

## Построение и анализ математической модели неустойчивости волны конечной амплитуды с учетом дополнительных взаимодействий

Е. В. Белкин

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

The mathematical model of instability of the finite-amplitude wave in non-linear medium is constructed using the Lighthill equation. The interactions between modes of arising instability spectrum are taken into account. The correctness of the created mathematical model is shown. In order to make the analysing process more effective the special program algorithms and mathematical methods are applied.

### 1. Общая постановка задачи и ее актуальность

Распространение интенсивных квазимонохроматических волн в средах с кубической нелинейностью, приводит к развитию модуляционных неустойчивостей [1] и сопровождается возбуждением боковых спектров возмущений [1,2]. Особый интерес представляют режимы возбуждения достаточно плотных спектров возмущений, результатом которых может быть появление в нелинейной среде областей с аномально большой интенсивностью волнового поля. Для целей технического назначения и исследования реальных объектов и явлений представляет значительный практический интерес определение их характерных размеров, максимальной интенсивности и частоты появления. В частности, результаты анализа разрабатываемых моделей могут оказаться полезны при разработке систем транспортировки СВЧ энергии и лазерного излучения в оптических волноводах [3]. Как известно [4], всплески модуляции могут иметь интенсивность, на порядок превосходящую интенсивность распространяющего излучения. Аномальные всплески волнового поля могут быть причиной разрушения подобных волноводов и способны определять эффекты самомодуляции волновых пакетов. Другим применением модели может быть прогнозирование появления аномальной модуляции волнового поля при распространении волн в различных нелинейных средах [5], в частности на поверхности жидкости [6,7].

В работах [8,9,10,11] рассматривалась простая модель процесса распада волны большой амплитуды в предположении близости системы к порогу неустойчивости, характеризующейся высоким уровнем диссипации. Данное ограничение позволило исключить из рассматриваемой модели взаимодействие мод спектра возмущений ввиду их малости по сравнению с амплитудой основной волны. Рассмотрение предложенной в [11] модели при более сильном превышении порога неустойчивости находится за границей ее применимости, так как интегральная интенсивность мод возбуждаемого спектра возмущений может оказаться сравнимой с интенсивностью основной волны.

Целью данной работы является построение и анализ уточненной математической модели неустойчивости, которая выделяет основные физические эффекты при распаде (неустойчивости) волн большой амплитуды. Уточнение модели по сравнению с моделью, предложенной в [10,11] состоит в учете наиболее эффективных взаимодействий, которые происходят между симметричными (по отношению к основной волне) модами спектра. Это позволяет исследовать эффекты неустойчивости при малых уровнях поглощения, а также провести верификацию приведенных в работах [10,11] приближений.

Для анализа и оптимизации модели применен ряд методов математического моделирования и объектно-ориентированного программирования, описанные в данной работе, разработано программное обеспечение, реализующее процесс моделирования и автоматизирующее процесс анализа данных, полученных в процессе вычислительных экспериментов.

## 2. Построение модели

Введем обозначения, используемые в рассматриваемой модели.

Рассмотрим уравнение волновых возмущений Лайтхилла [1]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\delta E - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - iE |E|^2 + G \quad (1)$$

где  $\delta$  – декремент затухания колебаний,  $G$  – внешний источник, поддерживающий монохроматическую волну конечной амплитуды.

По аналогии с [10] представим поле как сумму большого числа мод с разными волновыми числами и одной частотой.

$$E = \sum_k E_k(t) \cdot \exp\{ikx - i\omega_0 t\} \quad (2)$$

где  $\omega_0$  – частота,  $k$  – волновое число,  $t$  – нормированное время,  $x$  – нормированная координата,  $E_k = u_k \cdot \exp\{i\varphi_k\}$  – комплексная амплитуда волны, с волновым числом  $k$  и содержащая фазу  $\varphi_k$  и вещественную амплитуду  $u_k$ .

Получение дифференциальных уравнений производится по методу, приведенному в [10], принимая во внимание дополнительные взаимодействия между модами спектра, волновые числа которых определяются выражением  $k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$  и не используя симметричность задачи.

Заметим, что необходимым условием развития неустойчивости в поглощающей среде является наличие источника энергии  $G$ , поддерживающего основную волну.

Проделав необходимые вычисления, получаем систему уравнений, описывающую процесс неустойчивости волны конечной амплитуды в модели волновых возмущений Лайтхилла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}u_0 = -u_0 \left\{ \delta + 2 \sum_{m>0}^N u_{-m} u_m \text{Sin} \Phi_m \right\} + G; \\ \frac{d}{dt}\varphi_0 = -(u_0^2 + 2 \sum_{m>0}^N (u_m^2 + u_{-m}^2) + 2 \sum_{m>0}^N u_{-m} u_m \text{Cos} \Phi_m); \\ \frac{d}{dt}u_s = -\delta u_s + u_0^2 \text{Sin} \Phi_s + 2u_s \sum_{\substack{n \neq s \\ n > 0}}^N u_{-n} u_n \text{Sin} \Psi_{sn}; \\ \frac{d}{dt}\varphi_s = K_s^2 - 2[u_0^2 + \frac{1}{2}u_s^2 + u_{-s}^2 + \sum_{\substack{n \neq s \\ n > 0}}^N (u_n^2 + u_{-n}^2)] - \\ - \frac{u_{-s}}{u_s} (u_0^2 \text{Cos} \Phi_s + 2 \sum_{\substack{n \neq s \\ n > 0}}^N u_{-n} u_n \text{Cos} \Psi_{sn}); \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\Psi_{sn} = \Phi_s - \Phi_n$ ;  $\Phi_n = 2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}$ ;  $K_s = k_s - k_0$ ;  $s, n = \mathbf{Z} \cap [-N, N]$ ;  $n, s \neq 0$ ;

Начальные условия, исходя из физических соображений, определяются следующими выражениями:

$$\begin{array}{ll} u_0|_{t=0} = 1; & u_n|_{t=0} = F_{N(u^*, \sigma)}; \\ \varphi_0|_{t=0} = 0; & \varphi_n|_{t=0} \in F_{R[0; 2\pi)}; \\ \delta \in (0; 1]; & g \in [0; 1]; \end{array} \quad (4)$$

где  $F_{N(u^*, \sigma)}$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $u^*$  и  $\sigma$ , на которую наложены ограничения  $F_{N(u^*, \sigma)} > 10^{-5}$  и  $N \cdot (MF_{N(u^*, \sigma)})^2 \sim 1$ ;  $F_{R[0; 2\pi)}$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0; 2\pi)$ .

Волновые числа  $k_n$  выбираются таким образом, чтобы

$$(1 - \sqrt{1 - \delta}) < K_n^2 < (1 + \sqrt{1 - \delta}), \quad (5)$$

обеспечивая при этом учет всех возможных мод неустойчивости.

Поле колебаний волнового процесса, описывающее модулированную волну удобно представлять в движущейся со скоростью волны системе координат  $\xi, t$  [11]:

$$\begin{aligned} E(\xi, t) = & \exp \{-ik_0(\xi + 2k_0 t) + i\varphi_0(t)\} \cdot \\ & \cdot \{u_0 + \sum_{m>0}^N [u_m \exp \{-iK_m \xi + i[(\varphi_m - \varphi_0) - 2K_m \cdot k_0 t]\} + \\ & + u_{-m} \exp \{iK_m \xi + i[(\varphi_{-m} - \varphi_0) + 2K_m \cdot k_0 t]\}] \} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\xi = x - 2k_0 t$  – замена переменных, необходимая для перехода в движущуюся систему координат.

### 3. Корректность модели.

Рассмотрим модель (3) на соответствие общепринятым условиям корректности моделей, а именно, докажем существование и единственность решения, а также проведем анализ устойчивости модели.

В работе [12] показано, что разность амплитуд мод с симметричными индексами, волновые числа которых удовлетворяют условию (5), экспоненциально стремится к нулю, причем их сумма при этом растет. Из чего следует, что частное амплитуд симметричных мод, присутствующее в четвертом уравнении системы (3) становится равным единице, что подтверждается многократным численным экспериментом, проведенным с различными начальными значениями амплитуд мод.

Для доказательства существования решения покажем, что система (3) удовлетворяет условиям теоремы 2.6 [13] (существования).

Рассмотрим функцию  $f_0(t, u_{-N}, \dots, u_N, \varphi_{-N}, \dots, \varphi_N)$ :

$$f_0(t, u_{-N}, \dots, u_N, \varphi_{-N}, \dots, \varphi_N) = -u_0 \left\{ \delta + 2 \sum_{m>0}^N u_{-m} u_m \sin \Phi_m \right\} + G; \quad (7)$$

Функция  $f_0$ , определенная на  $\mathbf{R}^{2N+3}$ , является непрерывной в области  $\mathbf{R}^{2N+3}$  как сумма и произведение непрерывных в этой области функций и констант.

Легко видеть, что частные производные  $\frac{\partial f_0}{\partial u_n}$  и  $\frac{\partial f_0}{\partial \varphi_n}$  также непрерывны в  $\mathbf{R}^{2N+2}$

для любого  $n \in \mathbf{Z} \cap [-N, N]$ . Очевидно, что остальные функции, стоящие в правой части уравнений системы (3) непрерывны вместе со своими частными производными по всем переменным системы. Согласно теореме 2.6 [13] система (3) имеет решение и оно единственно в области  $\mathbf{R}^{2N+3}$

### 4. Вычислительный эксперимент.

Модель (3) представляет собой систему из  $2N+2$  дифференциальных уравнений первого порядка, которая может быть решена методом Рунге-Кутты.

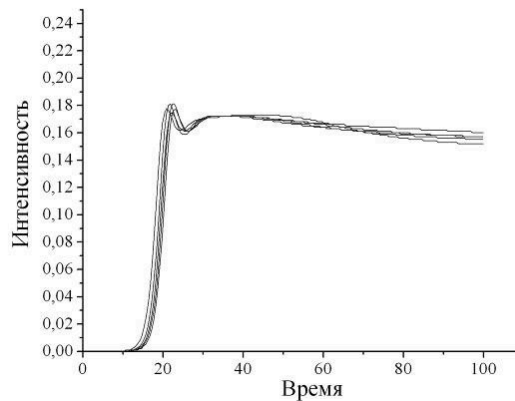


Рис.1. Интенсивность спектра неустойчивости при различном количестве степеней свободы

Проверка устойчивости вычислительного алгоритма может быть проведена путем сравнения интегральных показателей решения при различных начальных условиях [14]. На рис. 1 приведены значения интенсивности мод возбуждаемого спектра при различном количестве степеней свободы.

Из рис. 1 видно, что решение слабо меняется при изменении начальных данных. Аналогичная картина наблюдается при малом изменении параметра  $\delta$ . При этом можно декларировать устойчивости системы (3), показанную в результате многократного численного эксперимента.

Частичную проверку модели на адекватность можно выполнить, проверив очевидные предельные случаи. Так, например, из физической интерпретации модели и теоретических рассуждений следует, что при отключении внешнего источника энергии процесс с ненулевым поглощением энергии должен угаснуть. На рис. 2, приведен график суммарной интенсивности всей структуры от времени, полученный в результате эксперимента, во время которого внешний источник был отключен ( $G := 0$ ) на времени  $\tau = 40$ . Как видно из иллюстрации, после отключения внешнего источника, суммарная интенсивность устремляется к нулю, что согласуется с ожиданиями.

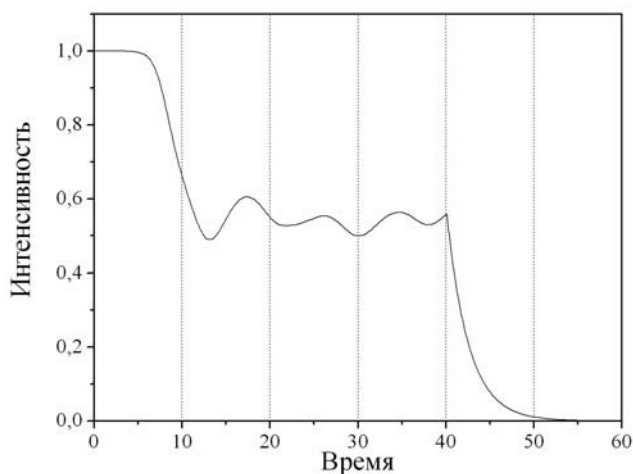


Рис. 2. Интегральный показатель интенсивности системы с отключенным внешним источником в точке  $t=40$

Вторым предельным случаем может служить исключение притока и оттока энергии. При этом рассматриваемая открытая система станет консервативной, а, следовательно, ее внутренняя энергия обязана оставаться неизменной, хотя перераспределение энергии между структурами может иметь место. На рис. 3 кривыми показана общая интенсивность, интенсивность основной волны и интенсивность спектра. При  $\tau = 40$  было произведено отключение внешней накачки одновременно с отключением внутреннего поглощения. Из иллюстрации видно, что суммарная энергия осталась неизменной. В тоже время наблюдается перераспределение энергии от основной волны, лившейся энергетической поддержки, к энергии спектра побочных колебаний. Приведенное наблюдение говорит о непротиворечивости модели закону сохранения энергии, который является интегралом системы. Заметим, что

данный предельный случай является идеализированным и служит для проверки математических выкладок.

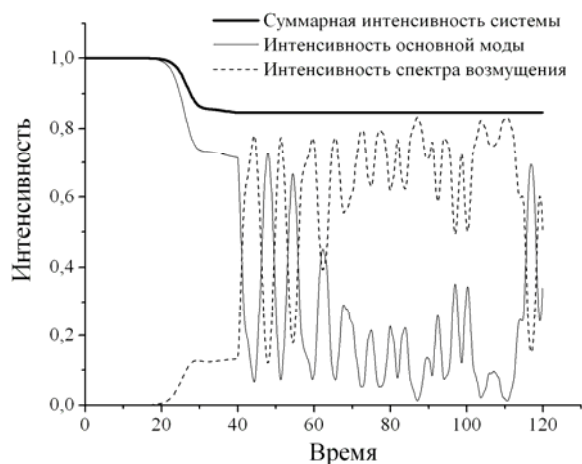


Рис. 3. Сохранение внутренней энергии системы при отключении внешнего источника энергии и поглощения среды в момент времени  $t=40$ .

Учитывая, что начальные условия системы заданы в виде случайных величин, для эффективного исследования моделируемого процесса необходим репрезентативный объем статистических данных, что в свою очередь связано с многократным повторением вычислений. В данных условиях вопрос об эффективности процесса вычислений становится тем актуальнее, чем большее количество уравнений задействовано в системе. Вследствие учета взаимодействия мод возбуждаемого спектра друг с другом, «вычислительная стоимость» (понимаемая как количество элементарных математических операций, которые необходимо выполнить) данной модели растет как квадрат числа мод. Так, например, количество умножений вещественных чисел составляет порядка  $8N^2$  на каждом шаге моделирования. С целью уменьшения времени, затрачиваемого на проведение одного эксперимента, был применен и проверен метод исключения неактивных мод, подробно описанный в [10].

### 5. Автоматизация процесса получения статистических данных

Получение достаточного количества статистических данных при вариации параметров связано с многократным повторением вычислительного эксперимента. Для автоматизации данного процесса была поставлена задача разработки алгоритма для автоматического сбора данных, позволяющего легко осуществлять набор данных в случае многократно повторяющихся экспериментов или серий из многократно повторяющихся экспериментов.

Для решения поставленной задачи был спроектирован шаблон модуля сбора статистики в виде базового класса `TCustomStatCollector`, предоставляющего набор виртуальных методов для взаимодействия между модулем сбора статистики и вычислительным модулем и набор необходимых полей-указателей для доступа к данным вычислительного модуля. Базовым классом также предоставляются такие общие методы как: экспорт полученной информации в

общепринятые форматы (.xls, .csv), внутреннее временное хранилище данных и общие методы работы с ним. Виртуальные методы имеют реализацию в базовом классе в виде «заглушек» для предотвращения сбоев при отсутствии реализации метода в классе-потомке. Диаграмма базового класса представлена на рис. 4.

Класс сбора и/или обработки данных, обязан являться потомком базового класса, и может перекрывать необходимые ему функции базового класса, для реализации необходимой программной логики сбора данных. Объект сбора имеет полный доступ к данным вычислительного модуля посредством ссылок на адреса данных. Установка значений указателей производится вычислительным модулем при создании экземпляра класса. Такой подход предоставляет обработчику возможность контролировать и при необходимости изменять параметры вычислений, вносить поправки к данным или, например, вносить шумовые эффекты. Риск, связанный с предоставлением полного доступа к данным оправдывается открывающимися при этом возможностями и должен быть принят во внимание разработчиком.

В том случае, если в схеме обработки нет необходимости изменения вычислительных данных, разработчик может наследовать свой класс от класса TProtectedCustomStatCollector, который является потомком базового класса. В данном классе реализована инкапсуляция вычислительных данных и предоставлены методы для доступа к ним в режиме «только чтение» Этот подход является более защищенным, однако необходимо принять во внимание, что при большом количестве обращений к исходным данным вызов методов может повлиять на скорость обработки.

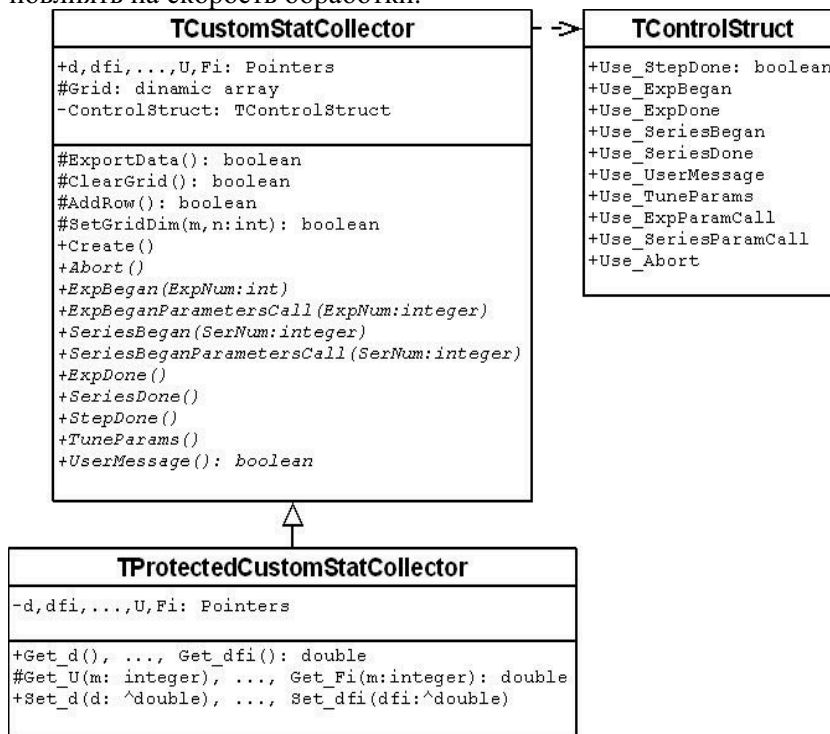


Рис.4. Структура базового класса сбора статистики.

Взаимодействие вычислительного модуля с объектом конкретного класса сбора данных осуществляется путем вызова на определенных этапах моделирования методов базового класса, соответствующих данному этапу. Вследствие виртуальности методов базового класса будет вызван метод класса-потомка, если в нем было реализовано перекрытие.

Базовый класс также предоставляет управляющую структуру, посредством которой определяется набор методов, задействованных в конкретной реализации класса-потомка. Структура создана с целью исключения ненужных вызовов виртуальных методов, поскольку каждый такой вызов занимает время. Структура должна быть заполнена при создании экземпляра класса. По умолчанию все вызовы отключены. В том случае, если разработчик по какой-либо причине задействует метод, который не будет реализован в данном классе, в соответствии с правилами полиморфизма будет вызван метод класса-предка вплоть до базового класса.

Использование предложенного класса позволяет разрабатывать новые модули обработки данных, не реализовывая при этом механизм связи с алгоритмом расчетов, так как эти механизмы предоставляются классом. Тем самым снижаются трудозатраты на реализацию новых модулей.

К таким модулям можно отнести, например, модуль поиска и классификации всплесков поля, который, оперируя большим объемом исходных данных, в результате применения встроенных алгоритмов выдает на выходе простую статистическую информацию о найденных всплесках.

Описанная схема также дает возможность автоматизировать многократное повторение экспериментов с целью набора статистики, сведя к минимуму вмешательство исследователя в процесс.

#### **6. Автоматизация обнаружения аномальных всплесков**

Результатом развития спектра неустойчивости является модуляция поля основной волны, при котором в некоторых случаях могут наблюдаться всплески аномальной амплитуды. Для эффективного изучения возможных причин явления необходимо получить статистическое распределение амплитуд максимальных всплесков поля.

Для эффективного поиска и локализации максимального всплеска поля предлагается двухэтапный метод анализа расчетных данных. На первом этапе при помощи расчетных формул и сравнивающих алгоритмов отыскивается возможная область локализации всплеска. На втором – проверяются узкие области поля, которые были определены на первом этапе, на предмет наличия в них всплесков, а также измерение размаха амплитуды найденных эффектов.

Первый этап реализован исходя из предположения о том, что всплески могут наблюдаться в месте совпадения фазы двух и больше мод имеющих значимую амплитуду. Значимая амплитуда понимается как амплитуда, превышающая среднее начальное значение  $u^*$  более чем в 2 раза. Фаза  $n$ -ой моды  $\phi_n$  в движущейся системе координат  $(\xi, t)$  определяется следующим выражением:

$$\phi_n = -K_n \xi + [(\varphi_n - \varphi_0) - 2K_n \cdot k_0 t] \quad (8)$$



Тогда, принимая во внимание условия совпадения двух фаз  $\phi_1 = \phi_2$ , получаем точку совпадения  $\xi_{1,2}$

$$\xi_{1,2} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) + 2k_0 t(K_1 - K_2)}{K_2 - K_1} \quad (9)$$

На основании выражения (9) получаем точки совпадения для всех пар значимых мод.

Второй этап основывается на более тщательном анализе области возможной локализации. Для этого рассматриваются интервалы  $[\xi_{m,n} - \frac{2\pi}{k_0}; \xi_{m,n} + \frac{2\pi}{k_0}]$  и с

малым шагом  $\Delta\xi < 100 \frac{2\pi}{k_0}$ , обеспечивающим анализ 100 точек в области одной

длины волны (что является достаточным для определения положения пика в данной задаче), рассчитываются значения волнового поля (6) в заданном интервале. Полученные значения размаха амплитуды сравниваются с предыдущими максимальными значениями. В случае если найденный всплеск является максимальным по эксперименту или по серии экспериментов, условия, при которых он был получен, сохраняются, обеспечивая тем самым возможность исследователю визуализировать поле в окрестности всплеска. Данным модулем параллельно ведется статистика частот появления всплесков определенной амплитуды.

Ввиду относительной сложности вычисления выражения (6) двухэтапный метод представляет существенный выигрыш в скорости по сравнению с прямым пошаговым анализом поля, особенно в случае большого числа степеней свободы  $N$ . Так, анализ поля путем полного поточечного вычисления и сравнения значений функции (6) в случае  $N=100$  занимает 0.08 секунд, тогда как применение двухэтапного метода позволяет выполнить такой же анализ, используя те же вычислительные средства за 0.0017 секунд, что обеспечивает выигрыш в скорости более чем в 40 раз. Было проведено 50 экспериментов, при которых сравнивались результаты поточечного метода и вышеописанного двухэтапного метода. Полученные точки максимальных всплесков поля (6) совпадали с точностью до  $4\Delta\xi$  в 100% случаев, что говорит о применимости двухэтапного метода для задачи поиска всплесков в моделировании модуляционной неустойчивости

Ускорение процесса анализа позволило производить поиск всплесков во время моделирования, вызывая процедуру через заданное количество временных шагов. Частота вызова зависит от необходимой точности поиска. Использование разработанного метода позволило зафиксировать эффект, представленный ниже на рис. 6.

## 7. Результаты моделирования, наблюдаемые эффекты

На рис. 5 приведены две пары кривых, иллюстрирующих поведение интенсивности возбужденного спектра в разных моделях (с учетом взаимодействия мод спектра неустойчивости и без него) для двух значений  $\delta = 0.9$  (нижняя пара) и  $\delta = 0.4$  (верхняя пара)

Из графика видно, что при слабом превышении порога неустойчивости ( $\delta = 0.9$ ) в усложненной модели не наблюдается качественных изменений в поведении процесса (сплошная кривая), по сравнению с упрощенной моделью (пунктирная кривая). Данное наблюдение подтверждает корректность примененных в упрощенной модели приближений.

В области заметного превышения порога неустойчивости ( $\delta = 0.4$ ), усложненная модель позволяет видеть качественно новые эффекты по сравнению с упрощенной моделью, границей применимости которой декларировалось значение  $\delta > 0.8$ . Из полученного результата видно, что для корректного изучения поведения процесса при значительном превышении порога неустойчивости необходимо учитывать взаимодействия мод возбужденного спектра.

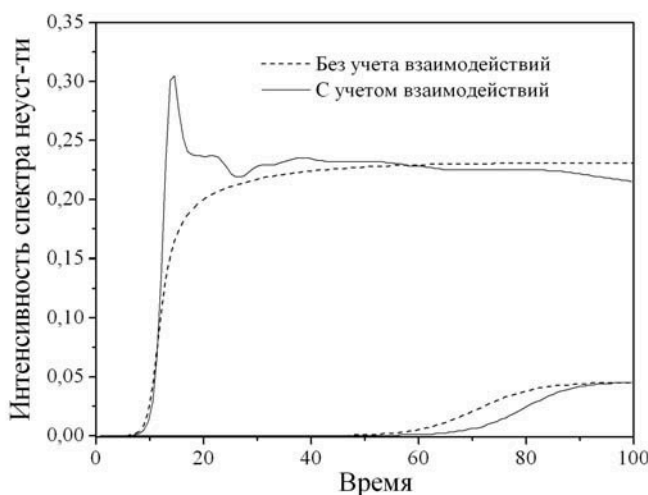


Рис. 5. Сравнение результатов моделирования с учетом взаимодействия мод спектра и без такового для двух различных значений параметра  $\delta$ .

Для рассмотрения поля колебаний волнового процесса воспользуемся выражением (6).

При многократном моделировании процесса было отмечено, что на начальной стадии развитой модуляционной неустойчивости возможно появление значительных всплесков амплитуды основной волны (рис 6).

Параметры вычислений:  $N = 100$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $g = 0.4$ ,  $\tau = 6.57$ . Максимальный размах амплитуды волны  $\Delta E_{max} \approx 3.8$ , среднее значение размаха в окрестности

максимального всплеска  $\Delta E_{aver} \approx 1.4$ . Отношение  $\frac{\Delta E_{max}}{\Delta E_{aver}} \approx 2,71$ .

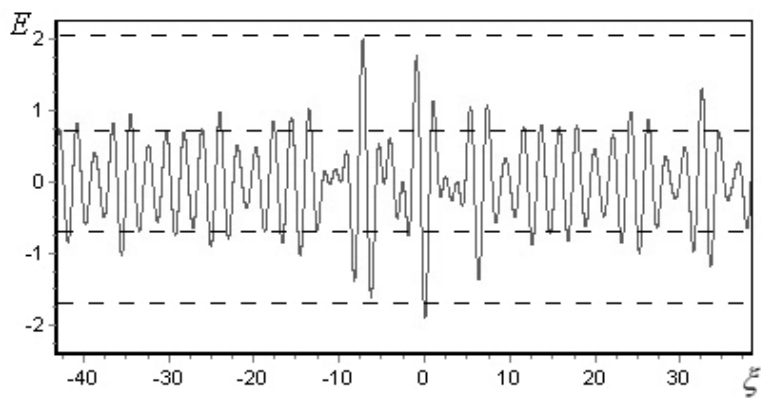


Рис. 6. Всплеск волнового поля, численный эксперимент

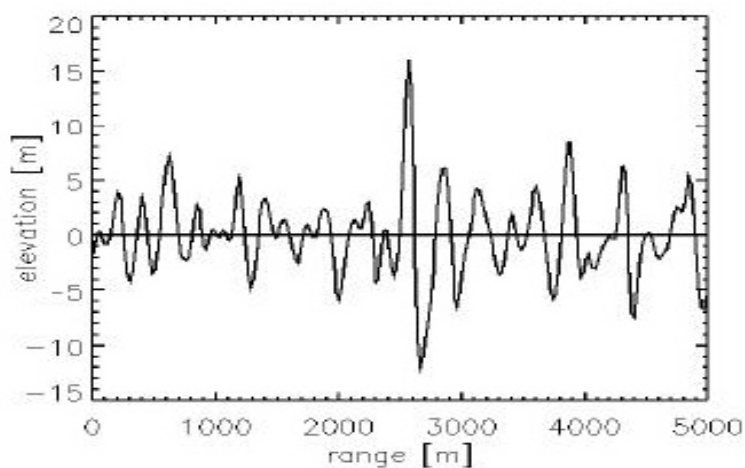


Рис. 7. Аномальная амплитуда волны в океане (зафиксирована спутником ESR-2, 20.08.1996, 22:51:17) [15]

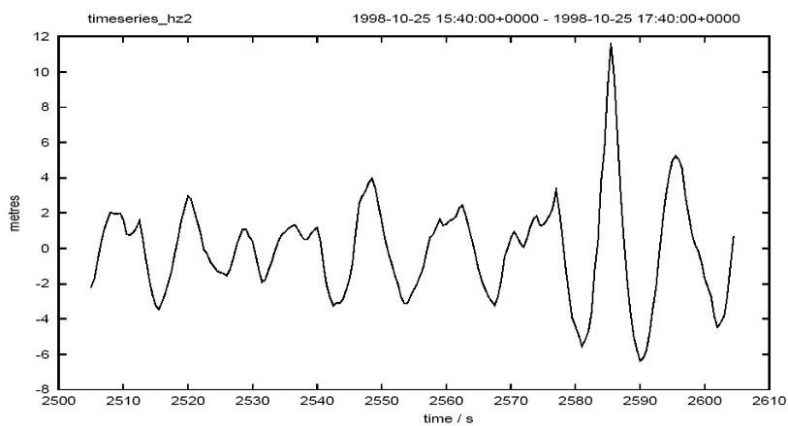


Рис. 8. Временная серия колебаний уровня океана, полученная с лазерных датчиков комплекса Ekofisk (25.10.1998, 15:40-17:40) [16]

На рис. 7, 8 представлены данные, опубликованные в рамках отчетов проекта MaxWave [15,16]. Вычислительный эксперимент показывает возможность формирования аномальных всплесков превышающих общий волновой фон более чем в 2.5 раза. Сходные отношения максимальной амплитуды к среднему значению амплитуды наблюдаются в графиках показаний датчиков, фиксирующих уровень океана в области. На основании этого сходства можно выдвинуть гипотезу, о том, что физические процессы, положенные в основу рассматриваемой модели могут быть в определенной мере ответственны за аномальные всплески волнового поля, которые наблюдаются в реальных физических системах.

### 8. Выводы

Построена математическая модель неустойчивости волны конечной амплитуды, учитывающая взаимодействия между модами спектра неустойчивости. Проведен анализ полученной модели, который показал ее адекватность и непротиворечивость основным физическим законам. Разработаны и применены специальные алгоритмические и программные решения, учитывающие особенности данной модели и повышающие эффективность исследования. К таким решениям можно отнести: методику динамического уменьшения вычислительной стоимости на этапе вычислений, модуль управления автоматическим получением статистических данных, шаблон для быстрого внедрения модулей-анализаторов и модулей-коллекторов данных, оптимизированный метод поиска и фиксации всплесков, программный алгоритм, реализующий поиск эффектов модуляции в серии из множества экспериментов.

В результате исследования модели были обнаружены эффекты, сходные с эффектами, наблюдаемыми в реальных физических объектах. На основе данного сходства выдвинута гипотеза о том, что природа этих явлений может определяться процессом, положенным в основу математической модели, а именно – модуляционной неустойчивостью волны конечной амплитуды в нелинейной среде. Нелинейные открытые системы часто являются неотъемлемой частью технических систем, например – среда переноса для оптических волноводов, поверхность океана для судов и нефтедобывающих платформ и т.п. В этой связи исследования, направленные на понимание и объяснение природы аномальных волновых эффектов, являются актуальными и могут быть полезны при конструировании новых или модернизации существующих технических систем.

### ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Lighthill. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system // J. Inst. Math. Appl. – 1965 – V.1, №.2. p.269-306.
2. Zakharov V.E. Stability of nonlinear waves in dispersive media. // J Teor. Prikl. Fiz., 51 – 1966), p. 668-671.
3. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. – М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит., 1983. – 320 с.

4. Zakharov V.E. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. Three-dimensional aspects of air-sea interaction. // *Eur. J. Mech. Fluids* – 1999 – №18(3), pp. 327-344.
5. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах – М. Наука. 1973. – 175 с.
6. Dyachenko AI, Zakharov V.E. Modulation instability of stokes wave - Freak wave // *JETPLett* – 2005 – № 81(6), pp. 255–259.
7. G. J. Komen, L. Cavaleri, M. Donelan and oth. Dynamics and modelling of ocean waves // Cambridge University Press – 1994.
8. Воробьев В.М., Куклин В.М. // *Письма в ЖТФ*. – 1987 – т.13, №22. – с. 1354- 1360.
9. Kuklin V. M., Panchenko I. P., Vorob'ev V. M. Space dissipative Structures // *Nonlinear World*. – 1990. – Vol. 2 (IV International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, 1989, Singapore). – P. 776-803.
10. Белкин Е. В. Гуцин И.В. Анализ численной модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде // *Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна. – Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. – 2008 – № 809 (9). с. 20-31.
11. Белкин Е. В. Моделирование развития модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде./ Белкин Е.В., Куклин В.М.// *Вісник ХНУ ім. В.Н.Каразіна.. – Сер. Ядра, частинки, поля*. – 2008. – № 794, выпуск 1 (37). с. 51-56.
12. Белкин Е.В., Киричок А.В., Куклин В.М. Об интерференции в многомодовых режимах модуляционных неустойчивостей // *Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения*. – 2008. – № 4 (6). с. 222-227
13. Тихонов А.Н. Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения – М.: Наука, 1980. – 231 с.
14. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
15. Rosenthal W. MaxWave Rogue waves – Forecast and impact on marine structures // *Workpackages of MaxWave project* <http://coast.gkss.de/projects/maxwave/workp/WP1.pdf> – p. 7.
16. A.D. Jenkins, A.K. Magnusson, A. Niedermeier and oth. Rougue waves and extreme events in measures time-series – Norwegian Meteorological Institute – Research Report N138 WP2/1 from the MaxWave project [http://coast.gkss.de/projects/maxwave/wp2\\_rep138\\_pages1-93.pdf](http://coast.gkss.de/projects/maxwave/wp2_rep138_pages1-93.pdf) p.37

Надійшла у першій редакції 12.04.2009, в останній - 17.04.2009.