

## Гиперсингулярные уравнения в задачах прочности элементов конструкций с трещинами при температурном нагружении

О. Л. Зайденварг, Е. А. Стрельникова

*Институт проблем машиностроения им.А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина*

Modern structural materials always has some microdefects. The evolution of these microdefects under temperature field influence brings to destruction of the structure. In order to solve the problem of solidity of structural element which is impaired by defects we need to find stress intensity factors. This paper presents the determination of crack intensity factors for the plate which is impaired by the chain of cracks and operates under temperature field influence.

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Многие ответственные элементы современных конструкций, работают в условиях высоких температур. В реальных конструкционных материалах всегда имеются микродефекты, развитие которых под действием температурного поля может привести к разрушению конструкции. Для решения задачи о прочности элемента конструкции, ослабленного дефектами, требуется определить коэффициенты интенсивности напряжений.

### 2. Истоки исследования авторов

Некоторые плоские задачи термоупругости для тел с трещинами изучались в работах [1-3].

### 3. Цели работы

Целью данной работы является определение коэффициентов интенсивности напряжений в пластине, ослабленной цепочкой трещин, и находящейся под действием температурного поля.

### 4. Постановка задачи и метод решения гиперсингулярного интегрального уравнения.

Пусть в неограниченном теле имеется система разрезов (рис. 1), расположенных вдоль оси  $Ox$ . Распределение температуры в теле без трещин описывается заданной гармонической функцией  $T_0(x)$ . Тогда общую температуру  $T(x)$  можно представить в виде  $T(x) = T_0(x) + t(x)$ , где  $t(x)$  – возмущенное температурное поле, вызванное наличием трещин.

Из условия термоизолированности трещин  $\frac{\partial T(\mathbf{x})^+}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial T(\mathbf{x})^-}{\partial \mathbf{n}}$  получаем граничное условие  $\frac{\partial t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}^\pm} = -\frac{\partial T_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}$ .

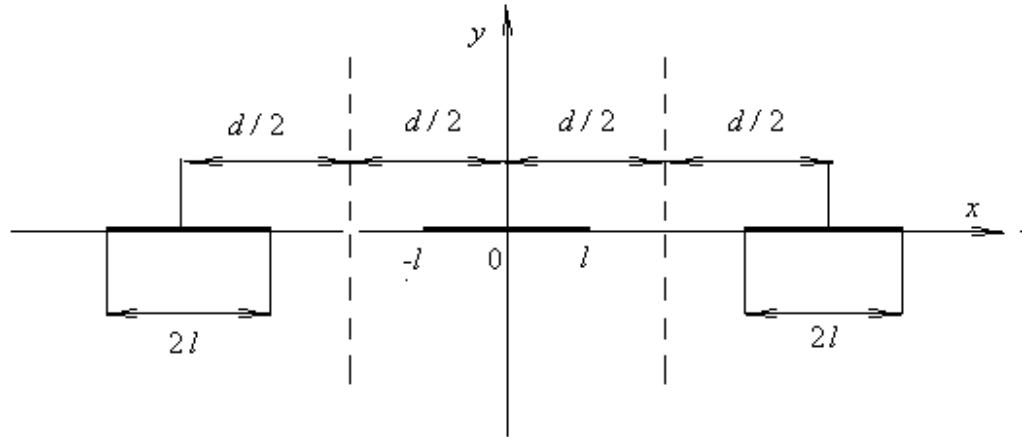


Рис. 1. Периодическая система трещин

Задача нахождения возмущенного поля температур в теле с разрезами  $S = \bigcup L_k$  сводится к нахождению гармонической функции  $t(\mathbf{x})$  из соотношений

$$\Delta t(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}^\pm} = -\frac{\partial T_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in S; \quad (2)$$

$$\text{grad} t(\mathbf{x}) \Big|_{\infty} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – нормаль к контурам трещин (параллельна оси  $Oy$ ).

Предположим, что на все трещины падает один и тот же температурный поток. Тогда трещины находятся в одинаковых условиях и в качестве интегрального представления для решения задачи (1)–(3) можно выбрать потенциал двойного слоя, распространенный по  $S$

$$t(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_l \Gamma(\xi) \sum_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dl, \quad (4)$$

где неизвестная плотность  $\Gamma(\xi)$  – определенная на  $l$  функция. Как известно [4], потенциал двойного слоя всюду вне  $S$  удовлетворяет уравнению Лапласа (1), на бесконечности – условию Зоммерфельда (т.е. условию (3)); а при переходе через  $l$  потенциал  $t(\mathbf{x})$  терпит разрыв и имеет непрерывную нормальную производную, если производные плотности  $\Gamma(\xi)$  удовлетворяют условию Гельдера. Таким образом, если в качестве интегрального представления выбрать потенциал двойного слоя (4), то для полного решения задачи остается лишь потребовать выполнения соотношения (2).

При этом получим такое интегральное уравнение

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \Gamma(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-x_0-kd)^2} dx = q = -\frac{\partial T_0}{\partial y} \quad (5)$$

В предположении, что на все трещины падает один и тот же температурный поток, в качестве интегрального представления для решения задачи (1) можно выбрать потенциал двойного слоя, распространенный по  $S$

Ядро полученного гиперсингулярного уравнения можно записать в форме [4]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-x_0-kd)^2} = \frac{\pi^2}{d^2 \sin^2 \pi((x-x_0)/d)}.$$

Тогда (5) примет вид (замена переменной  $\frac{\pi x}{d} = \frac{\varphi}{2}$ )

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma(\varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} = p_1(\varphi_0), \quad (6)$$

где  $\alpha = \frac{2\pi l}{d}$ ,  $p_1(\varphi_0) = 2\pi d q$ ,  $\frac{l}{d} < \frac{1}{2}$ .

Получим аналитическое решение уравнения (6). Для этого приведем его к виду [5]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma'(\varphi) \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) d\varphi = p_1(\varphi_0). \quad (7)$$

Это уравнение необходимо решать при дополнительном условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma'(\varphi) d\varphi = 0. \quad (8)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{\cos^2(\varphi_0/2) [\operatorname{tg}(\varphi/2) - \operatorname{tg}(\varphi_0/2)]}$$

получим такое сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma'(\varphi) \left\{ \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{\cos^2(\varphi_0/2) [\operatorname{tg}(\varphi/2) - \operatorname{tg}(\varphi_0/2)]} \right\} d\varphi = p_1(\varphi_0).$$

С учетом условия (8) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\Gamma'(\varphi)}{\cos^2(\varphi_0/2) [\operatorname{tg}(\varphi/2) - \operatorname{tg}(\varphi_0/2)]} d\varphi = p_1(\varphi_0).$$

Сделаем замену переменной

$$\eta = \operatorname{tg}(\varphi/2); \quad y = \operatorname{tg}(\varphi_0/2); \quad a = \operatorname{tg} \frac{\pi l}{d}; \quad p_2(y) = p_1(\varphi_0), \quad d\eta = \frac{d\varphi}{2 \cos^2(\varphi/2)}.$$

С учетом того, что  $\Gamma'_{\varphi} = \Gamma'_{\eta} \eta'_{\varphi}$  получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Gamma'(\eta)}{y - \eta} d\eta = \frac{p_2(y)}{1 + y^2}.$$

Решением этого уравнения будет функция [6]

$$\Gamma'(y) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \eta^2} p_2(\eta)}{(1 + \eta^2)(\eta - y)} d\eta. \quad (9)$$

При  $p_2(y) = q = \text{const}$  (т.е. в предположении, что на все трещины падает одинаковый поток) интеграл в (9) вычисляется аналитически [3]

$$\Gamma'(y) = -2\pi a \sqrt{1 + a^2} \frac{y}{(1 + y^2) \sqrt{a^2 - y^2}}, \quad y = \text{tg}(\varphi / 2) = \text{tg} \frac{\pi x}{d}$$

Интегрируя полученное равенство с учетом дополнительного условия (8), определяем  $\Gamma(x)$ . Так как  $y = \text{tg}(\varphi / 2) = \text{tg} \frac{\pi x}{d}$ , то

$$\Gamma(x) = q \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi d / d)} - \sqrt{\text{tg}^2(\pi d / d) - \text{tg}^2(\pi x / d)}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi d / d)} + \sqrt{\text{tg}^2(\pi d / d) - \text{tg}^2(\pi x / d)}} \right| \quad (10)$$

Определим возмущенную температуру, вызванную наличием трещин. Для этого вычислим

$$t(x) = \frac{1}{4\pi} \int_l \Gamma(\xi) \sum_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dl = -\frac{1}{4\pi} \int_l \Gamma(\xi) \sum_k \frac{y}{(x - x_0 - kd)^2 + y^2} d\xi \quad (11)$$

$$\text{Здесь } |\mathbf{x} - \xi| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

После вычисления производной полагаем  $\eta = 0$ . С учетом формулы (теорема Миттаг-Леффлера)

$$\text{ctg } z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right), \quad z = (x - x_0) + iy$$

$$\text{ctg } z = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{z} - n\pi}{|z - n\pi|^2} + \frac{\bar{z} + n\pi}{|z + n\pi|^2} \right) = \frac{x - x_0 - iy}{(x - x_0)^2 + y^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{x - x_0 - n\pi - iy}{(x - x_0 - n\pi)^2 + y^2}$$

получаем, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - x_0 - kd)^2 + y^2} = \frac{\pi}{d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi y / d}{(\pi(x - x_0) / d - k\pi)^2 + (\pi y / d)^2} = -\frac{\pi}{d} \text{Imctg } z_1, \quad (12)$$

$$\text{где } z_1 = \frac{\pi}{d} [(x - x_0) + iy].$$

Подставляя выражения (10) и (12) в (11), получаем формулу для расчета температурного поля, падающего на пластину.

Составляющие коэффициентов интенсивности напряжений, которые вызваны возмущенным температурным полем, определяются по формулам [3]

$$k_2^{\pm} = \frac{\beta_t d}{\pi(\chi + 1) \sqrt{\pi d \text{tg} \frac{\pi d}{d}}} \int_{-l}^l \Gamma(t) dt, \quad k_1^{\pm} = 0 \quad (11)$$

Здесь  $\chi = 3 - 4\nu$ ,  $\beta_t = \alpha_t E$  (случай плоской деформации),  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $E = 210000$  Мпа;  $\alpha_t$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $\alpha_t = 0.204 / C^0$ . (Данные приведены для стали марки Ст3.) С учетом того, что  $p(t) = const = p$ , вычисляя интеграл в (13), получаем

$$k_2^{\pm} = \frac{2\beta_t dq}{\pi(\chi + 1)\sqrt{\pi dtg \frac{\pi l}{d}}} \ln \left| \cos \frac{\pi l}{d} \right| \quad (12)$$

### 5. Численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений и температурного поля в окрестности трещин.

Проведен численный анализ зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от параметров цепочки трещин. Разрушение происходит, когда коэффициент интенсивности напряжений  $k_2$  больше или равен  $k_{crit}$ , где  $k_{crit} = 30$  Мпа·м<sup>1/2</sup>. Отметим, что При  $q=25$  и меньших значениях  $q$  пластина не разрушается.

Результаты анализа показаны на рис. 2. На рис. 3 приведено графическое представление температурного поля, падающего на пластину.

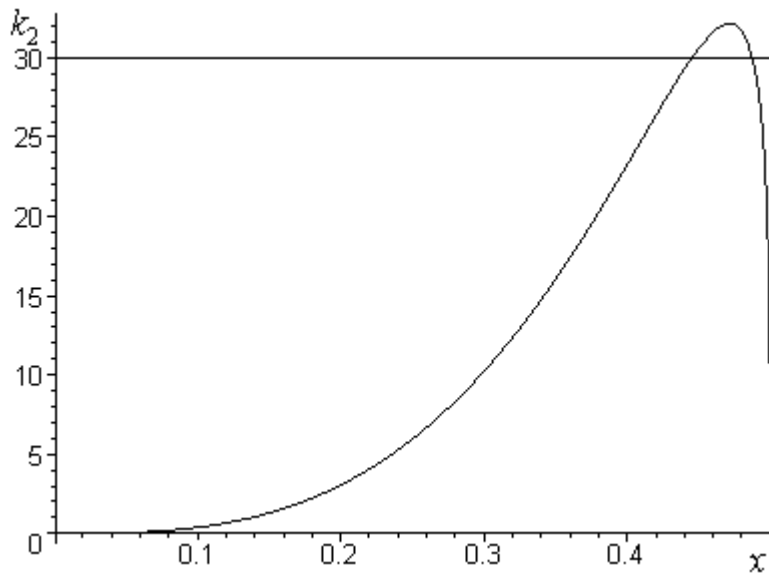


Рис.2. Зависимость коэффициентов интенсивности от параметров трещины

### 6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Таким образом, в данной работе определено возмущенное поле температуры в пластине с системой трещин. Определены коэффициенты интенсивности, и установлен диапазон температурных нагрузок, при которых пластина не разрушается. Предполагается изучение задач термоупругости для тел с системой плоских разрезов.

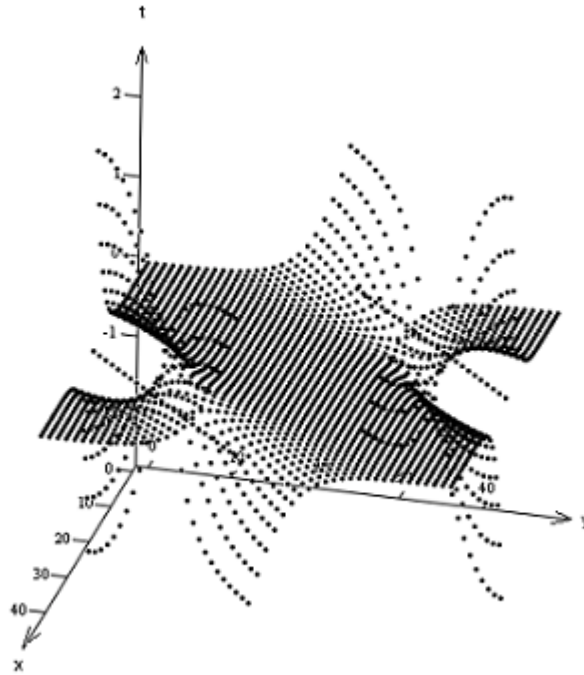


Рис.3. Графическое представление температурного поля

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейкив А.Е., Дарчук А.И. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 404 с.
2. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Ковчик С.Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1971.– 278 с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.–Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков, “Новое слово”, 2005.– 252с.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н.Каразина, 2000. –92 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.–М: Наука, 1968. –512 с.

Надійшла 25.03.2009.