких обмежений величиною y_c. Отже, послідовність має границю і вона співпадає з y_c.

Дійсно, припустимо протилежне – границя досягнута раніше, чим в т.$\boldsymbol{C}$. Тоді алгоритм дозволяє будувати наступні члени зростаючої послідовності, що не можливо за припущенням.

Випадок 2. Хай кут $\boldsymbol{w_1}$ такий, що пряма $\boldsymbol{AQ_1}$ проходить вище за т.$\boldsymbol{C(x_c,y_c)}$, але нижче за дотичну $\boldsymbol{AP}$. Тоді діючи по алгоритму ми отримуємо послідовність точок, що "рухаються" по відрізках $\boldsymbol{SC}$ та $\boldsymbol{PC}$. Міркуючи як і у попередньому випадку отримуватимемо члени послідовністі $\boldsymbol{v_i}$, що нескінченно зменшуються і кожен з яких більше ніж $\boldsymbol{y_c}$. Отже, і в цьому випадку алгоритм приведе до т.$\boldsymbol{C}$ перетину кіл і рішення поставленої задачі.

При інших співвідношеннях довжин сторін, відстанях між центрами та початкових кутах будемо одержувати інші обмежені послідовності, що також збігаються.

6. Інші побудови.

Треба зауважити, що програмна реалізація вказаних алгоритмів не зовсім співпадає з тим, що ми робимо за допомогою лінійки та олівця. На папері еталони дозволяють тільки порівнювати довжини відрізків, але не міряти їх. При програмуванні ми маємо діло з координатами точок и отже є можливість обчислювати відстані поміж ними. Тому, щоб провести відрізок заданої довжини від т.$\boldsymbol{A}$ в напрямі т.$\boldsymbol{B}$, можемо розрахувати проекції нової точки використовуючи відношення поміряної довжини відрізка $\boldsymbol{AB}$ до його еталону. Таким чином, програмна реалізація залишає незмінним тільки сам ітераційний процес.

Важливо також ще те, що програми дозволяють запам'ятовувати одержані при побудові проміжні розміри та використовувати їх далі, як додаткові еталони. Головне при розробці алгоритмів те, що кількість еталонів має бути скінченою. Вміючи будувати трикутники можна легко будувати різні фігури (ромби, правильні багатокутники, ..), різні елементи трикутника (висоти, медіани, ..), можна ділити відрізок в потрібнім співвідношенні та ін.

Наприклад, для побудови висоти на якусь сторону в накресленому трикутнику треба побудувати такий само трикутник по другу сторону вказаної сторони та з'єднати потрібні вершини - отримуємо висоти обох трикутників.

Для того, щоб поділити якійсь відрізок на **N** рівних частин, можна побудувати на ньому, як на основі рівнобічній трикутник, бічні сторони якого складені з **N** рівних відрізків. Відстань між кінцями останні двох відрізків, що перетинаються в вершини цього трикутника й буде той, що ми шукаємо.

7. Трисекція кута.

В роботі [5] (с.50-52) приведено ітеративний алгоритм розв'язання цієї відомої ще з давнини задачі, але він потребує циркуля та лінійки. Ми запропонуємо евристичний алгоритм ділення кута використовуючи побудову деяких трикутників та застосовуючи відомий з чисельного аналізу "метод ділення навпіл", який швидко збігається.

Зрозуміло, що достатньо розглянути алгоритм ділення на три частини кута, якій менший за розгорнутий кут.

Отже, нехай маємо трикутник ***BOC***, якому відповідає круговий сектор ***BOC*** радіуса ***r***, причому ***OB=OC=r***, ***BC=a.*** Позначимо кут при вершині т.***O*** через *3α,* де $0<3\alpha<\pi$.

Нехай на радіусі ***OC*** побудовано трикутник ***OCE***, у якого вершина ***E*** належить дузі ***BC*** і довжина хорди ***EC = l***. Якщо потім на цьому трикутнику послідовно побудувати один на одним ще два таких само трикутника, то сукупність цих трикутників будемо називати *пакетом*. Хорду ***EC*** назвемо - *твірною пакету*. Суму кутів трикутників при його вершині ***O*** будемо називати *кутом пакету*. Він виміряється дугою, хорду ***d*** якої будемо називати *хордою пакета*.

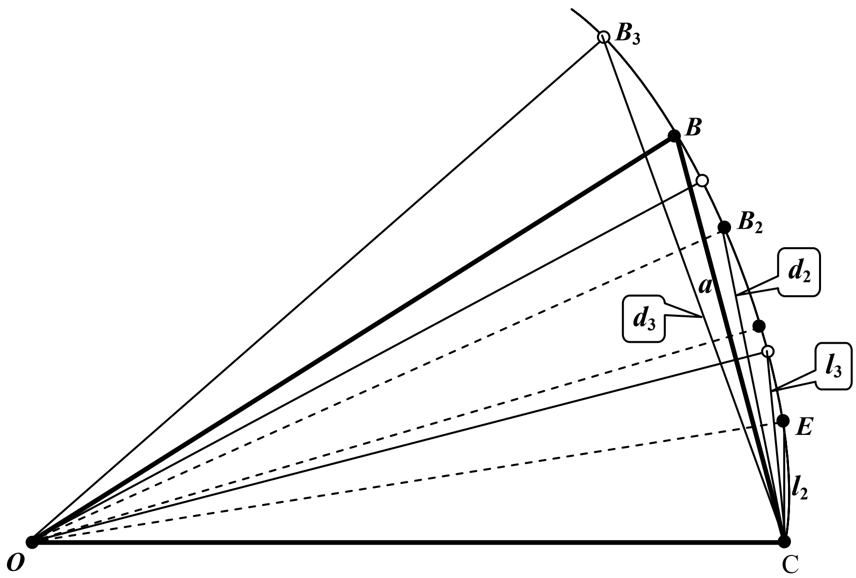
Для ділення $\angle COB$ на три частини пропонуємо ітераційний процес, при якому генерується послідовність пакетів, довжини хорд яких збігається до довжини ***a*** хорди ***CB.***

Побудуємо два пакета, причому для першого пакету візьмемо твірну довжиною $l_1=a/3$. Легко довести, що кут $\angle COB_2$ цього пакету менший за $\angle COB$, який ми ділимо. Позначимо довжину хорди цього пакету через d_1.

Для другого пакету візьмемо твірну довжиною твірної $l_2=r$. Тоді кут цього пакету дорівнює розгорнутому куту і він за умовою більшій за $\angle COB$. Довжина хорди цього пакета дорівнює $d_2=2r$ (діаметр кола).

Таким чином, для твірної пакету ми знайшли інтервал $[l_1, l_2]$, на якому знаходиться рішення задачі і далі будемо зменшувати його поступово ділячи навпіл.

На наступним кроці побудуємо пакет ***COB***$_3$, довжина твірної якого дорівнює $l_3=(l_1+l_2)/2$. Позначимо довжину хорди цього пакету через d_3.



Далі, розглядаються два випадки.

Як що $d_3>a$, то рішення шукають на інтервалі $[l_1, l_3]$ і довжина нової твірної дорівнює $l_4=(l_1+l_3)/2$. В другому випадку треба розглядати інтервал $[l_3, l_2]$ і довжину $l_4=(l_3+l_2)/2$. В обох випадках новий інтервал в два рази менший за попередній

Діючі так само далі, отримуємо $l_5, l_6,\dots, l_i$ і відповідно - $d_5, d_6,\dots ,d_i$. Процес зупинимо коли буде виконана умова $|d_i-a|<\varepsilon$, де ε – потрібна точність.

Зрозуміло, що так само конструюючи пакет з m трикутників можна ділити кут на m рівних частин.

8. Побудова чотиригранника.

Викладені вище алгоритми можна використати і для побудови каркасів тіл. Якщо раніше можна було говорити тільки про ”уявну побудову” у просторі, то зараз застосовуючи комп'ютер можна обчислювати параметри геометричних об’єктів та реально показувати на дисплеї їх проекції на площину. В роботі [1] (с.200-203) запропонована ціла система постулатів теорії геометричних побудов у просторі, в яку входить можливість проведення прямої через дві точки; площини – через три точки; можливість запроваджувати в побудованій площині різні дії; можливість побудови ліній перетину площин та сфер між собою. Реалізація останньої можливості в комп’ютерної геометрії потребує громіздких алгоритмів. Наприклад, щоб знайти координати вершини чотиригранної піраміди при заданих координатах основи та довжин ребер, потрібно знайти точку перетину трьох сфер загального положення, а це пов’язано з системою нелінійних рівнянь. Алгоритм що пропонуються цього не потребує, до того ж він простий в програмуванні.

За допомогою лінійки з еталонами можна перевірити саму можливість побудови чотиригранника за вказаними шістьма ребрами. Спочатку перевірити можливість побудови кожної грані, а потім - кожного з тригранних кутів. У загальному випадку для цього досить для кожної вершини накреслити грань з максимальним плоским кутом, що примикає до цієї вершини, і на ній за допомогою другого методу побудувати розгортку з граней, що залишилися. Так можна перевірити правіло, що сума двох плоских кутів тригранного кута повинна бути більшою за третій кут. Якщо побудувати тригранний кут, то на його променях можна відкласти довжини трьох відповідних ребер, а потім перевірити збіг довжин інших сторін з еталонами.

Отже, нехай треба побудувати чотиригранну піраміду $SOAB$ (S - вершина) за шістьма сторонами. Так як у всіх гранях чотиригранної піраміди може бути не менш як 8 гострих кутів, то знайдеться вершина (наприклад A), з двома гранями (наприклад SAO та OAB), кожна з котрих має гострий кут.

Нехай після перевірки ми знаємо, що цей тригранний кут побудувати можна. Алгоритм його побудови засновано на пошуку слідів перетину граней кута з площиною, що перпендикулярна до ребра OA. Нехай грань OAB є основою піраміди $SOAB$.

Можна запропонувати наступний алгоритм побудови:

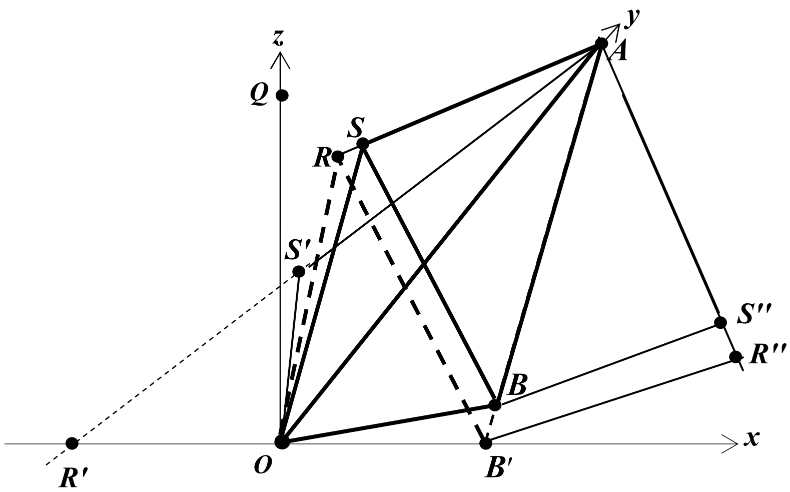
1) На осі Oy, відкладемо згадане ребро OA.

2) Побудуємо на ній трикутник OAB, що, як ми знаємо, можна зробити з потрібною точністю.

3) В тій же площині xOy по другу сторону від OA побудуємо суміжну грань OAS' – отримаємо розгортку $OBAS'$, що включає в себе грань основи та одну бічну грань.

4) Так як обидва кута розгортки коло вершини A – гострі, то можна знайти точки перетину B' та R' променів AB та AS' з віссю Ox відповідно OB' та OR'

Відрізки OB' та OR'– це відрізки, що відтинає від ребер трикутного кута A площина xOz, котра перпендикулярна до ребра OA. Запам'ятаємо довжини цих відрізків, як додаткові еталони.



5) На стороні AB в тій же площині xOy побудуємо трикутник ABS'' – останню грань тригранного кута A ($AS'=AS''$).

6) На промені AS'' відкладемо відрізок AR'' довжиною AR'. Тоді трикутник $AB'R''$ є той трикутник, що координатна площина xOz відтинає від останній грані тригранного кута A. Відрізок $B'R''$ запам'ятаємо, як ще один еталон.

7) Візьмемо т.$Q(0,0,h)$, де $0<h<\infty$, тоді відрізки OB', OR' та OQ знаходяться в площині перерізу тригранного кута.

8) Побудуємо в ній трикутника ORB', де $RB=OR'$ і $RB'=R''B'$

9) Залишилось на промені AR відкласти відрізок AS, довжина якого дорівнює довжини третього ребра кута AS'', побудувати ребра SO та SB і побудова піраміди $SOAB$ закінчена.

Легко доказати, що всі шість ребер, які однозначно задають чотиригранну піраміду ми побудували з потрібною точністю. Дійсно, з потрібною точністю будуються трикутники OAB, OAS', ABS'' а отже і OAR' і OAB'. Прямокутні трикутники AOR и AOR' рівні, бо рівні катети; трикутники ARB' и $AR''B'$ рівні по трьох сторонах. $AS=AS'=AS''$ - так будували. З потрібною точністю будується трикутник ORB', на промені AR якого визначили положення вершини S. Таким чином, всі шість ребер дорівнюють заданім еталонам (з певною точністю).

9. Підсумок.

Згадані вище алгоритми були програмно реалізовані автором в середах Delphi та VBA. Винайдено декілька узагальнень алгоритмів побудови трикутників на тримірний простір. За допомогою відповідних програм будувались каркаси не тільки тетраедра, але і більш складних тіл - куба, октаедра, ікосаедра.

У всіх побудовах не використовувались тригонометричні функції, не шукались корні рівнянь.

Зауважимо, що при реалізації на комп'ютері операції проведення відрізка довжини $\boldsymbol{l}$ в напрямку $\boldsymbol{AB}$ використовується операція знаходження кореня для обчислення довжини $\boldsymbol{AB}$. Цього можна уникнути, якщо методом ділення навпіл шукати корінь рівняння $\boldsymbol{f^2(A, B, x_C) - l^2=0}$, де функція $\boldsymbol{f}$ це відстань від т.$\boldsymbol{A}$ до т.$\boldsymbol{C}$ в напрямку $\boldsymbol{AB}$. Таким чином, побудову трикутника можна робити використовуючи тільки раціональні операції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Общие принципы геометрических построений // Энциклопедия элемент-тарной математики – 1966 –т.4, С.160-203.
2. Текше К. Замечание к теории геометрических построений.// Математическое просвещение - 1959 г.-. т.4. С.197-204.
3. Адлер Август. Теория геометрических построений – Ленинград: 1940. – 230 с.
4. Четверухин Н.Ф. Методы геометрические построений.-М.: Учпедгиз, 1952.-147 с.
5. Четверухин Н.Ф. Геометрические построения и приближения.-М.1935
6. Мілка А.Д. Формулювання задачі, обговорення //Фізико-технічний інститут низьких температур НАН України. 2006.